

# ELEMENTI DI AUTOMAZIONE

Appunti del corso

## *Indice*

<b>I.</b>	<b>INTRODUZIONE AL CORSO</b>	<b>I-1</b>
I.1	PREMESSA	I-1
I.2	I SETTORI APPLICATIVI DELL'AUTOMAZIONE	I-3
I.3	LE TECNOLOGIE DELL'AUTOMAZIONE	I-4
I.4	TIPOLOGIE DI PROBLEMI DI AUTOMAZIONE	I-4
I.5	LE DISCIPLINE DELL'AUTOMAZIONE	I-6
I.6	CONTENUTI DEL CORSO DI "ELEMENTI DI AUTOMAZIONE"	I-7
<b>II.</b>	<b>SISTEMI E MODELLI</b>	<b>II-1</b>
II.1	CONCETTO DI SISTEMA	II-1
II.2	MODELLO DI UN SISTEMA	II-1
II.2.1	<i>Sistemi statici e sistemi dinamici</i>	II-3
II.3	MODELLI INGRESSO-STATO-USCITA (I-S-U) DI SISTEMI DINAMICI	II-3
II.3.1	<i>Il concetto di stato</i>	II-3
II.3.2	<i>Definizione formale di sistema e modello implicito i-s-u</i>	II-4
II.3.3	<i>Il processo di costruzione di un modello e la scelta delle variabili di stato</i>	II-6
II.3.4	<i>Modello esplicito i-s-u</i>	II-8
II.4	CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI	II-8
II.4.1	<i>Sistemi a tempo continuo e a tempo discreto</i>	II-8
II.4.2	<i>Sistemi invarianti e varianti nel tempo</i>	II-11
II.4.3	<i>Sistemi lineari e nonlineari</i>	II-12
II.4.4	<i>Automati</i>	II-17

# I. INTRODUZIONE AL CORSO

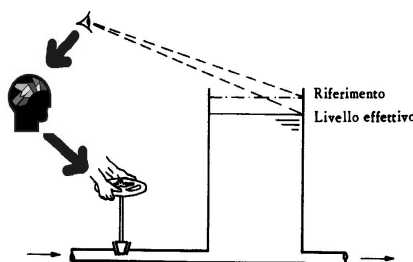
## I.1 Premessa

L'*Automazione* è una branca dell'Ingegneria moderna che si occupa della risoluzione di problemi che hanno come obiettivo quello di ridurre o eliminare l'intervento dell'uomo nella produzione di beni e/o di servizi.

L'esame dei principali compiti svolti dall'uomo in una qualsiasi attività lavorativa porta a classificare gli *organi* di un sistema di automazione in tre tipi fondamentali:

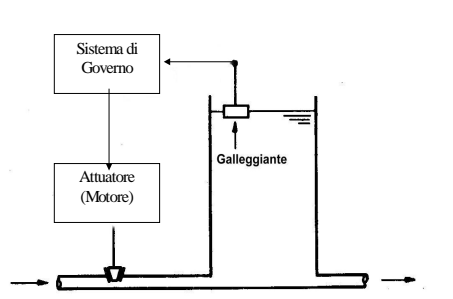
- *Organi sensoriali*, che hanno come obiettivo la misurazione di grandezze di interesse per valutare lo stato di avanzamento e/o il corretto svolgimento del lavoro in esecuzione;
- *Organi di elaborazione*, che, sulla base delle misure fornite dagli organi sensoriali e degli obiettivi del lavoro in esecuzione, decidono le azioni da intraprendere;
- *Organi di attuazione*, che eseguono le azioni comandate dagli organi di elaborazione.

**Esempio 1.1** In un serbatoio si vuole mantenere costante il livello del liquido in esso contenuto, a fronte di prelievi non noti effettuati da alcune utenze. Il livello può essere regolato per mezzo di un operatore che dovrà manovrare in maniera opportuna una valvola di regolazione (Fig.1.1).



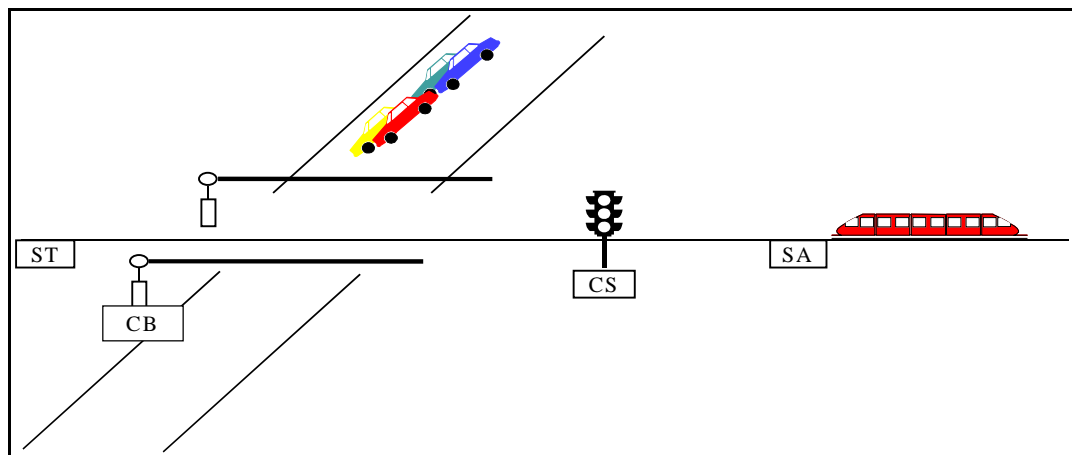
**Figura 1.1** Regolazione manuale del livello di un serbatoio

Questo compito può essere svolto in maniera automatica mediante un sistema che sia in grado di svolgere le tre funzioni dell'operatore: misurazione del livello effettivo, decisione sul modo in cui intervenire sulla valvola di regolazione, attuazione della manovra sulla valvola di regolazione. Un semplice sistema di automazione è mostrato in Fig. 1.2.



**Figura 1.2** Regolazione automatica del livello di un serbatoio

**Esempio 1.2** Il passaggio a livello di una ferrovia (vedi Fig.1.3) deve essere interrotto al traffico in occasione del transito di un treno. Questa operazione veniva una volta effettuata manualmente da un operatore il quale, avvertito telefonicamente dell'arrivo del treno, provvedeva a chiudere le barriere fino a transito avvenuto. Essa è oggi completamente automatizzata per mezzo di due sistemi elementari gerarchicamente interagenti: un primo sistema, "Controllo Semafori" (CS), rileva, per mezzo di un apposito sensore SA posto a distanza dal passaggio a livello, l'evento "arrivo di un treno" e comanda la "chiusura delle barriere". A tale operazione provvede un secondo sistema, "Controllo Barriere" (CB), del tipo discusso nell'Esempio 1.1, il quale, una volta completata l'operazione di chiusura, ne dà comunicazione al sistema CS dell'evento "chiusura barriere completata". Il CS provvede a posizionare sul verde il semaforo per il treno e sul rosso quello di attraversamento del passaggio a livello. Successivamente, una volta che "il treno è transitato", evento questo segnalato da un apposito sensore ST, il sistema CS invia il comando "apertura barriere" al CB che effettua tale operazione. Infine il sistema CS, ricevuta comunicazione da parte di CB dell'evento "apertura barriere completata", provvede a posizionare sul rosso il semaforo del treno, sul verde quello di transito, e si predispone per una nuova operazione.



**Figura 1.3** Rappresentazione schematica del sistema di passaggio a livello di una ferrovia

Sebbene l'Automazione sia considerata da molti come una scienza giovane, in realtà essa ha origini remote. I primi sistemi di automazione, infatti, risalgono all'epoca dell'invenzione della macchina a vapore. Tuttavia, fino all'inizio degli anni cinquanta, la sua diffusione è stata abbastanza limitata essenzialmente per due motivi:

- i) la difficoltà nel realizzare organi di elaborazione in grado di eseguire algoritmi di decisione complessi;
- ii) la difficoltà nel far "colloquiare" gli organi sensoriali, decisionali e di attuazione.

Prima di quegli anni, infatti, gli organi di elaborazione erano costituiti da sofisticati congegni di tipo meccanico o pneumatico, che consentivano di implementare solo banali algoritmi di elaborazione, la cui connessione agli organi sensoriali e di attuazione costituiva già di per sé un complesso problema di ingegneria.

L'avvento delle moderne tecnologie dell'informazione ha portato ad una vera rivoluzione dei sistemi di automazione. Infatti, da una parte, la disponibilità di sistemi di elaborazione estremamente potenti, versatili e a basso costo (microprocessori) ha consentito di implementare sofisticati algoritmi decisionali, in grado di operare anche in presenza di situazioni estremamente complesse; dall'altra parte, la semplificazione nello scambio di informazioni tra i vari organi di un sistema di automazione, consentito dalle reti di comunicazione e dalla disponibilità di sensori e attuatori "intelligenti" (che possono essere inseriti direttamente su una rete di comunicazione), ha consentito di semplificare i

problemi di progetto e di realizzazione, e di conseguenza di ridurre i costi dei sistemi di automazione.

Nel seguito viene fatta una breve rassegna dei campi applicativi dell'automazione.

## I.2 I settori applicativi dell'Automazione

L'Automazione trova applicazione in quasi tutti i settori sia della produzione industriale che dei servizi.

Per quanto riguarda il **settore industriale**, si è soliti distinguerlo in due tipi fondamentali:

- *Industrie di processo*, destinate alla produzione di prodotti di base ottenuti mediante un flusso continuo di materiale sottoposto ad una serie di trattamenti successivi (industria chimica, petrolchimica, farmaceutica, agro-alimentare, metallurgica, del vetro, del cemento, di trattamento acque, della produzione di energia elettrica, ...);
- *Industrie manifatturiere*, destinate alla produzione di beni strumentali e di consumo ottenuti mediante una successione di cicli di lavorazione su elementi distinti, sottoposti successivamente ad assemblaggio (automobili, elettrodomestici, tessuti e abbigliamento, prodotti per la casa, ...).

Le differenze tra le tecniche di produzione delle industrie di processo e quelle delle industrie manifatturiere sono notevolissime e si riflettono in maniera sensibile sulle differenze dei relativi sistemi di automazione.

Per quanto riguarda invece il **settore dei servizi**, i relativi sistemi di automazione sono estremamente articolati e vari.

All'interno di esso un posto di primo piano, per la complessità inerente dei sistemi su cui si interviene, è rappresentato dai *servizi articolati in reti*, quali ad esempio le reti di trasporto e distribuzione di energia elettrica, acqua, gas, trasporto ferroviario.

Un discorso a parte va fatto per i *servizi amministrativi, commerciali e creditizi*. Questi campi applicativi sono tutti caratterizzati dalla necessità di sottoporre ad una serie predefinita di operazioni una quantità spesso relevantissima di dati. Per essi vengono di solito sviluppati appositi sistemi di automazione, che richiedono tipicamente l'uso di grossi calcolatori e di pacchetti SW specializzati nel trattamento di grosse Basi di Dati.

Nell'automazione sia industriale che dei servizi, una tendenza che si è affermata negli ultimi venti anni è quella dello sviluppo di *macchine* quasi completamente automatizzate in grado di svolgere compiti complessi. Tra esse, quelle più diffuse sono sicuramente i manipolatori meccanici programmabili (*robot*) impiegati su larga scala sia per l'esecuzione di operazioni ripetitive in catene di produzione, sia per operazioni in ambienti ostili (operazioni di verniciatura e saldatura, manutenzione di impianti nucleari, operazioni nello spazio, operazioni sul fondo marino, ...). Sulla base delle conoscenze sviluppate in tale campo, si stanno oggi sviluppando anche altri tipi di macchine completamente automatiche, come ad esempio velivoli autonomi già largamente usati in campo militare, mentre ancora sono in via di sviluppo macchine completamente automatiche per usi civili (auto, treni, aerei, ...) nei quali è richiesta un'elevata affidabilità e sicurezza.

### **I.3 Le tecnologie dell'Automazione**

La breve panoramica fatta nel paragrafo precedente ha messo in evidenza che l'Automazione è un fenomeno che interessa i più diversi settori. Viene allora naturale chiedersi come possa svilupparsi una disciplina dell'Automazione, o addirittura una tecnologia dell'Automazione, che abbia un carattere generale e non legato al particolare contesto applicativo. In realtà, malgrado le diversità dei contesti applicativi, è possibile riconoscere tra i vari processi automatizzati l'esistenza di strutture caratteristiche e di problemi comuni. E' con riferimento a tali aspetti comuni che si sono sviluppate le metodologie e le tecniche dell'Automazione.

Le *Metodologie dell'Automazione* hanno per oggetto la progettazione, in termini astratti e formali, degli algoritmi sulla base dei quali gli organi di elaborazione decidono le azioni da esercitare sull'impianto da automatizzare. Fanno parte di tale progetto anche la scelta delle grandezze da misurare e della tipologia di azioni con cui si vuole intervenire sull'impianto. Infine le metodologie hanno anche per oggetto la valutazione, anch'essa in termini astratti, delle prestazioni ottenibili dall'impianto automatizzato.

Le *Tecniche dell'Automazione* hanno per oggetto lo sviluppo dei dispositivi fisici che realizzano gli organi sensoriali, gli organi di elaborazione, e gli organi di attuazione.

Il livello di generalità e di astrazione con cui si sono sviluppate le metodologie dell'Automazione consente di considerarle come un bagaglio culturale comune e indispensabile per affrontare un qualsiasi problema di automazione. Ovviamente la conoscenza delle caratteristiche fondamentali di funzionamento dell'impianto da automatizzare resta sempre una premessa indispensabile, ma altrettanto importante è il ruolo giocato dalle metodologie dell'Automazione.

Per quanto riguarda invece le tecniche dell'Automazione, si intuisce facilmente che i dispositivi che realizzano gli organi sensoriali e gli organi di attuazione, i quali si interfacciano direttamente con il processo, sono strettamente legati all'applicazione. La loro scelta di dettaglio, tra i dispositivi disponibili in commercio, richiede pertanto una competenza specifica sul processo da automatizzare. Viceversa, con riferimento ai dispositivi che realizzano gli organi di elaborazione, si può ormai ritenere consolidato l'uso di apparecchiature informatiche, e questo anche per la semplicità con cui si riesce a far *colloquiare* tali dispositivi con sensori e attuatori *intelligenti* attraverso opportune reti di comunicazione. Una conoscenza approfondita delle tecnologie dell'Informazione è da ritenersi pertanto un requisito culturale indispensabile per un esperto di Automazione.

Viene così a delinearsi un bagaglio di conoscenze, sia tecniche che metodologiche, che accomuna i problemi di Automazione. Su tale bagaglio culturale poggiano le *Tecnologie dell'Automazione* intese come l'insieme di conoscenze tecnico-scientifiche sviluppate allo scopo di trovare, a specifici problemi di Automazione, soluzioni che, oltre a garantirne il comportamento desiderato, siano ottime da un punto di vista di sicurezza e di economicità.

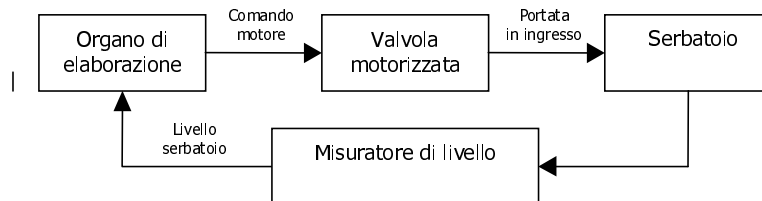
### **I.4 Tipologie di problemi di Automazione**

Gli esempi 1.1 e 1.2 hanno messo in evidenza che un sistema di automazione può essere costituito da un insieme di sistemi automatici elementari, tra loro interagenti, ciascuno avente una struttura base del tipo mostrato in Fig. 1.4.



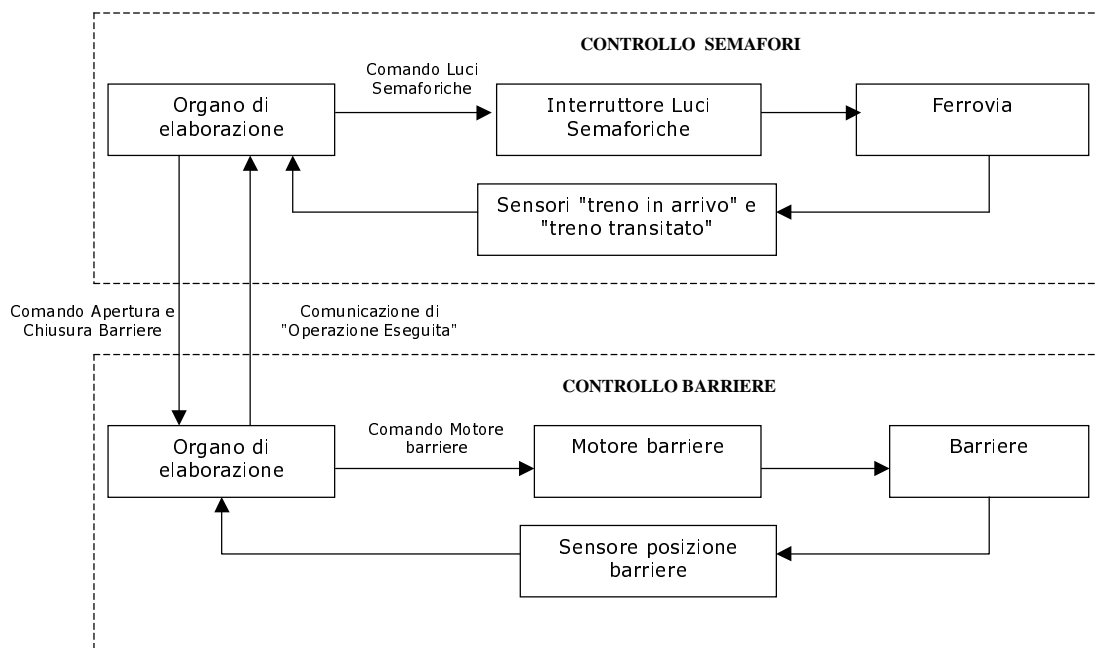
**Figura 1.4** Struttura base di un sistema di automazione elementare

**Esempio 1.3** Il sistema di automazione del serbatoio discusso nell'Esempio 1.1 può essere schematizzato come in Fig.1.5.



**Figura 1.5** Rappresentazione schematica del sistema di automazione di un serbatoio

**Esempio 1.4** Il sistema di automazione del passaggio a livello discusso nell'Esempio 1.2 può essere schematizzato mediante due sistemi elementari di automazione interagenti, come mostrato in Fig.1.6.



**Figura 1.6** Rappresentazione schematica del sistema di automazione di un passaggio a livello

I sistemi elementari di automazione vengono solitamente divisi in due categorie:

1. *Sistemi di controllo continui.* Questi, detti anche semplicemente "Sistemi di Controllo", operano su variabili fisiche che sono grandezze che possono variare con continuità. Obiettivo di tali sistemi di controllo è quello di garantire che una o più variabili fisiche seguano un andamento desiderato. Il sistema di automazione del serbatoio descritto

nell'esempio 1.3 e il sistema elementare "Controllo Barriere" dell'Esempio 1.4 rappresentano esempi di Sistemi di Controllo.

2. *Sistemi di Controllo logico-sequenziale.* Questi sono sistemi che operano tipicamente su grandezze che possono assumere solo un numero finito di valori. Obiettivo di tali sistemi di controllo è quello di avviare una predefinita sequenza di operazioni allorché si verifica un "evento". Un esempio di Sistema di controllo logico-sequenziale è costituito dal "Controllo Semafori" dell'Esempio 1.4, in cui gli eventi sono rappresentati da "Arrivo di un treno", "Chiusura barriere completata", "Treno transitato", "Apertura barriere completata".

## **I.5 Le discipline dell'Automazione**

Le discipline che concorrono alla formazione di un esperto di Automazione si distinguono tra discipline metodologiche e discipline tecniche.

Le discipline metodologiche trattano:

- a) la progettazione architetutturale del sistema di automazione (definizione dei singoli sistemi di controllo elementari e delle loro interazioni);
- b) la progettazione degli algoritmi di controllo;
- c) la valutazione delle prestazioni del sistema di automazione.

Le discipline tecniche trattano invece gli aspetti realizzativi del sistema di automazione, e quindi in particolare:

- a) la scelta dei sistemi di misura;
- b) la scelta dei sistemi di attuazione;
- c) la scelta dell'hardware e del software applicativo del sistema di elaborazione;
- d) l'implementazione SW degli algoritmi di controllo;
- e) l'assemblaggio dell'intero sistema di automazione;
- f) la messa in esercizio del sistema.

*La fase di progettazione e valutazione delle prestazioni, come già detto in precedenza, viene effettuata in maniera astratta, servendosi di modelli matematici sia del processo su cui intervenire che degli apparati di controllo (attuatori, sensori, sistema di elaborazione e algoritmi di controllo). Un ruolo centrale nello sviluppo del progetto è pertanto giocato dalla "Teoria dei Sistemi", che si interessa appunto della descrizione di sistemi mediante modelli matematici, e dell'analisi del loro comportamento. Su queste conoscenze si basano poi le discipline di tipo più propriamente progettuale. Va tuttavia sottolineato che sia la fase di descrizione del sistema mediante modello matematico che quella di progettazione del sistema di automazione (soprattutto per quel che riguarda la fase di progetto architetutturale) richiedono una specifica conoscenza dell'impianto da automatizzare, conoscenza che, data la larga varietà di impianti di potenziale interesse, non può essere acquisita in maniera esauriente a livello di studi universitari.*



Tra le discipline tecniche un ruolo centrale è svolto dalle discipline di Informatica su cui poggiano gli aspetti realizzativi (HW e SW) degli organi di elaborazione. La preparazione fornita dalle discipline tipicamente informatiche va poi completata con discipline tecniche in cui vengono descritte apparecchiature informatiche più propriamente legate a sistemi di automazione (ad esempio sistemi di elaborazione in tempo reale per applicazioni industriali). Per quanto riguarda poi le discipline finalizzate alla preparazione sulla scelta dei sistemi di attuazione e di misura, queste ancora una volta dipendono in maniera stretta dalla natura fisica dell'impianto da automatizzare.

Non essendo possibile trattare in maniera esauriente le varie tipologie di sistemi sui quali un esperto di automazione può essere chiamato ad intervenire, nella Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli "Federico II" si è deciso di puntare ad una formazione abbastanza approfondita sui sistemi di tipo meccanico ed elettromeccanico, le cui conoscenze sono alla base dell'automazione di industrie manifatturiere e dell'automazione di un gran numero di macchine specializzate (ad esempio robot). Lo studente interessato ad acquisire competenze specifiche su sistemi o processi di natura diversa (sistemi aeronautici o aerospaziali, autoveicoli, impianti per la generazione e la distribuzione di energia elettrica, impianti meccanici, impianti chimici, sistemi di congestione, etc.) potrà completare la sua preparazione utilizzando i moduli a scelta consentiti nel piano di studi.

## **I.6     Contenuti del corso di "Elementi di Automazione"**

Il corso di "Elementi di Automazione" si interessa di questioni riguardanti esclusivamente le Metodologie dell'Automazione. Esso ha come obiettivo quello di presentare concetti elementari relativi sia alla costruzione del modello matematico di un sistema, sia alla progettazione di sistemi di controllo elementari.

La prima parte del corso sarà dedicata ad una presentazione di concetti generali relativi a sistemi e modelli, e ad una classificazione dei sistemi.

Successivamente il corso sarà articolato in due fasi distinte. Nella prima saranno trattati sistemi in cui le grandezze di interesse possono assumere un qualsiasi valore reale; essi sono detti "sistemi a stati continui" o semplicemente "sistemi continui". Sistemi di questo tipo si hanno ogniqualvolta si vuole studiare un fenomeno naturale, di natura meccanica, elettrica, termica, etc., in cui le grandezze di interesse sono spostamenti, velocità e accelerazioni di corpi, flussi o portate di liquidi o gas, tensioni o correnti, temperature, etc. Per questa classe di sistemi saranno innanzitutto presentati alcuni concetti elementari di analisi mediante modello matematico. Poi si passerà alla formulazione generale del problema di controllo e si presenteranno alcune tecniche di progettazione del sistema di controllo che, anche se basate su procedure "semiautomatiche", vengono frequentemente utilizzate in pratica. Tali tecniche, tuttavia, oltre a non essere sempre applicabili, non garantiscono un funzionamento ottimale del sistema automatizzato.

Nella seconda parte si tratteranno sistemi in cui le grandezze di interesse possono assumere solo un numero finito di valori e variano solo in istanti di tempo in cui, in maniera sincrona o asincrona, si verificano degli eventi. Tali sistemi sono detti "sistemi ad eventi". Esempi di sistemi di questo tipo sono: i sistemi di lavorazione nelle industrie manifatturiere, in cui una quantità numerabile di pezzi deve essere sottoposto ad una sequenza di lavorazioni; le reti di calcolatori; i sistemi di comunicazione; i sistemi per la gestione del traffico. Per tale classe di sistemi un'attenzione particolare sarà dedicata alla costruzione dei modelli matematici atti a descrivere il loro comportamento. Saranno poi

presentati alcuni problemi di controllo tipici, anche se la progettazione di tali sistemi di controllo sarà trattata nel dettaglio solo per alcuni casi semplici.

## II. SISTEMI E MODELLI

### II.1 Concetto di sistema

Sebbene il concetto di *sistema* possa considerarsi un concetto primitivo (come quello di elemento o di insieme) è opportuno far riferimento ad una sua definizione per evidenziarne alcuni punti essenziali. La seguente definizione è tratta dal dizionario standard dell'IEEE.

*"Un sistema è una combinazione di componenti che operano insieme per svolgere una funzione non realizzabile con nessuno di essi presi individualmente".*

Gli aspetti essenziali da evidenziare sono:

- un sistema consiste di componenti interagenti;
- ad un sistema è associata una funzione che esso deve svolgere;
- i componenti di un sistema non sono necessariamente oggetti fisici.

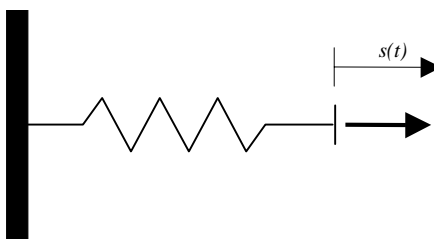
Con tali specificazioni si può intuire come il termine sistema possa essere utilizzato in un'accezione estremamente ampia, così da consentire di parlare indifferentemente di sistemi fisici (come ad esempio "sistema meccanico", "sistema elettrico", "sistema termico"), di "sistemi economici", di "sistemi comportamentali", etc.

### II.2 Modello di un sistema

*Negli studi ingegneristici si è interessati a studiare gli aspetti quantitativi dei sistemi, per cui la definizione qualitativa di sistema data nel paragrafo precedente è inadeguata. Nell'analisi quantitativa, più che al sistema reale in sé, noi siamo interessati a costruirci un suo modello matematico che dia una descrizione matematica del comportamento del sistema reale, o meglio dei legami funzionali che sussistono tra le grandezze d'interesse.*

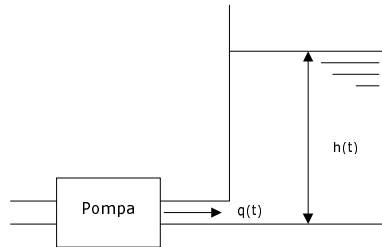
La Teoria dei Sistemi studia i cosiddetti sistemi orientati, nei quali è possibile effettuare una divisione delle grandezze di interesse in due insiemi: i) grandezze che possono variare nel tempo in maniera indipendente dalle altre, dette grandezze d'ingresso o semplicemente *ingressi*; b) grandezze di cui si è interessati a studiare l'evoluzione nel tempo, per le quali è possibile adottare uno schema interpretativo causa-effetto in cui esse appaiono come dipendenti dagli ingressi; esse sono dette grandezze d'uscita o semplicemente *uscite*.

**Esempio 2.1** Nel sistema costituito dall'elemento elastico mostrato in Fig.2.1, avente un estremo collegato ad una parete ed un altro sottoposto ad una forza  $f(t)$ , e di cui si vuole studiare l'andamento temporale della posizione  $s(t)$  dell'estremo libero, si assumerà come ingresso la forza  $f(t)$  e come uscita la posizione  $s(t)$ .



**Figura 2.1** Elemento elastico

**Esempio 2.2** Nel sistema costituito dal serbatoio mostrato in Fig.2.2, alimentato per mezzo di una pompa, e di cui si vuole studiare l'andamento temporale del livello, si assumerà come ingresso la portata volumetrica  $q(t)$  della pompa e come uscita il livello  $h(t)$  del pelo libero.



**Figura 2.2** Serbatoio

E' facile rendersi conto che ad uno stesso sistema fisico possono essere associate diverse grandezze di ingresso e di uscita. Ad esempio nel caso del serbatoio si potrebbe essere interessati a studiare l'andamento nel tempo del volume di liquido nel serbatoio, anziché del livello. Oppure potrebbero interessare entrambe. In generale, pertanto, un sistema reale potrà avere più ingressi e più uscite. Nel seguito indicheremo con:

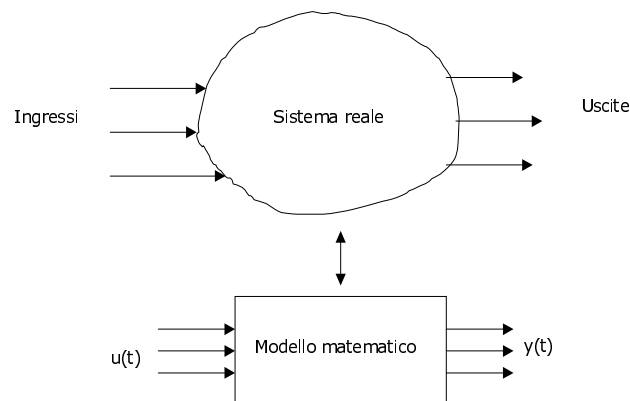
$$u(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]^T \quad (2.1)$$

il vettore degli ingressi, e con

$$y(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]^T \quad (2.2)$$

il vettore delle uscite.

Una volta individuate le grandezze di ingresso e uscita, per la scrittura del modello bisogna individuare i legami funzionali di tipo matematico tra ogni singola uscita e gli ingressi. Tali legami funzionali saranno individuati sulla base delle leggi fisiche (*relazioni costitutive*) che descrivono il fenomeno in studio, e/o sulla base di relazioni di tipo logico.



**Figura 2.3** Sistema e modello

Nella misura in cui il modello ottenuto è in grado di fornirci l'andamento delle variabili di uscita così come nel sistema reale, il modello (che è un oggetto astratto) e il

sistema si confondono e i due termini possono essere usati in maniera intercambiabile (vedi Fig.2.3).

### **II.2.1 Sistemi statici e sistemi dinamici**

Interessiamoci ora di investigare le tipologie di legami funzionali risultanti dalla scrittura delle leggi fisiche per la modellizzazione dei sistemi. Cominciamo col ricavare i legami funzionali tra ingresso e uscita per gli esempi 2.1 e 2.2.

Per l'elemento elastico dell'esempio 2.1, posto  $u(t)=f(t)$  e  $y(t)=s(t)$ , il legame funzionale è:

$$y(t) = \frac{1}{k} u(t) \quad (2.3)$$

dove  $k$  è la costante elastica della molla.

Per il serbatoio dell'esempio 2.2, posto  $u(t)=q(t)$  e  $y(t)=h(t)$ , detta  $S$  la superficie di base del serbatoio (supposto cilindrico), il legame funzionale è:

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{S} u(t) \quad (2.4)$$

Il confronto tra questi due modelli mette in evidenza uno degli aspetti principali secondo cui vengono classificati i sistemi.

Nel caso dell'elemento elastico il legame funzionale è un legame puramente algebrico: l'uscita in un generico istante  $t$  dipende solo dal valore dell'ingresso nello stesso istante, e il sistema non ha memoria dei valori dell'ingresso negli istanti precedenti. Sistemi di questo tipo sono detti *Sistemi statici*.

Nel caso del serbatoio, il legame funzionale è un'equazione differenziale: in tal caso ci si convince facilmente che l'uscita in un generico istante  $t$  dipende anche dai valori passati dell'ingresso. Infatti:

$$y(t) = y(t_0) + \frac{1}{S} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

per cui l'uscita all'istante  $t$  dipende dal livello iniziale  $y(t_0)$  e dai valori assunti dalla portata nell'intervallo  $[t_0, t]$ , e quindi il sistema ha memoria della storia passata. Sistemi di questo tipo sono detti *Sistemi dinamici*.

In questo corso l'attenzione sarà posta principalmente sui sistemi dinamici.

## **II.3 Modelli ingresso-stato-uscita (i-s-u) di sistemi dinamici**

### **II.3.1 Il concetto di stato**

Poiché in un sistema dinamico l'uscita  $y(t)$  in un generico istante  $t$  dipende anche dai valori passati dell'ingresso, è evidente che se siamo interessati a calcolare l'uscita in un intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  non è sufficiente conoscere i valori dell'ingresso  $u(t)$  in tale intervallo. Ci chiediamo allora qual è l'informazione che ci manca per risolvere il problema.

Torniamo al problema del serbatoio discusso nell'esempio 2.2 e descritto dal modello (2.4). Prima di ricorrere alla matematica, facciamo qualche considerazione pratica. Risulta evidente che per calcolare in maniera univoca il livello del serbatoio in un dato intervallo di tempo  $[t_0, t_f]$  non è sufficiente assegnare la portata d'ingresso in tale intervallo. L'informazione mancante è rappresentata dal livello iniziale all'istante  $t_0$ . Da un punto di vista matematico questo è confermato dal fatto che, essendo la (2.4) un'equazione differenziale del primo ordine, per avere una soluzione unica abbiamo bisogno di assegnare la condizione iniziale dell'uscita.

Ovviamente, essendo noi interessati a studiare sistemi anche diversi da quelli rappresentati da equazioni differenziali del tipo (2.4), abbiamo bisogno di introdurre un concetto di "informazione sulla situazione iniziale del sistema" più ampio di quello rappresentato dalle condizioni iniziali di un'equazione differenziale. Questo ci porta a introdurre il concetto di "stato" di un sistema.

**Definizione.** Lo *stato* di un sistema in un generico istante  $t_0$  è l'informazione all'istante  $t_0$  necessaria per poter calcolare univocamente l'uscita  $y(t)$ , per ogni  $t \geq t_0$ , una volta assegnato l'ingresso  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ .

Anche lo stato, così come l'ingresso e l'uscita, è in generale un vettore che denoteremo con  $x(t)$ . Le componenti di tale vettore,  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , sono chiamate *variabili di stato*.

### II.3.2 Definizione formale di sistema e modello implicito i-s-u

Avendo introdotto il concetto di stato, vediamo se sulla base di tale concetto è possibile definire una struttura di modello matematico che sia sufficientemente generale da consentirci di rappresentare in un contesto unico tutti, o almeno la maggior parte, dei sistemi di interesse.

L'idea di base nella definizione di tale struttura è quella di descrivere un sistema attraverso due equazioni, in generale di tipo vettoriale:

- la prima, detta *equazione di stato*, specifica, in maniera implicita, l'evoluzione dello stato  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$  una volta dato lo stato iniziale  $x(t_0)$  e l'ingresso  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ ;
- la seconda, detta *trasformazione d'uscita*, specifica il valore assunto dall'uscita in un generico istante  $t$  una volta dati il valore dello stato  $x(t)$  e dell'ingresso  $u(t)$  nello stesso istante.

Prima di definire tali funzioni, allo scopo di estendere al maggior numero possibile di sistemi reali la struttura di modello in questione, generalizziamo la tipologia di segnali di ingresso, uscita e stato rispetto a quella finora considerata, mantenendo tuttavia inalterato il loro significato.

#### Definizioni.

- Le grandezze di *ingresso*, *stato* e *uscita* di un sistema sono in generale dei *segnali* o funzioni  $s(t)$ , di tipo scalare o vettoriale, di una variabile  $t$  detta tempo.
- La variabile tempo  $t$  potrà assumere valori in un sottoinsieme ordinato  $T \subseteq \mathbb{R}$  detto *insieme dei tempi*. Tale insieme può essere costituito da valori continui, ad esempio  $T = \{t \in \mathbb{R}, t_0 \leq t \leq t_f\}$ , oppure da valori discreti, ad esempio  $T = \{\dots, t_{-k}, \dots, t_0, \dots, t_k, \dots\}$ .

- Un *segnale*  $s(t)$  è detto a *tempo continuo* se  $T$  è un insieme continuo. In caso contrario è detto a *tempo discreto*, oppure *numerico*, oppure *digitale*.
- I valori assunti dai segnali  $s$  in un generico istante  $t$  potranno essere numeri (o vettori di numeri) reali, livelli logici, o elementi di un insieme numerabile.
- Un *segnale*  $s(t)$  è detto *deterministico* quando il suo valore in un generico istante  $t$  è noto con certezza; in caso contrario è detto *stocastico* o *aleatorio*.

Introduciamo ora le seguenti notazioni.

### Notazioni.

- $s(\cdot)$  indica l'intero segnale  $s$  definito su tutto l'insieme dei tempi;
- se  $s$  è un segnale tempo continuo,  $s(t)$  indica il suo valore all'istante  $t$  ;
- se  $s$  è un segnale tempo continuo ed inoltre è derivabile,  $\dot{s}(t)$  indica il valore della sua derivata prima all'istante  $t$  ;
- se  $s$  è un segnale tempo discreto,  $s(t_k)$  o semplicemente  $s_k$  indica il valore assunto all'istante  $t_k$ , mentre  $s(t_{k+1})$  (o  $s_k'$ ) indica il valore prossimo;
- $s_{[t_i, t_f]}$  indica la restrizione del segnale (o segmento del segnale)  $s$  all'intervallo aperto a destra  $[t_i, t_f)$ .

Possiamo ora dare la definizione formale di sistema astratto orientato.

**Definizione di Sistema.** Dato un sottoinsieme  $T$  di  $R$ , un insieme  $\mathcal{U}$ , detto insieme delle funzioni di ingresso, di funzioni  $u(\cdot)$  definite in  $T$  e a valori in un insieme  $U$  (a volte  $U_{t,x}$  in quanto dipendente dall'istante  $t$  e dallo stato  $x$ ), detto insieme dei valori di ingresso, un insieme  $Y$  di valori di  $y(t)$ , detto insieme dei valori di uscita, un insieme  $X$  di valori di  $x(t)$ , detto insieme dei valori di stato, è detto sistema la coppia di equazioni:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.6a)$$

$$y(t) = \eta(x(t), u(t), t) \quad (2.6b)$$

se l'insieme dei tempi è continuo;

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k), \quad x_{k_0} = x_0 \quad (2.7a)$$

$$y_k = \eta(x_k, u_k, k) \quad (2.7b)$$

se l'insieme dei tempi è discreto.

Nel seguito i sistemi in cui l'insieme dei tempi  $T$  è un insieme continuo li chiameremo *sistemi a tempo continuo*; quelli in cui l'insieme  $T$  è discreto li chiameremo *sistemi a tempo discreto*.

Le equazioni (2.6) (risp. (2.7)) prendono il nome di *modello implicito ingresso-stato-uscita* di un sistema a tempo continuo (risp. a tempo discreto). L'equazione (2.6a) (risp. (2.7a)) è detta *equazione di stato*, e la funzione  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$  è detta *funzione generatrice* (risp. *funzione stato prossimo*); l'equazione (2.6b) (risp. (2.7b)) è detta *equazione d'uscita*, e la funzione  $\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$  è detta *trasformazione d'uscita*. Un modello implicito i-s-u viene anche sinteticamente indicato con la tripla  $(X, f, \eta)$ .

Come si può facilmente osservare, effettivamente, così come ci eravamo riproposti di fare, l'equazione differenziale (2.6a) se il sistema è a tempo continuo, oppure l'equazione alle ricorrenze (2.7a) se il sistema è a tempo discreto, specifica, in maniera implicita, l'evoluzione dello stato  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$ , una volta dato lo stato iniziale  $x(t_0)$  e l'ingresso  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ . La trasformazione d'uscita, viceversa, specifica il valore assunto dall'uscita in un generico istante  $t$  sulla base dei valori assunti, nello stesso istante, dallo stato e dall'ingresso.

E' importante osservare che, nel caso in cui lo stato  $x$  è un vettore di dimensione  $n$  anche la funzione generatrice  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$  è costituita da un vettore di  $n$  funzioni scalari. Allo stesso modo, se l'uscita  $y$  è un vettore di dimensione  $m$  anche la funzione generatrice  $\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$  è costituita da un vettore di  $m$  funzioni scalari. Pertanto, assumendo che anche l'ingresso  $u$  sia un vettore di dimensione  $r$ , la scrittura estesa del modello (2.6) è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t), & x_1(t_0) = x_{10} \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t), & x_n(t_0) = x_{n0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = \eta_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \dots\dots\dots \\ y_m(t) = \eta_m(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \end{cases}$$

### **Tipi particolari di sistemi dinamici.**

Nello studio dei sistemi di controllo si fa spesso riferimento ai seguenti tipi particolari di sistemi dinamici.

- Sistemi con un solo ingresso e una sola uscita, detti anche *sistemi SISO* (Single Input Single Output)
- Sistemi con più ingressi e più uscite, detti anche *sistemi MIMO* (Multi Input Multi Output)
- Sistemi in cui la trasformazione d'uscita non dipende da  $u(t)$  (risp.  $u_k$ ), ossia:

$$y(t) = \eta(x(t), t);$$

tali sistemi sono detti *sistemi puramente dinamici* o *strettamente propri* o *macchine di Moore* (*sistemi propri* o *macchine di Mealy* in caso contrario).

- Sistemi in cui la trasformazione d'uscita non dipende da  $x(t)$  (risp.  $x_k$ ), ossia:

$$y(t) = \eta(u(t), t);$$

tali sistemi, che sono *sistemi statici*, sono anche detti *sistemi algebrici* o *sistemi combinatori*.

### **II.3.3 Il processo di costruzione di un modello e la scelta delle variabili di stato**

La costruzione di un modello i-s-u viene effettuata in quattro passi successivi:



1. Individuazione delle variabili di ingresso e uscita;
2. Scelta delle variabili di stato;
3. Scrittura delle relazioni costitutive;
4. Elaborazione delle relazioni costitutive per pervenire alla scrittura dell'equazione di stato e della trasformazione di uscita.

Di tali operazioni, quella da effettuare con una certa attenzione è quella della scelta delle variabili di stato. Essa è in genere, un'operazione abbastanza delicata per i seguenti motivi: a) la scelta delle variabili di stato è fortemente legata alla tipologia del sistema in studio e, talvolta, richiede una maturata esperienza operativa su di esso; b) la scelta delle variabili di stato non è unica, per cui esistono più modelli associati ad uno stesso sistema; c) il numero delle variabili di stato dipende dalla maggiore o minore accuratezza con cui si vuole descrivere il comportamento del sistema in studio; d) il numero delle variabili di stato non può essere fissato a priori, per cui si possono anche porre questioni di ridondanza. Se tuttavia si fa riferimento al significato generale di "stato", si possono individuare delle linee guida da seguire nella scelta delle variabili di stato, almeno nel caso di sistemi semplici.

Lo stato, come detto in precedenza, rappresenta l'informazione necessaria in un generico istante per poter calcolare l'evoluzione futura dell'uscita una volta assegnato l'ingresso. Esso pertanto deve descrivere la "situazione interna" del sistema in un generico istante vista come conseguenza della storia passata del sistema stesso. Nella scelta delle variabili di stato del sistema bisogna pertanto orientarsi verso quelle variabili il cui valore può essere considerato come descrittivo della "memoria" del sistema.

Nel caso di sistemi fisici, la situazione interna di un sistema è tipicamente descritta dall'energia in esso immagazzinata nelle varie forme. Ovviamente noi dovremo portare in conto solo quelle forme di energia le quali subiscono variazioni nel tempo in conseguenza degli ingressi che agiscono sul sistema. Così, ad esempio, nel caso di sistemi meccanici orienteremo la nostra scelta verso le variabili di posizione verticale di elementi di massa (legate all'energia potenziale gravitazionale), di velocità di elementi di massa (legate all'energia cinetica), di posizione delle estremità di elementi elastici (legate all'energia potenziale di natura elastica). Nel caso di sistemi elettrici considereremo le tensioni ai capi di condensatori (legate all'energia elettrostatica in essi immagazzinata), le correnti negli induttori (legate all'energia magnetica in essi immagazzinata). Nel caso di un serbatoio contenente un liquido, e nel quale si hanno come ingressi portate entranti e/o uscenti di liquido nel serbatoio, considereremo come variabile di stato il livello di liquido (legato all'energia potenziale gravitazionale del liquido stesso). Nel caso di sistemi termici, considereremo le temperature dei corpi; queste danno infatti una misura dell'energia termica in essi immagazzinata.

Nel caso di sistemi non descritti da leggi fisiche, ad esempio calcolatori, sistemi di comunicazione, sistemi di produzione, etc., per la scelta delle variabili di stato non si hanno regole generali, per cui, oltre all'esperienza e alla conoscenza del sistema in studio, diventa importante disporre di metodologie che consentano di verificare se un insieme di variabili possa essere assunto come stato e, nello stesso tempo, che tale insieme non sia ridondante.

Nel paragrafo 2.4 illustreremo tali concetti con una serie di esempi.

### II.3.4 Modello esplicito i-s-u

Assumendo, così come si dimostra essere vero in molte situazioni di interesse pratico, che la soluzione della (2.6a) o della (2.7a) esista e sia unica, è facile convincersi che essa può essere messa nella forma:

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}) \quad (2.8)$$

nel caso tempo continuo, e nella forma:

$$x_k = \varphi(k, k_0, x_0, u_{[k_0, k)}) \quad (2.9)$$

nel caso tempo discreto. La funzione  $\varphi$  (o più precisamente il funzionale  $\varphi$ , dal momento che esso dipende da un segmento di funzione) è detta *funzione di transizione dello stato*. Le (2.8), (2.6b) (risp. le (2.9), (2.7b)) prendono il nome di *modello (o rappresentazione) esplicito ingresso-stato-uscita* del sistema a tempo continuo (risp. a tempo discreto). Un modello esplicito i-s-u viene anche sinteticamente indicato con la tripla  $(X, \varphi, \eta)$ .

## II.4 Classificazione dei sistemi

I sistemi dinamici vengono classificati sulla base delle proprietà delle funzioni rappresentative del modello ( $f$  e  $\eta$ , oppure  $\varphi$  e  $\eta$ ), le quali a loro volta vengono diversificate in base al tipo di tecniche utilizzabili per risolvere i problemi di analisi del comportamento.

### II.4.1 Sistemi a tempo continuo e a tempo discreto

Una prima classificazione viene fatta, come già detto in precedenza, sulla base della natura dell'insieme dei tempi  $T$ .

**Definizione.** I sistemi in cui l'insieme dei tempi  $T$  è un insieme continuo sono detti *sistemi a tempo continuo*; quelli in cui l'insieme  $T$  è discreto sono detti *sistemi a tempo discreto*.

Prima di fare alcuni esempi, si richiama l'attenzione sul fatto che i fenomeni fisici evolvono tutti nel tempo continuo, per cui le leggi fisiche che li descrivono, e di conseguenza i modelli matematici, sono formulate nel tempo continuo. I modelli a tempo discreto, viceversa, vengono utilizzati per descrivere le seguenti categorie di sistemi:

- sistemi che effettivamente evolvono in maniera tempo discreta, come i calcolatori, in cui i contenuti dei registri interni, delle locazioni di memoria, ... variano solo in corrispondenza di certi istanti (talvolta scanditi da un clock interno);
- sistemi che, pur evolvendo nel tempo continuo, vengono in genere descritti con delle leggi di evoluzione che prevedono variazioni delle grandezze solo alla "fine" di periodi di tempo di lunghezza finita (minuti, ore, giorni, anni), come ad esempio sistemi di tipo economico, gestionale, ambientale, sociologico;
- sistemi che, pur essendo per loro natura di tipo continuo, vengono comandati con segnali di ingresso che cambiano valore solo in corrispondenza di fissati istanti di tempo, come ad esempio i sistemi comandati da un calcolatore.

In tali sistemi il tempo reale può essere pensato come suddiviso in una sequenza di intervalli definiti da una sequenza di istanti  $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$  i quali diventano gli istanti significativi per la valutazione delle variabili di uscita. L'intervallo di tempo  $[t_k, t_{k+1})$  è detto intervallo di campionamento, mentre la sua ampiezza  $T = t_{k+1} - t_k$ , spesso costante, è detta periodo di campionamento.

**Esempio 2.3 Serbatoio con valvola di prelievo.** Si consideri il serbatoio cilindrico, con superficie di base  $S$ , mostrato in Fig.2.3, in cui è presente una valvola di prelievo sul fondo. Si vuole studiare l'andamento del volume  $V(t)$  di liquido in esso contenuto al variare della portata volumetrica di liquido in ingresso  $q_i(t)$  nell'ipotesi di apertura costante della valvola di prelievo.

Anzitutto si pone  $u(t) = q_i(t)$ , e  $y(t) = V(t)$ .

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo 2.3.3 possiamo scegliere come variabile di stato il livello del liquido, e quindi porre  $x(t) = h(t)$ . Ovviamente una possibilità alternativa è quella di scegliere come variabile di stato direttamente il volume  $V(t)$ ; infatti, essendo nota la geometria del serbatoio, tale variabile ha lo stesso contenuto d'informazione del livello.

Le relazioni costitutive sono fornite dall'equazione di continuità:

$$\frac{dV}{dt} = q_i(t) - q_u(t)$$

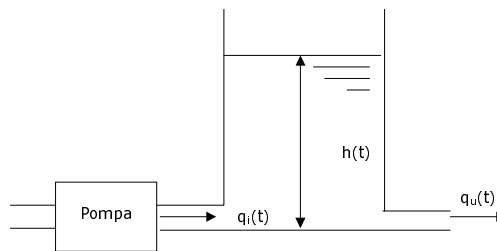
e dalla relazione che fornisce la portata d'uscita attraverso la valvola di prelievo; tale portata dipende dall'altezza del liquido nel serbatoio secondo un legame del tipo:

$$q_u(t) = k\sqrt{h(t)}$$

nel caso di moto turbolento del fluido attraverso la valvola di prelievo, oppure

$$q_u(t) = kh(t)$$

nel caso di moto laminare, ove  $k$  è una costante che dipende dalla geometria e dalla luce di apertura della valvola di prelievo.



**Figura 2.3** Serbatoio con valvola di prelievo

Facendo l'ipotesi di moto turbolento, con semplici manipolazioni delle relazioni costitutive possiamo ottenere un modello implicito i-s-u nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{k}{S}\sqrt{x(t)} + \frac{1}{S}u(t) \\ y(t) &= Sx(t) \end{aligned}$$

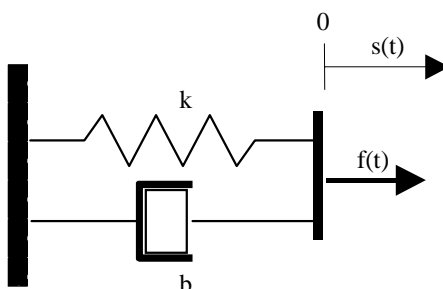
Questo sistema, come si vede, è tempo continuo. Inoltre esso è di tipo SISO ed è strettamente proprio (o puramente dinamico).

**Esempio 2.4** *Sistema molla-smorzatore.* Si consideri il sistema molla-smorzatore mostrato in Fig.2.4, che potrebbe rappresentare la sospensione di un autoveicolo. Sia  $k$  il coefficiente elastico della molla e  $b$  il coefficiente di attrito viscoso dello smorzatore. Si vuole studiare l'andamento dello spostamento  $s(t)$  dell'estremo libero dei due elementi al variare della forza applicata  $f(t)$ .

Si pone  $u(t)=f(t)$ , e  $y(t)=s(t)$ .

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo 2.3.3 possiamo scegliere come variabile di stato la posizione dell'elemento libero della molla, e quindi porre

$$x(t)=s(t).$$



**Figura 2.4** Sistema molla-smorzatore

La relazione costitutiva è fornita dall'equazione di equilibrio delle forze:

$$f(t) = ks(t) + b \frac{ds}{dt}$$

Il modello implicito i-s-u è il seguente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{k}{b}x(t) + \frac{1}{b}u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Il sistema è tempo continuo. Inoltre esso è di tipo SISO ed è strettamente proprio.

**Esempio 2.5** *Ammortamento di un capitale.* Si consideri il processo di ammortamento di un capitale  $C_0$  mediante rate semestrali. In tale processo si può considerare come ingresso la rata semestrale  $r(k)$  da pagare alla fine del semestre k-esimo, e come uscita il capitale residuo  $C(k)$  da restituire, calcolato all'inizio del k-esimo semestre.

Si pone  $u(k)=r(k)$ , e  $y(k)=C(k)$ .

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in questo caso si intuisce che l'informazione da portare in conto per poter calcolare il capitale residuo da un certo semestre in poi è proprio il capitale da restituire all'inizio del semestre in questione, per cui come stato assumeremo  $x(k)=C(k)$ .

Nella scrittura delle relazioni costitutive bisogna anche portare in conto l'interesse che matura, ad ogni semestre, sul capitale residuo. Pertanto, detto  $I$  il tasso di interesse annuale (supposto costante), si ha:

$$C(k+1) = C(k) + \frac{I}{2}C(k) - r(k)$$

Pertanto il modello implicito è:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (1 + I/2)x(k) - u(k), & x(k_0) &= C_0 \\ y(k) &= x(k) \end{aligned}$$

Il sistema è tempo discreto, SISO e strettamente proprio.

**Esempio 2.6** *Dinamica di una popolazione con risorse illimitate.* Si consideri il processo di crescita, su base annuale, di una popolazione nell'ipotesi di risorse ambientali illimitate. Supponendo che ogni anno vi sia un flusso migratorio che comporta una variazione di  $m(k)$  individui, si vuole calcolare l'evoluzione del numero di individui  $P(k)$ , calcolati all'inizio di ogni anno, nell'ipotesi di avere un tasso di natalità di  $N$  e un tasso di mortalità  $M$ .

Si pone  $u(k)=m(k)$ , e  $y(k)=P(k)$ .

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in questo caso si potrà assumere  $x(k)=P(k)$ .

La relazione costitutiva è:

$$P(k+1) = P(k) + m(k) + NP(k) - MP(k)$$

Pertanto il modello implicito è:

$$x(k+1) = (1 + N - M)x(k) - u(k)$$

$$y(k) = x(k)$$

Il sistema è tempo discreto, SISO e strettamente proprio.

**Esempio 2.7** *Dinamica di una popolazione con risorse limitate.* Il problema è analogo a quello precedente, salvo il fatto che, essendo le risorse limitate, il tasso di mortalità  $M$  dipenderà verosimilmente dalla popolazione stessa e quindi varia di anno in anno, ossia:  $M(k)=M(y_k)$ . In quest'esempio assumeremo:  $M(k)=my_k$ .

Con semplici passaggi si vede che il modello implicito avrà la forma seguente:

$$x(k+1) = (1 + N)x(k) - mx(k)^2 + u(k)$$

$$y(k) = x(k)$$

Il sistema è tempo discreto, SISO e strettamente proprio.

## II.4.2 Sistemi invarianti e varianti nel tempo

**Definizione.** Un sistema è detto tempo-invariante o stazionario se traslando nel tempo l'ingresso, a parità di stato iniziale, trasla anche lo stato e l'uscita.

E' facile verificare che se le funzioni  $f$  e  $\eta$  sono indipendenti dal tempo il sistema è stazionario. In tal caso il modello implicito i-s-u assume la forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = \eta(x(t), u(t))$$

nel caso tempo continuo, e:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

$$y_k = \eta(x_k, u_k)$$

nel caso tempo discreto. Sulla base della definizione, inoltre, si intuisce facilmente che in un sistema stazionario la funzione di transizione  $\varphi$  della rappresentazione esplicita i-s-u non dipende separatamente dall'istante attuale  $t$  e da quello iniziale  $t_0$ , bensì dalla differenza  $t-t_0$ , ossia solo dal tempo intercorso tra l'istante iniziale e quello attuale.

I sistemi considerati negli esempi 2.3 - 2.7 sono tutti sistemi stazionari.

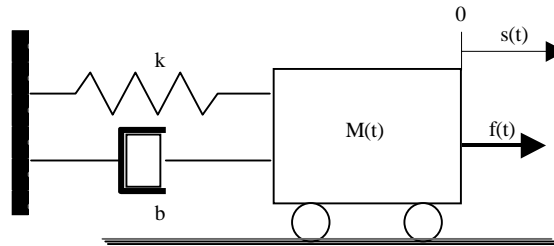
Vediamo ora un esempio di sistema non stazionario.

**Esempio 2.8** *Sistema massa-molla-smorzatore con massa tempo variante.* Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore mostrato in Fig.2.5, in cui la massa del carrello (supposto puntiforme) varia nel tempo. Si vuole studiare l'andamento nel tempo della posizione del carrello.

Si pone  $u(t)=f(t)$ , e  $y(t)=s(t)$ .

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo 2.3.3 possiamo scegliere come variabili di stato la posizione  $s(t)$  e la velocità  $v(t)$  del carrello, e quindi porre:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$



**Figura 2.5** Sistema massa-molla-smorzatore

La relazione costitutiva è fornita dalla legge di conservazione della quantità di moto:

$$\frac{d(mv)}{dt} = -ks(t) - b \frac{ds}{dt} + f(t)$$

Con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m(t)} x_1(t) - \frac{b}{m(t)} x_2(t) - \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} x_2(t) + \frac{1}{m(t)} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Come si vede, i coefficienti (o parametri) della funzione  $f$  variano nel tempo: il sistema è quindi non stazionario. Esso, inoltre, è tempo continuo, SISO e strettamente proprio. E' da notare inoltre che, in questo caso, la dimensione del sistema (numero delle variabili di stato) è pari a 2.

### II.4.3 Sistemi lineari e nonlineari

La definizione di sistema lineare fa riferimento a proprietà che riguardano combinazioni lineari degli ingressi, degli stati e delle uscite. Pertanto essa può essere data solo con riferimento a sistemi in cui gli insiemi dei valori di ingresso  $U$ , stato  $X$  e uscita  $Y$  sono spazi vettoriali. Sistemi che godono di questa proprietà sono detti *Sistemi a stato vettore*.

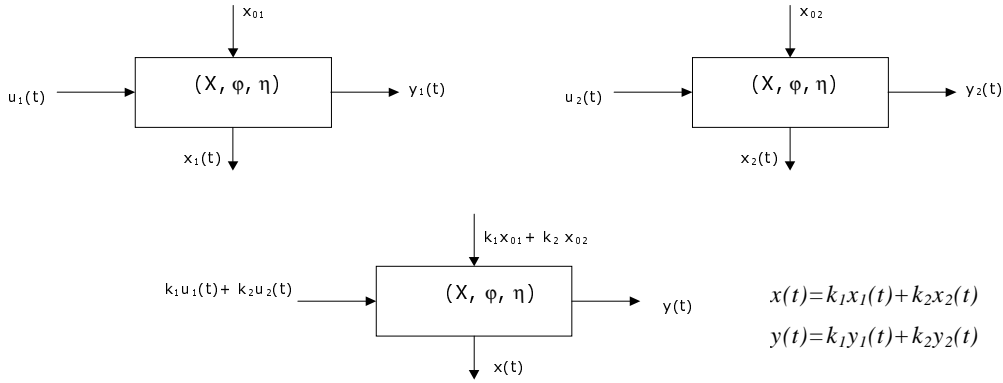
**Definizione.** Un sistema a stato vettore si dice *lineare* se ad una combinazione lineare di ingressi e stati iniziali, secondo gli stessi coefficienti, corrisponde la combinazione lineare, sempre secondo gli stessi coefficienti, degli andamenti dello stato e dell'uscita.

Poiché la definizione fa riferimento all'andamento dello stato, ossia ai valori assunti dallo stato nel tempo, essa va espressa matematicamente mediante la funzione di transizione di stato  $\phi$ , oltre che con la trasformazione di uscita  $\eta$ . In particolare la condizione di linearità si esprime come segue:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \varphi(t, t_0, k_1 x_{01} + k_2 x_{02}, k_1 u_{1[t_0, t)} + k_2 u_{2[t_0, t)}) \\
&\quad k_1 \varphi(t, t_0, x_{01}, u_{1[t_0, t)}) + k_2 \varphi(t, t_0, x_{02}, u_{2[t_0, t)})
\end{aligned} \tag{2.10a}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \eta(t, k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t), k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t)) \\
&\quad k_1 \eta(t, x_1(t), u_1(t)) + k_2 \eta(t, x_2(t), u_2(t))
\end{aligned} \tag{2.10b}$$

Sulla base di questa definizione si conclude che, quando in un sistema lineare si vuole calcolare l'andamento dello stato e/o dell'uscita corrispondente ad una combinazione lineare di ingressi e di stati iniziali secondo gli stessi coefficienti, si possono calcolare separatamente gli andamenti di stato e uscita corrispondenti alle due coppie stato iniziale-ingresso, e poi combinarle linearmente secondo gli stessi coefficienti. Il principio è illustrato graficamente in Fig.2.6. Questa proprietà va anche sotto il nome di *Principio di sovrapposizione degli effetti*.



**Figura 2.6** Illustrazione del principio di sovrapposizione degli effetti

Con riferimento alla rappresentazione implicita i-s-u, è possibile dimostrare che un sistema è lineare se e solo se le funzioni  $f$  e  $\eta$  sono combinazioni lineari delle variabili di stato e di ingresso, ossia:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \dots + b_{1r}u_r(t), t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \dots + b_{nr}u_r(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = c_{11}x_1(t) + \dots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + \dots + d_{1r}u_r(t), t) \\ \dots \\ y_m(t) = c_{m1}x_1(t) + \dots + c_{mn}x_n(t) + d_{m1}u_1(t) + \dots + d_{mr}u_r(t), t) \end{cases}$$

Pertanto  $f$  e  $\eta$  possono anche essere scritte in forma matriciale come segue:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{2.11a}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{2.11b}$$

ove  $u \in R^r$ ,  $y \in R^m$ ,  $x \in R^n$ , e le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  hanno dimensione  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $m \times n$ ,  $m \times r$ , rispettivamente. Se tali matrici sono costanti nel tempo, il sistema è anche stazionario. La dimensione  $n$  del vettore di stato è detta *ordine del sistema*.

I sistemi degli Esempi 2.3 e 2.7 sono nonlineari. I sistemi degli Esempi 2.4, 2.5, 2.6 sono lineari e stazionari.

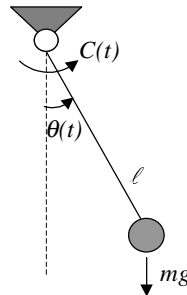
**Esempio 2.9** *Sistema massa-molla-smorzatore con massa costante.* Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore discusso nell'Esempio 2.8. Esso è un sistema lineare e non stazionario la cui rappresentazione matriciale è:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m(t)} & -\left(\frac{b + \dot{m}(t)}{m(t)}\right) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m(t)} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t) \end{aligned}$$

Se la massa del carrello è costante nel tempo, il sistema risulta anche stazionario, e la sua rappresentazione matriciale diventa:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t) \end{aligned}$$

**Esempio 2.10** *Pendolo.* Si consideri il pendolo semplice mostrato in Fig.2.7 costituito da una sfera di massa  $m$  collegata per mezzo di un'asta rigida, di lunghezza  $\ell$  e priva di massa, ad una cerniera. Supponendo che sulla cerniera agisca una coppia motrice  $C(t)$  si vuole studiare l'andamento nel tempo dell'energia cinetica  $E(t)$  della sfera.



**Figura 2.7** Pendolo

Si pone  $u(t) = C(t)$ , e  $y(t) = E(t)$ .

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo 2.3.3, possiamo scegliere come variabili di stato la posizione angolare  $\theta(t)$  e la velocità angolare  $\omega(t)$  del pendolo, e quindi porre:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

Detto  $J$  il momento di inerzia della sfera rispetto alla cerniera (centro di rotazione), dato da  $J = m\ell^2$ , e  $g$  l'accelerazione di gravità, le relazioni costitutive sono fornite dalla legge di Newton, che nel caso di moto rotazionale si scrive:



$$J \frac{d\omega}{dt} = -mg\ell \sin\theta + C(t)$$

e dalla espressione dell'energia cinetica, ossia

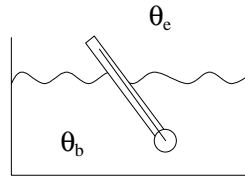
$$E(t) = \frac{1}{2} J \omega(t)^2$$

Con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1(t)) + \frac{1}{J} u(t) \\ y(t) &= \frac{1}{2} J x_2^2(t)\end{aligned}$$

Il sistema risultante è a tempo continuo, nonlineare, del secondo ordine, stazionario, SISO, strettamente proprio.

**Esempio 2.11 Termometro.** Si consideri il termometro a mercurio, con contenitore in vetro sottile mostrato in Fig.2.8. Supponiamo che tale termometro, inizialmente a temperatura ambiente  $\theta_e$ , venga immerso in una vasca contenente un liquido a temperatura  $\theta_b(t)$  variante nel tempo. Si vuole studiare l'andamento nel tempo della temperatura  $\theta(t)$  del termometro.



**Figura 2.8** Termometro a mercurio

Si pone  $u(t) = \theta_b(t)$ , e  $y(t) = \theta(t)$ .

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo 2.3.3, possiamo scegliere come variabili di stato la stessa temperatura  $\theta(t)$  del termometro, per cui  $x(t) = \theta(t)$ .

Detta  $C$  la capacità termica del termometro (data dal prodotto del calore specifico del mercurio per la massa di mercurio) e  $K$  il coefficiente di scambio termico tra liquido e termometro (dato dal prodotto della conducibilità termica del vetro per la superficie di scambio termico e diviso lo spessore del vetro), le relazioni costitutive sono fornite dall'equazione di bilancio termico:

$$C \frac{d\theta}{dt} = q(t)$$

dove  $q(t)$  è la quantità di calore che, in un'unità di tempo, dal liquido si trasferisce al termometro, e dall'espressione di  $q(t)$ , data da:

$$q(t) = K(\theta_b(t) - \theta(t))$$

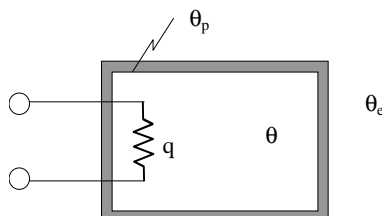
Con semplici manipolazioni delle relazioni costitutive, si ottiene un modello implicito i-s-u nella forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{K}{C} x(t) + \frac{K}{C} u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

Il sistema risultante è a tempo continuo, lineare, del primo ordine, stazionario, SISO, strettamente proprio.

**Esempio 2.12 Forno elettrico.** Si consideri il forno con riscaldamento elettrico mostrato in Fig.2.9. Il fluido (aria) all'interno del forno riceve, dalla resistenza elettrica, una potenza termica  $q(t)$ , ma essendo le pareti del forno non perfettamente adiabatiche, cede all'esterno una potenza termica che dipende dal salto termico tra la temperatura del fluido  $\theta$  e quella dell'ambiente  $\theta_e$ . Si vuole studiare l'andamento nel tempo della temperatura  $\theta(t)$  del fluido nel forno.

Si noti che, in questo sistema, gli ingressi sono sia la potenza termica fornita  $q(t)$ , che è un ingresso manipolabile a piacere, sia la temperatura esterna dell'ambiente  $\theta_e(t)$ , che non è manipolabile: essa viene detta *ingresso di disturbo* o semplicemente *disturbo*.



**Figura 2.9** Forno elettrico

Si pone:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ \theta_e(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \theta(t)$$

Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato, in accordo con quanto detto nel paragrafo 2.3.3, possiamo scegliere come variabili di stato la temperatura di tutti gli elementi in grado di immagazzinare calore. Questi sono il fluido e le pareti del forno. Pertanto, detta  $\theta_p(t)$  la temperatura della parete (supposta uniforme), porremo:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta_p(t) \end{pmatrix}$$

E' da notare che, se ci contentassimo di una minore accuratezza nella descrizione del fenomeno in studio, potremmo ritenere trascurabile la quantità di calore che si accumula nelle pareti rispetto a quella accumulata nel fluido e considerare una sola variabile di stato.

Per quanto riguarda la scrittura delle relazioni costitutive, con la scelta di modellizzazione effettuata dobbiamo considerare sia lo scambio termico tra fluido e parete che quello tra parete e ambiente. Detta  $C$  la capacità termica del fluido,  $C_p$  la capacità termica della parete,  $K_{fp}$  il coefficiente di scambio termico tra fluido e parete,  $K_{pe}$  il coefficiente di scambio termico tra parete e ambiente esterno, le relazioni costitutive sono fornite dalle due equazioni di bilancio termico:

$$C \frac{d\theta}{dt} = -K_{fp}(\theta - \theta_p) + q(t)$$

$$C_p \frac{d\theta_p}{dt} = K_{fp}(\theta - \theta_p) - K_{pe}(\theta_p - \theta_e)$$

Come già si vede, le relazioni costitutive sono tutte espresse in termini di combinazioni lineari delle variabili in gioco. Questo ci fa già intuire che il sistema è lineare, per cui possiamo dare direttamente la sua rappresentazione in forma matriciale. Con manipolazioni standard delle relazioni costitutive, si ottiene:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{K_{fp}}{C} & \frac{K_{fp}}{C} \\ +\frac{K_{fp}}{C_p} & -\frac{K_{fp} + K_{pe}}{C_p} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{K_{pe}}{C_p} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t)$$

Il sistema risultante è a tempo continuo, lineare, del secondo ordine, stazionario, con più ingressi, strettamente proprio.

I sistemi lineari e stazionari, nel seguito indicati come "*Sistemi LTI*" (che sta per Sistemi Lineari e Tempo Invarianti), costituiscono una classe molto importante di sistemi per le seguenti ragioni:

- Molti sistemi reali si possono modellare come sistemi lineari e stazionari;
- La teoria dei sistemi lineari e stazionari è sufficientemente assestata;
- La teoria dei sistemi lineari consente di studiare in modo approssimato anche sistemi nonlineari a stato vettore sotto particolari segnali di ingresso.

#### II.4.4 Automi

Un altro modo di classificare i sistemi è basato sulla natura degli insiemi di valori di ingresso  $U$ , di uscita  $Y$  e di stato  $X$ . Negli esempi considerati finora, tali insiemi sono sempre stati costituiti da vettori di variabili reali, e gli insiemi  $U$ ,  $Y$  e  $X$  sono spazi vettoriali. Come già detto, tali sistemi sono detti *Sistemi a stato vettore*. In essi le equazioni di stato sono normalmente equazioni differenziali o equazioni alle differenze.

In molte applicazioni, viceversa, si ha a che fare con sistemi in cui gli insiemi  $U$ ,  $Y$  sono costituiti da un numero finito di elementi, detti rispettivamente simboli di ingresso e di uscita, e l'insieme  $X$  è anch'esso discreto e al più costituito da una quantità numerabile di elementi, ossia:

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_\rho\} \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_\mu\} \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots\}$$

In tali sistemi lo stato varierà istantaneamente da un valore all'altro nell'istante in cui si manifesta un nuovo simbolo di ingresso. In questo paragrafo noi considereremo sistemi in cui tale istante è scandito da un clock, per cui il sistema è a tempo discreto. Infine assumeremo che le funzioni  $f$  e  $\eta$  non varino nel tempo.

Nel caso in cui l'insieme  $X$  è anch'esso costituito da un numero finito di elementi, il sistema è detto *Automa a stati finiti*.

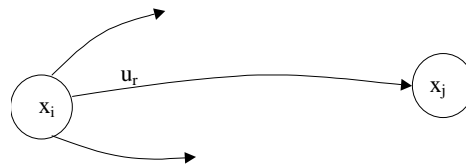
**Definizione.** Un sistema è detto *Automa a stati finiti* o *Sistema a stati finiti* se è a tempo discreto, stazionario, e gli insiemi di valori di ingresso  $U$ , di uscita  $Y$  e di stato  $X$  sono insiemi di cardinalità finita.

In un sistema a stati finiti la funzione generatrice  $f$ , come in tutti i sistemi a tempo discreto, definisce il valore dello stato prossimo a partire dallo stato corrente e dall'ingresso corrente; essa, in questo caso, è anche detta *funzione stato prossimo*. La trasformazione d'uscita definisce l'uscita attuale a partire dallo stato corrente e dall'ingresso corrente. Poiché nei sistemi a stati finiti i pedici vengono utilizzati per individuare simboli degli insiemi di stato, ingresso e uscita, per semplificare le notazioni indicheremo con  $x$  lo stato corrente del sistema, con  $u$  e  $y$  l'ingresso e l'uscita corrente, con  $x'$  lo stato prossimo. Pertanto la rappresentazione standard sarà del tipo:

$$\begin{cases} x' = f(x, u) \\ y = \eta(x, u) \end{cases} \quad (2.12)$$

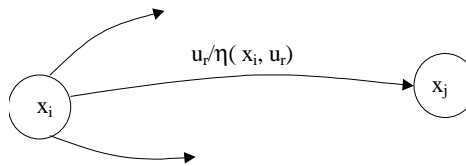
Poiché gli insiemi di ingresso, uscita e stato non sono strutturati algebricamente, anche le funzioni  $f$  e  $\eta$  non sono di tipo algebrico. Essendo tali insiemi costituiti da un numero finito di elementi, un modo frequentemente utilizzato per rappresentare tali funzioni è quello che fa uso di grafi orientati o tabelle.

Nella rappresentazione con grafi, il grafo rappresentante la funzione generatrice, detto anche *grafo di transizione*, si costruisce nel seguente modo: ad ogni simbolo  $x_i$  di stato si associa un nodo del grafo (rappresentato da un cerchietto); se poi esiste almeno un simbolo d'ingresso  $u_r$  che porta il sistema dallo stato  $x_i$  allo stato  $x_j$  si traccia un arco orientato che parte dal nodo  $x_i$  e termina sul nodo  $x_j$  e lo si contraddistingue con il simbolo  $u_r$  (vedi Fig. 2.10).



**Figura 2.10** Particolare di grafo di transizione

Per quanto riguarda la trasformazione d'uscita, tra le varie possibilità di rappresentazione, una delle più utilizzate è quella consistente nello scrivere il valore dell'uscita in corrispondenza di ciascun simbolo di ingresso riportato su un arco (vedi Fig. 2.11). Se invece il sistema è puramente dinamico, ossia l'uscita dipende solo dal valore dello stato, il valore dell'uscita va indicato nel cerchietto associato a ciascun simbolo di stato.



**Figura 2.11** Particolare di grafo di transizione e trasformazione d'uscita per una macchina di Mealy

Un modo alternativo per rappresentare le funzioni  $f$  e  $\eta$  è quello che fa uso di tabelle. Un tipo di tabella molto utilizzata è la cosiddetta *Tabella stato presente - ingresso presente*. Essa è costituita da  $v$  righe (tante quanti sono i simboli di stato) e da  $p$  colonne (tante quanti sono i simboli d'ingresso). Ogni casella della tabella riporta la coppia stato prossimo/uscita presente. Così, se ad esempio alla coppia  $(x_i, u_r)$  corrisponde l'uscita presente  $y_m$  e lo stato prossimo  $x_j$  la tabella si presenterà come in Fig.2.12. Se invece il sistema è puramente dinamico il valore dell'uscita va indicato nella prima colonna, affiancato a ciascun simbolo di stato.

Ovviamente il grafo di transizione ha il vantaggio di dare una visualizzazione più chiara del comportamento del sistema. Per questo motivo esso è più utilizzato nella fase di scrittura del modello. Nell'implementazione al calcolatore, invece, si usa quasi sempre la rappresentazione per mezzo di tabelle.

	$u_l$	.....	$u_r$	.....	$u_p$
$x_l$					
.....					
$x_i$			$x_i/y_m$		
.....					
$x_v$					

**Figura 2.12** Particolare di tabella stato presente - ingresso presente

In molte applicazioni sui sistemi a stati finiti lo stato iniziale  $x_0$  del sistema è fissato una volta per tutte e prende il nome di stato di reset. In questo caso, nella rappresentazione con grafo di transizione, tale stato sarà indicato esplicitamente mediante una freccia che punta sul nodo associato a tale stato; nella rappresentazione con tabelle la freccia punterà alla riga associata allo stato iniziale.

Infine, in alcune applicazioni, come ad esempio i riconoscitori di sequenze di simboli di ingresso, in cui l'uscita può assumere solo due valori (ad esempio 0 e 1, oppure Falso e Vero) e inoltre essa dipende solo dal valore assunto dallo stato (macchina di Moore), si usa talvolta definire un insieme  $F$ , detto *Insieme degli stati finali*, come l'insieme degli stati in cui l'uscita assume il valore 1 (che, nel caso di riconoscitori di sequenze, sta a significare "sequenza identificata"). Tali stati vengono denotati nel grafo di transizione con una colorazione di grigio dei cerchietti corrispondenti.

In conclusione possiamo dare la seguente definizione formale:

**Definizione.** Un automa a stati finiti è definito o mediante una sestupla

$$(U, X, f, x_0, Y, \eta)$$

oppure, nel caso in cui sia assegnato l'insieme degli stati finali, mediante la quintupla

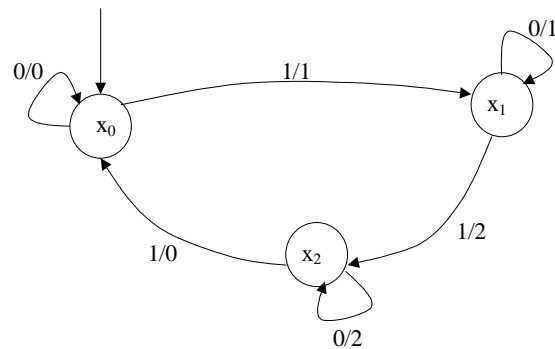
$$(U, X, f, x_0, F).$$

**Esempio 2.13** *Contatore modulo N.* Si vuole scrivere il modello di un contatore modulo N degli 1 di una sequenza di 0 e 1.

Per tale sistema si ha:  $U=\{0,1\}$ ,  $Y=\{0,1,2,\dots,N-1\}$ .

Il sistema dovrà avere N stati: il primo, diciamolo  $x_0$ , "ricorderà" che sono arrivati  $Nk$  impulsi, con  $k=0,1,2,\dots$ ; il secondo,  $x_1$ , "ricorderà" che sono arrivati  $Nk+1$  impulsi; il terzo,  $x_2$ , "ricorderà" che sono arrivati  $Nk+2$  impulsi, e così via. Pertanto:  $X=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ . E' ovvio che tale sistema, per rispondere alla specifica di funzionamento, dovrà avere  $x_0$  come stato iniziale (stato di reset).

Un modello di tale sistema, per il caso  $N=3$ , è riportato in Fig. 2.13.



**Figura 2.13** Grafo di transizione del contatore modulo 3

La rappresentazione dello stesso sistema mediante Tabella stato presente - ingresso presente è riportata in Fig.2.14.

	0	1
$x_0$	$x_0/0$	$x_1/1$
$x_1$	$x_1/1$	$x_2/2$
$x_2$	$x_2/2$	$x_0/0$

**Figura 2.14** Tabella stato presente - ingresso presente del contatore modulo 3

**Esempio 2.14** *Riconoscitore di una stringa.* Si vuole scrivere il modello di una macchina che, ricevendo in ingresso una sequenza di simboli dell'insieme  $\{1,2,3\}$ , riconosca le sequenze ordinate (stringhe) del tipo  $(2,2,3)$ .

Supponendo che l'uscita sia normalmente Falsa, e che diventi Vera quando la stringa viene riconosciuta, per tale sistema avremo:  $U=\{1,2,3\}$ ,  $Y=\{Falso, Vero\}$ .

In tale sistema le situazioni da "ricordare", e quindi le situazioni a cui dobbiamo associare un valore dello stato, sono le seguenti:

$x_0$  l'ultimo simbolo di ingresso arrivato non è significativo per il riconoscimento della stringa;

$x_1$  l'ultimo simbolo di ingresso arrivato è 2 ma non è preceduto da un 2;

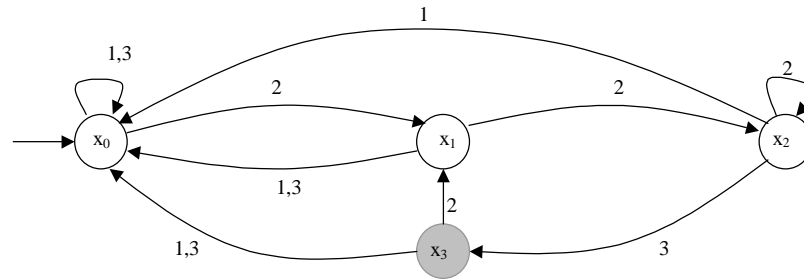
$x_2$  l'ultimo simbolo di ingresso arrivato è 2 ed è preceduto da un 2;

$x_3$  gli ultimi tre simboli di ingresso arrivati sono, in ordine crescente di tempo, 2, 2, 3.

Pertanto:  $X=\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ . E' ovvio che tale sistema, per rispondere alla specifica di funzionamento, dovrà avere  $x_0$  come stato iniziale (stato di reset).

Per tale sistema, inoltre, possiamo adottare la descrizione mediante la quintupla  $(U, X, f, x_0, F)$  con la convenzione di associare agli stati dell'insieme  $F$  il valore di uscita *Vero*. Ovviamente risulta:  $F=\{x_3\}$ .

La rappresentazione mediante grafo di tale sistema è riportata in Fig.15.

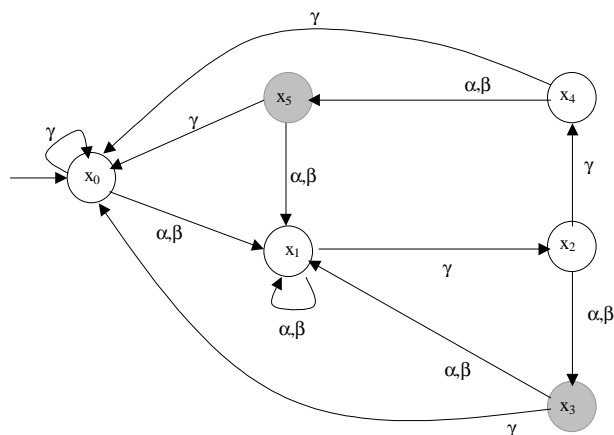


**Figura 2.15** Grafo di transizione del riconoscitore di stringa dell'esempio 2.14

**Esempio 2.15** *Riconoscitore di più stringhe.* Si vuole scrivere il modello di una macchina che, ricevendo in ingresso una sequenza di simboli dell'insieme  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ , riconosca stringhe di 3 o 4 caratteri, che iniziano e terminano con  $\alpha$  o  $\beta$  e contengano al centro solo simboli  $\gamma$ , ossia stringhe appartenenti al seguente insieme  $L = \{\alpha\gamma\alpha, \alpha\gamma\beta, \beta\gamma\alpha, \beta\gamma\beta, \alpha\gamma\gamma\alpha, \alpha\gamma\gamma\beta, \beta\gamma\gamma\alpha, \beta\gamma\gamma\beta\}$ .

Supponendo che l'uscita sia normalmente Falsa, e che diventi Vera quando una delle stringhe assegnate viene riconosciuta, per tale sistema avremo:  $U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ,  $Y = \{Falso, Vero\}$ .

Con semplici ragionamenti e con ovvio significato dei simboli di stato, si vede che una rappresentazione mediante grafo di tale sistema è quella riportata in Fig.16. In esso, come si vede, risulta  $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  e  $F = \{x_3, x_5\}$ .



**Figura 2.16** Grafo di transizione del riconoscitore delle stringhe dell'esempio 2.15

La teoria degli automi è alla base delle tecniche utilizzate per l'analisi e la progettazione di alcune categorie di sistemi di notevole interesse pratico, quali ad esempio quelle dei circuiti numerici e quella dei cosiddetti *Sistemi a Eventi Discreti*. Data la particolarità di tali tecniche, esse costituiscono un corpo teorico a sé che verrà trattato in maniera estensiva nel Cap. 5.