

Franco Quaranta

Complementi di Apparecchiature e Strumenti di Bordo

Napoli, 2005

Nota introduttiva

Gli argomenti che seguono sono da ritenere complementari a quelli presentati nei testi indicati come sussidi didattici di riferimento per il corso di Apparecchiature e Strumenti di Bordo e quindi richiamano elementi, figure, simbologie utilizzate in essi; non rappresentano, pertanto, uno scritto autonomo ed esauriente sugli argomenti che tratta ma un ulteriore aiuto della cui opportunità il docente del corso ha potuto rendersi conto durante lo sviluppo degli argomenti, dalle richieste di spiegazione degli studenti, dalle esposizioni dei candidati durante gli esami, ecc.

Sommario

Radiotecnica

Calcolo dell'angolo di radiazione del dipolo elementare pag. 3

Il radar navale

La riflessione ionosferica pag. 5

Effetti della presenza della superficie del mare sul diagramma di radiazione dell'antenna radar pag. 7

Il guadagno per le antenne dei radar nautici pag. 9

La risoluzione radar

Potere risolutore telemetrico pag. 10

Potere risolutore goniometrico pag. 16

Il GPS

La determinazione del punto GPS pag. 18

Il segnale e la decodifica pag. 19

Sussidi didattici

pag. 22

RADIOTECNICA

Calcolo dell'angolo di radiazione del dipolo elementare

Se indichiamo con:

α	angolo che individua la posizione del punto di osservazione [in coordinate polari – rad]	
$E(\alpha)$	campo elettrico relativo all'elevazione α	[V/m]
E_m	campo elettrico massimo	[V/m]
$P(\alpha)$	potenza irradiata in direzione α	[W/m ²]
P_m	potenza massima	[W/m ²]
ρ	resistività del mezzo	[Ω]
$\bar{\alpha}$	angolo di radiazione	[rad]

il diagramma verticale di radiazione di un dipolo è rappresentabile con l'equazione polare:

$$E(\alpha) = E_m \cos(\alpha)$$

Dal momento che il campo elettrico $E(\alpha)$ è legato alla potenza irradiata dall'espressione:

$$P(\alpha) = \frac{E^2(\alpha)}{2\rho}$$

avremo che:

$$P(\alpha) = \frac{E_m^2 \cos^2(\alpha)}{2\rho} \quad (1)$$

ove il valore massimo della potenza corrisponde al valore unitario del coseno e cioè,

$$P_m = \frac{E_m^2}{2\rho}$$

Per definizione, l'angolo di radiazione $\bar{\alpha}$ è quello al quale la potenza irradiata assume valore pari alla metà di quello massimo, per cui:

$$P(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2} P_m = \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{2\rho} \quad (2)$$

Ma, applicando la (1) per il valore $\bar{\alpha}$, si ha:

$$P(\bar{\alpha}) = \frac{E_m^2 \cos^2(\bar{\alpha})}{2\rho} \quad (3)$$

Confrontando la (2) e la (3) si ha:

$$\cos^2(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2}$$

e quindi:

$$\cos(\bar{\alpha}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\pi}{4}$$

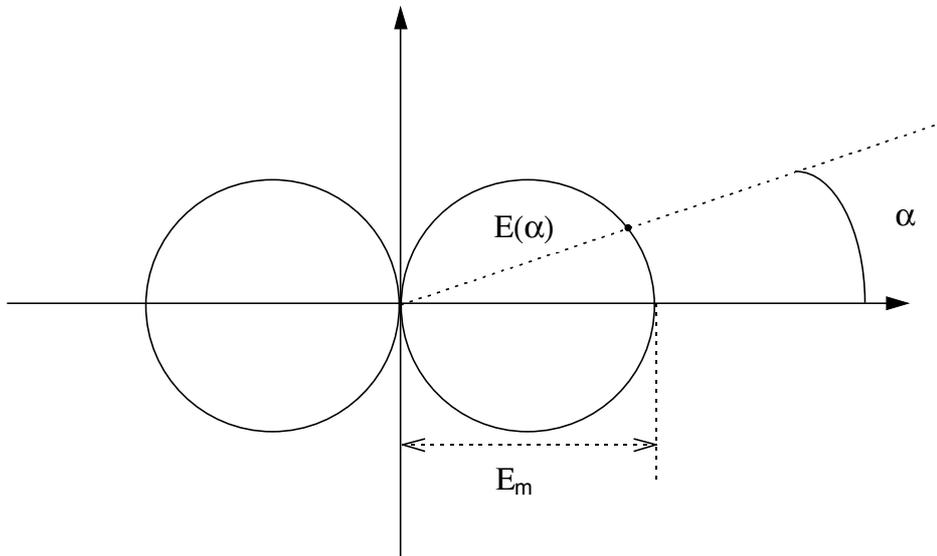


Diagramma di radiazione del dipolo elementare

IL RADAR NAVALE

La riflessione ionosferica

La riflessione ionosferica è regolata dall'espressione:

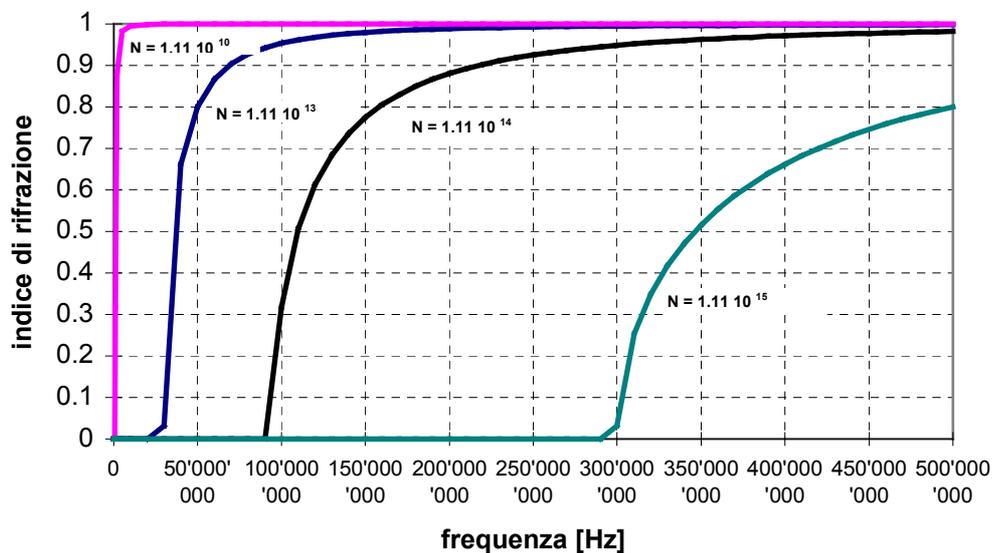
$$n = \sqrt{1 - \frac{81N}{f^2}} \quad (1)$$

tratta dall'espressione di Appleton ove si sono supposte nulle le collisioni tra ioni; in essa:

n indice di rifrazione

N concentrazione ionica nello strato interessato alla trasmissione [elettroni/m³]

f frequenza della trasmissione [Hz]



Nel grafico è rappresentata l'equazione (1) per alcuni valori della concentrazione ionica (il valore medio di N per alta concentrazione è di circa $1.11 \cdot 10^{13}$ elettroni/m³); ogni curva parte da quel valore della frequenza *critica*, ossia quella che annulla la (1) (al di sotto del quale, quindi, n risulterebbe immaginario) e che vale, pertanto:

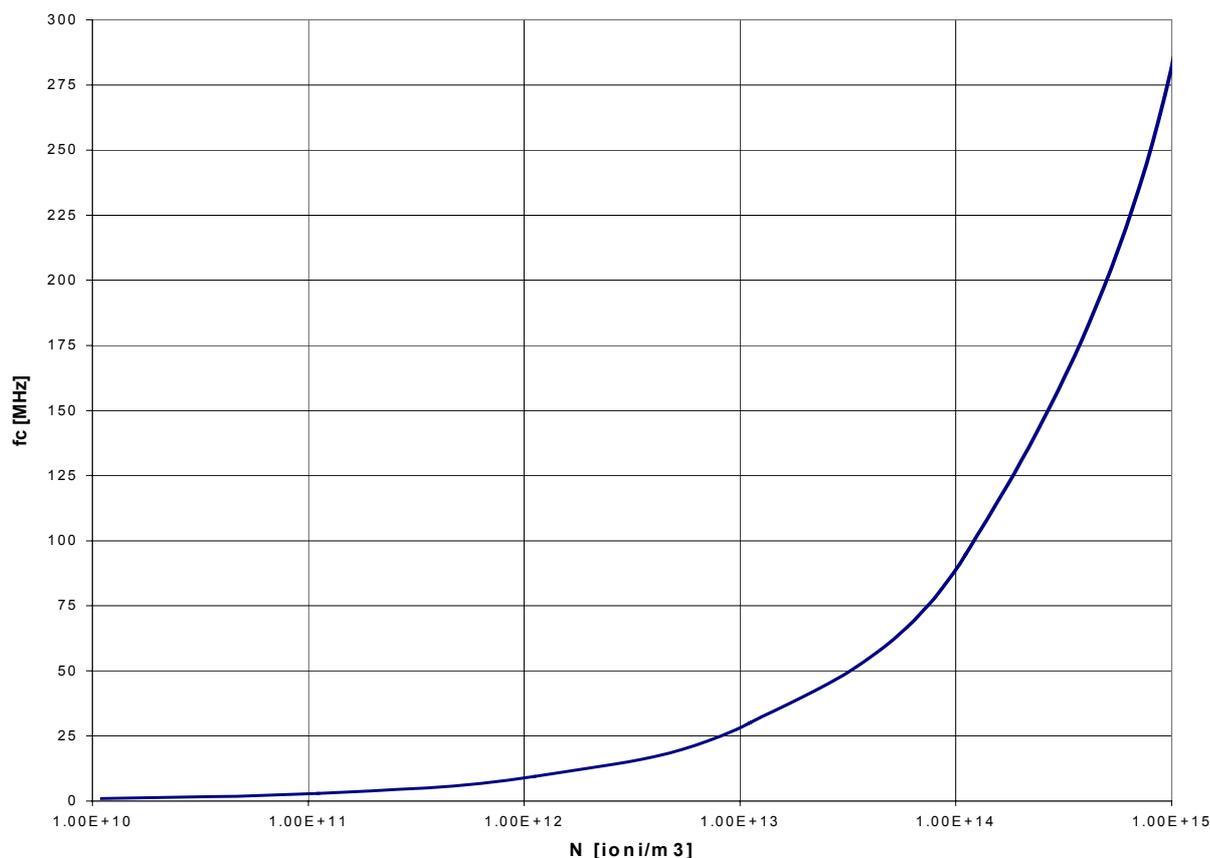
$$f_c = 9\sqrt{N} \quad (2)$$

Per N pari a circa $1.11 \cdot 10^{13}$ elettroni / m³, dalla (2) si ottiene un valore di circa:

$$f_c \cong 30 \text{ MHz}$$

nella figura che segue è riportato l'andamento della frequenza critica f_c (MHz) in funzione della concentrazione ionica N [ioni / m³ – scala logaritmica]

frequenza critica



Tenendo conto che n varia tra 0 ed 1 e che l'effetto della rifrazione (con la conseguente incurvatura dell'onda E/M) è tanto più sensibile quanto più basso è n , dalla lettura del grafico si possono trarre le seguenti considerazioni:

1. la frequenza critica dipende dalla concentrazione ionica ed è tanto più alta quanto più alto è N ;
2. al crescere di f il valore di n tende ad 1 per cui l'effetto della rifrazione si annulla; è questo il motivo per cui per le trasmissioni terra-satellite si utilizzano frequenze molto elevate che "bucano" la ionosfera senza essere riflesse (non oltre però i 25 - 30 GHz per evitare la diffusione nella troposfera);
3. la diminuzione di N , agendo allo stesso modo sul valore di n , comporta un fenomeno analogo a quello visto in 2. ossia ad alta quota, quando la rarefazione dell'aria determina un valore basso per N , non si ha riflessione.

In definitiva, al passaggio delle onde E/M nei vari strati della ionosfera si determina un effetto di rifrazione tanto più intenso quanto più bassa è la frequenza e quanto più alta è la concentrazione ionica; quindi, si ha un progressivo incurvamento verso il basso (in quanto l'indice di rifrazione diminuisce mentre l'onda penetra i vari strati dal momento che n cresce durante la prima fase dell'attraversamento). Per un primo tratto l'indice di rifrazione diminuisce (e quindi l'effetto della rifrazione aumenta) e quindi l'effetto dell'incurvamento verso il basso è più sensibile; ad un certo punto dell'atmosfera (in dipendenza dell'altezza raggiunta, della frequenza e della concentrazione ionica) n riprende a salire per effetto della rarefazione ($N \rightarrow 0$) e la tendenza all'incurvamento si inverte. Se nella prima fase dell'attraversamento l'onda ha raggiunto il parallelismo con gli strati ionosferici, il successivo incurvamento "piegherà" l'onda verso il basso e si avrà quindi riflessione dell'onda. In caso contrario (se cioè, per questioni legate alla frequenza di trasmissione ed alla concentrazione ionica, l'inclinazione dell'onda non era sufficiente a completare incurvamento verso il basso) l'onda trapassa la ionosfera e si disperde nello spazio.

Per ogni data concentrazione ionica, se la trasmissione avviene con frequenza inferiore a quella critica, l'indice di rifrazione n è nullo o immaginario e quindi si ha riflessione qualunque sia l'angolo di inclinazione con cui l'onda incide sulla ionosfera.

Naturalmente, si può avere riflessione anche per angoli superiori alla f_c ma, in tal caso, occorre avere un angolo di elevazione sufficiente.

Effetti della presenza della superficie del mare sul diagramma di radiazione dell'antenna radar

Con riferimento alla fig. 4.3 delle "Lezioni del Corso di Apparecchiature e Strumenti di Bordo" del prof. Carrera e ricordando che la differenza di fase $\Delta\phi$ tra due onde emesse e ricevute dagli stessi apparecchi ma dopo percorsi diversi, vale:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi(d'-d)}{\lambda}$$

dove:

d = percorso dell'onda diretta

d' = percorso dell'onda riflessa

D = distanza tra i due oggetti

λ = lunghezza d'onda della trasmissione

denominando:

h_a = altezza della trasmittente

h_b = altezza della ricevente

si può scrivere:

per l'onda diretta

$$d = \sqrt{D^2 + (h_a - h_b)^2} = D \sqrt{1 + \left(\frac{h_a - h_b}{D}\right)^2}$$

per l'onda riflessa

$$d' = \sqrt{D^2 + (h_a + h_b)^2} = D \sqrt{1 + \left(\frac{h_a + h_b}{D}\right)^2}$$

Dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x) = \sqrt{1+x}$ di punto iniziale 0, trascurando i termini di ordine superiore al primo¹, si ha:

¹ L'espressione dello sviluppo in serie di Taylor di una funzione $f(x)$ di punto iniziale x_0 , in cui essa sia derivabile indefinitamente, è:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

Sviluppando in serie la funzione $\sqrt{1+x}$ con $x_0 = 0$ si ha :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}x^3 + \dots$$

In tale espressione, se $x \ll 1$, i termini perdono rapidamente valore al crescere della potenza, per cui è possibile trascurare tutti quelli diversi dal primo; tale è proprio il caso in questione in quanto, per tutti i possibili valori delle variabili contenute è:

$$\left(\frac{h_a - h_b}{D}\right)^2 \ll 1$$

Per rendersi conto di ciò basta immaginare alcuni valori tipici di h_a , h_b (es. 40 e 30 m) e di D (es. 20 km) Con i valori indicati si avrebbe:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

Accettando questa approssimazione, le due espressioni precedenti possono essere scritte rispettivamente:

per l'onda diretta
$$d = D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_a - h_b}{D} \right)^2 \right)$$

per l'onda riflessa
$$d' = D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_a + h_b}{D} \right)^2 \right)$$

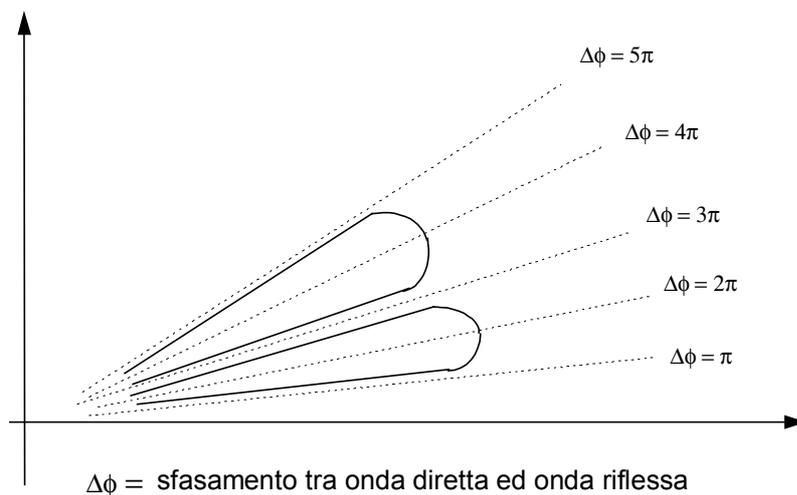
e, quindi:
$$d' - d = D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_a + h_b}{D} \right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_a - h_b}{D} \right)^2 \right)$$

da cui, semplificando:
$$d' - d = \frac{2 h_a h_b}{D}$$

e, di conseguenza:
$$\Delta\phi = \frac{2\pi(d' - d)}{\lambda D} = \frac{4\pi h_a h_b}{\lambda D}$$

Questa espressione, data una posizione del radar di elevazione h_a , mette in relazione lo sfasamento $\Delta\phi$, la posizione del ricevente (di elevazione h_b) e la distanza tra i due; quando lo sfasamento è pari ad un numero pari di π , le onde si mettono perfettamente in fase e quindi la loro ampiezza raddoppia; quando $\Delta\phi$ è pari a $(2n + 1)\pi$ le onde sono sfasate di 180° e quindi le ampiezze si annullano.

Vista in termini di diagramma di radiazione, la potenza irradiata risente fortemente di questa condizione e quindi l'angolo sulla orizzontale (che è quello sotto il quale il ricevente prende il segnale) ha influenza (periodica) sull'ampiezza del segnale. Riferendosi ai primi lobi la situazione dovuta alla riflessione (perfetta) viene rappresentata come segue:



Per fare un esempio concreto, supponiamo di calcolare il $\Delta\phi$ nelle seguenti ipotesi:

$$h_a = 10 \text{ m}$$

$$h_b = 30 \text{ m}$$

$$\left(\frac{h_a - h_b}{D} \right)^2 = \left(\frac{40 - 30}{20000} \right)^2 = 2.5 \cdot 10^{-7}$$

$D = 10 \text{ km}$

Radar in banda S ($\lambda = 10 \text{ cm}$)

Si avrà:

$$\Delta\phi = \frac{4\pi h_a h_b}{\lambda D} = \frac{4\pi \cdot 10 \cdot 30}{0.10 \cdot 10000} = 1.2\pi$$

Per i valori tipici delle variabili presenti nell'equazione, i valori minimi assunti da $\Delta\phi$ sono vicini a π il che giustifica l'uso di considerare come primo il lobo del diagramma di radiazione che si trova tangente alla semiretta relativa al valore $\Delta\phi = \pi$; per valori alti di h_a e h_b e bassi di D si possono avere valori di $\Delta\phi$ più elevati.

In ogni caso è evidente che, sul piano teorico, la presenza dell'onda riflessa può generare problemi quando il valore di $\Delta\phi$ si avvicina a valori di $(2k + 1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; in tali casi, infatti, essendo onda diretta e riflessa in controfase, si verificherebbe l'annullamento del segnale.

Il guadagno per le antenne dei radar nautici

Considerando l'antenna in trasmissione, la definizione di guadagno porta alla relazione:

$$G_t = \frac{p_T}{p_{T,i}}$$

dove:

p_T densità di potenza [W/m^2] ricevuta da un'areola s [m^2] a distanza d [m] quando l'antenna reale trasmette la potenza P_t [W]

$p_{T,i}$ densità di potenza [W/m^2] ricevuta dalla stessa areola s a distanza d quando l'antenna isotropa trasmette la potenza P_t

L'antenna isotropa che emette la potenza P_T ad una distanza d farà misurare una densità di potenza $p_{T,i}$:

$$p_{T,i} = \frac{P_T}{4\pi d^2}$$

da cui si ricava che:

$$G_t = \frac{p_T}{p_{T,i}} = \frac{p_T}{\frac{P_T}{4\pi d^2}} = \frac{4\pi d^2 p_T}{P_T}$$

da cui:

$$p_T = \frac{G_T P_T}{4\pi d^2}$$

che ci permette di prevedere la densità di potenza p_T ottenibile da un'antenna di guadagno G_T che trasmette una potenza P_T a distanza d .

La quantità:

$$4\pi d^2 p_t = G_T P_T$$

viene definita potenza effettiva irradiata (EIRP – Effective Irradiate Power) e definisce la potenza di cui una ipotetica antenna isotropa dovrebbe essere capace perché a distanza

d , trasmettendo la stessa potenza P_T sia percepibile la stessa densità di potenza ρ_T generata dall'antenna reale.

In ricezione, si introduce il concetto di *area efficace* A_e dell'antenna come rapporto tra la potenza realmente captata dall'antenna stessa ($P_t - [W]$) e la densità di potenza $\rho [W/m^2]$ dell'onda E/M in prossimità dell'antenna:

$$A_e = \frac{P_t}{\rho}$$

Ricordando l'espressione del guadagno G , avremo:

$$G_r = \frac{P_r}{P_{r,i}} = \frac{\rho A_e}{\rho A_{e,i}} = \frac{A_e}{A_{e,i}}$$

dove:

P_r potenza ricevuta dall'antenna [W]

$P_{T,i}$ potenza ricevuta dall'antenna isotropa [W]

Dalle leggi sulla propagazione si ha il valore del guadagno di un'antenna in funzione della lunghezza d'onda della perturbazione incidente:

$$A_{e,i} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

da cui l'espressione del guadagno può essere posta nella forma:

$$G_r = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2}$$

La risoluzione radar

La risoluzione di uno strumento è la capacità di riconoscere come diversi due valori vicini del parametro da misurare: più sono vicini i valori individuati come distinti, maggiore è la capacità risolutiva dello strumento.

Nel radar, la risoluzione può essere distinta in *risoluzione telemetrica* (capacità di vedere come distinti due oggetti che sono allineati con l'antenna del radar ad una certa distanza tra loro) e la *risoluzione goniometrica* (capacità di vedere distinti due oggetti posti su due radiali diverse formanti un certo angolo).

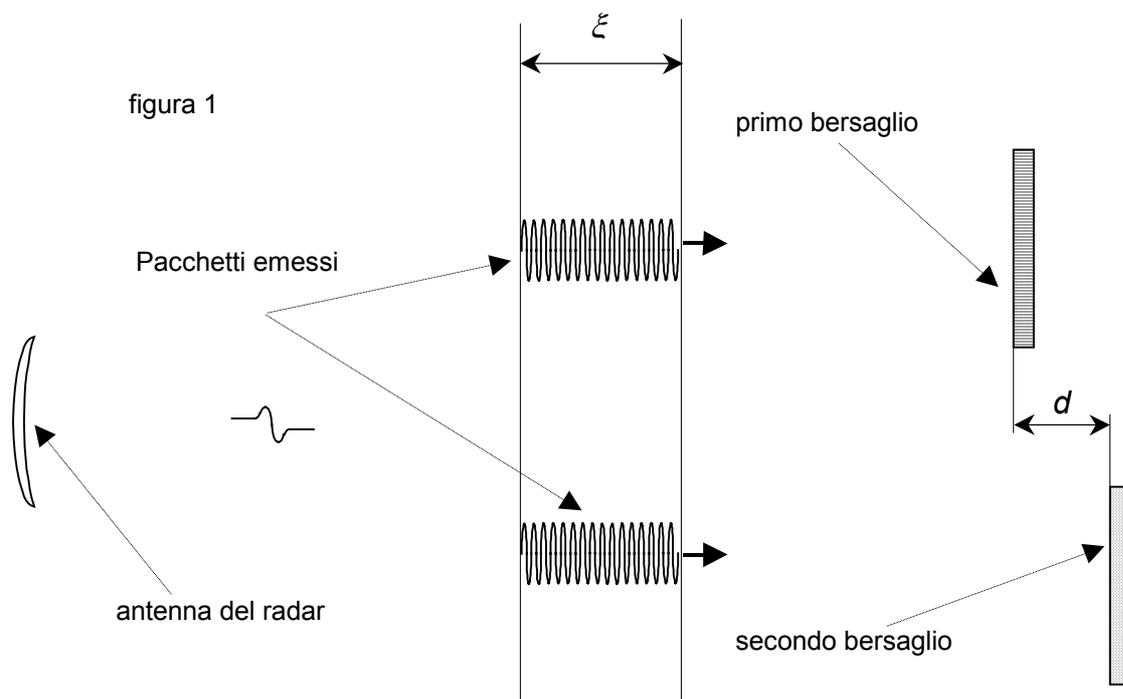
- POTERE RISOLUTORE TELEMETRICO

La *risoluzione telemetrica* è la più piccola distanza tra due oggetti allineati con l'antenna del radar alla quale il radar è ancora capace di vederli distinti; se i due oggetti sono a distanza pari alla risoluzione telemetrica, un ulteriore avvicinamento tra essi rende impossibile al radar la distinzione ossia essi vengono visti come un oggetto solo.

Per dare un valore a questo parametro, consideriamo un radar la cui cadenza sia T [s – es. 0.001] e che invii pacchetti aventi lunghezza temporale pari a τ [s – es. 10^{-6}]; in queste condizioni, lo spazio ξ [m – es. 300] perturbato dal passaggio del pacchetto, supponendo che la sua velocità di avanzamento sia pari a quella della luce $c [\approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}]$, è individuato dall'espressione:

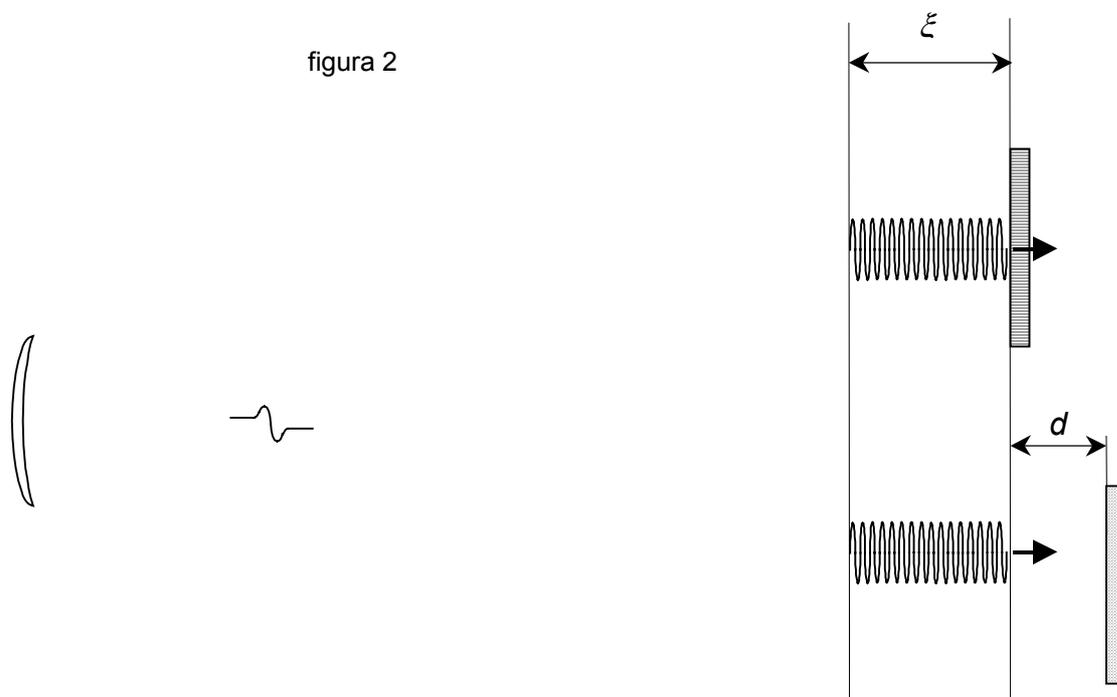
$$\xi = c \tau$$

che definiremo *lunghezza spaziale* dell'impulso coincidente con la zona realmente interessata, in un certo istante, dal passaggio dell'onda E/M emessa dal radar.



Si supponga (figura 1) che due pacchetti d'onda sincroni siano diretti verso due bersagli posti a distanza d tra loro. Evidentemente, prima di raggiungere i rispettivi bersagli, essi viaggiano a pari velocità ($= c$) occupando la fascia di spazio pari a ξ .

Dopo un tempo dipendente dalla posizione dell'oggetto più vicino all'antenna del radar, il primo pacchetto arriverà a toccare il primo oggetto e, nell'istante in cui ciò avviene, la situazione si presenterà come in figura 2.



Negli istanti immediatamente successivi, inizierà la riflessione del pacchetto contro l'oggetto più vicino, mentre il secondo pacchetto prosegue il suo percorso verso l'oggetto più lontano per poi essere riflesso da quest'ultimo (figure 3 e 4). I pacchetti riflessi avranno energia più bassa rispetto a quella posseduta dai pacchetti inviati dal radar in quanto solo una parte dell'energia trasmessa verrà riflessa; per ricordare questa circostanza, i pacchetti riflessi sono disegnati con ampiezza ridotta rispetto a quelli inviati.

figura 3

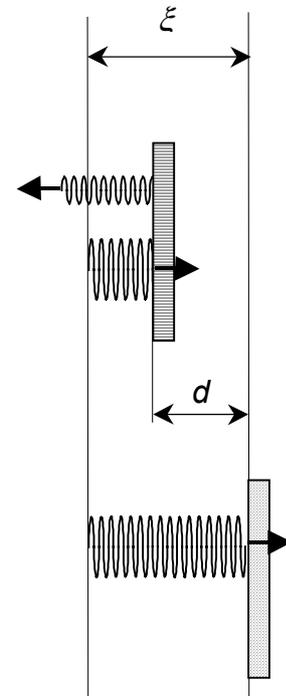
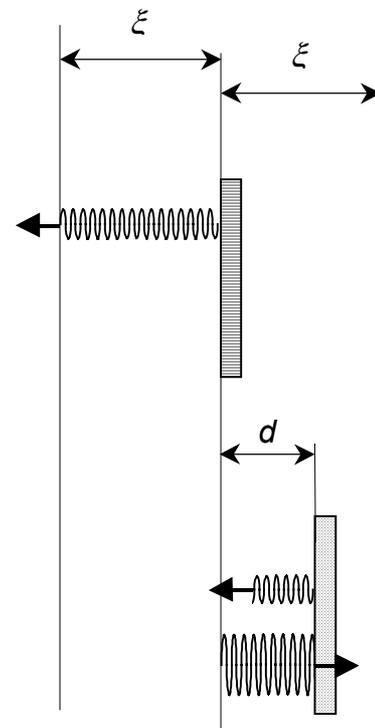


figura 4



Completata la riflessione del secondo pacchetto, possono verificarsi due situazioni: il pacchetto riflesso dall'oggetto più vicino può trovarsi ad occupare una zona di spazio distinta da quella occupata dall'altro pacchetto (tra i due può generarsi uno spazio δ), In tal caso (figura 5) i due pacchetti, essendo fisicamente separati tra loro, saranno percepiti come distinti dal radar: il potere risolvente telemetrico del radar è in tal caso sufficiente a garantire la separazione dei due impulsi e, quindi, la risoluzione telemetrica è minore di d .

figura 5

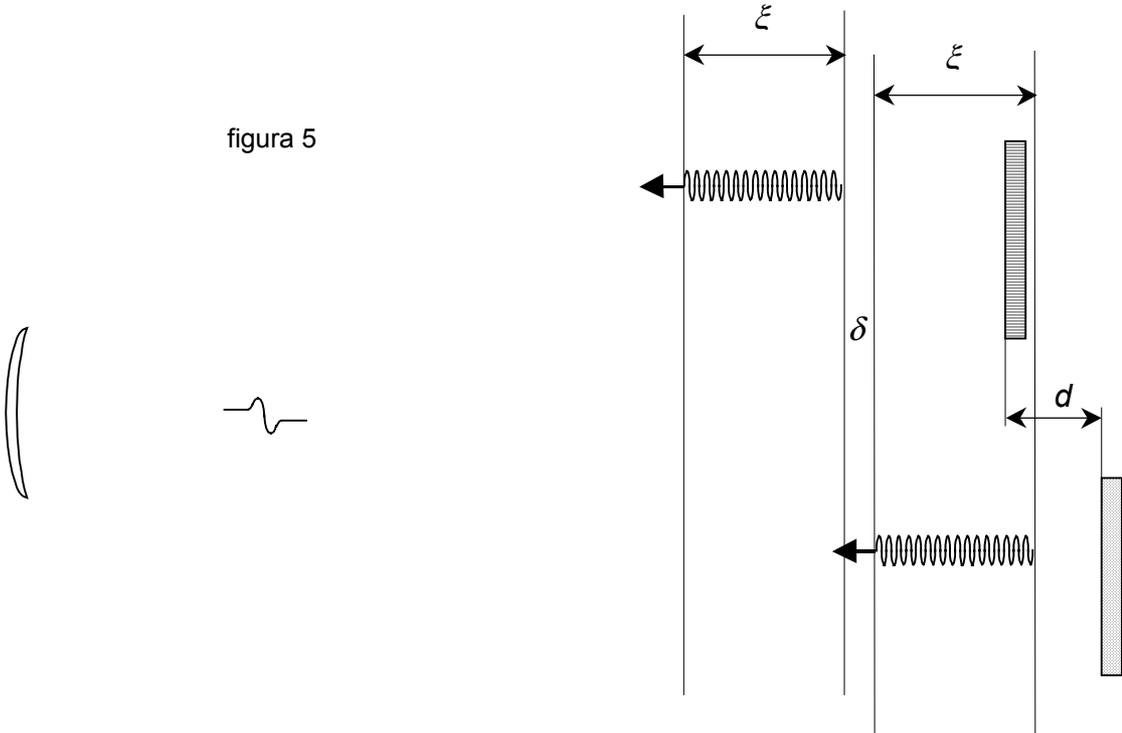
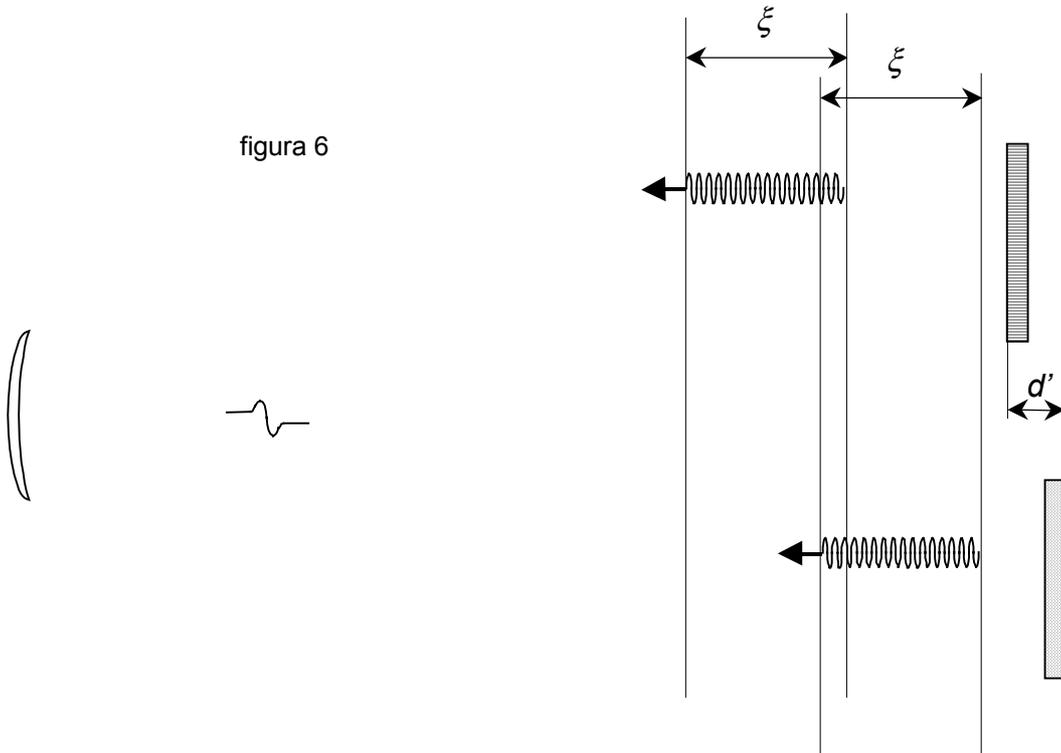


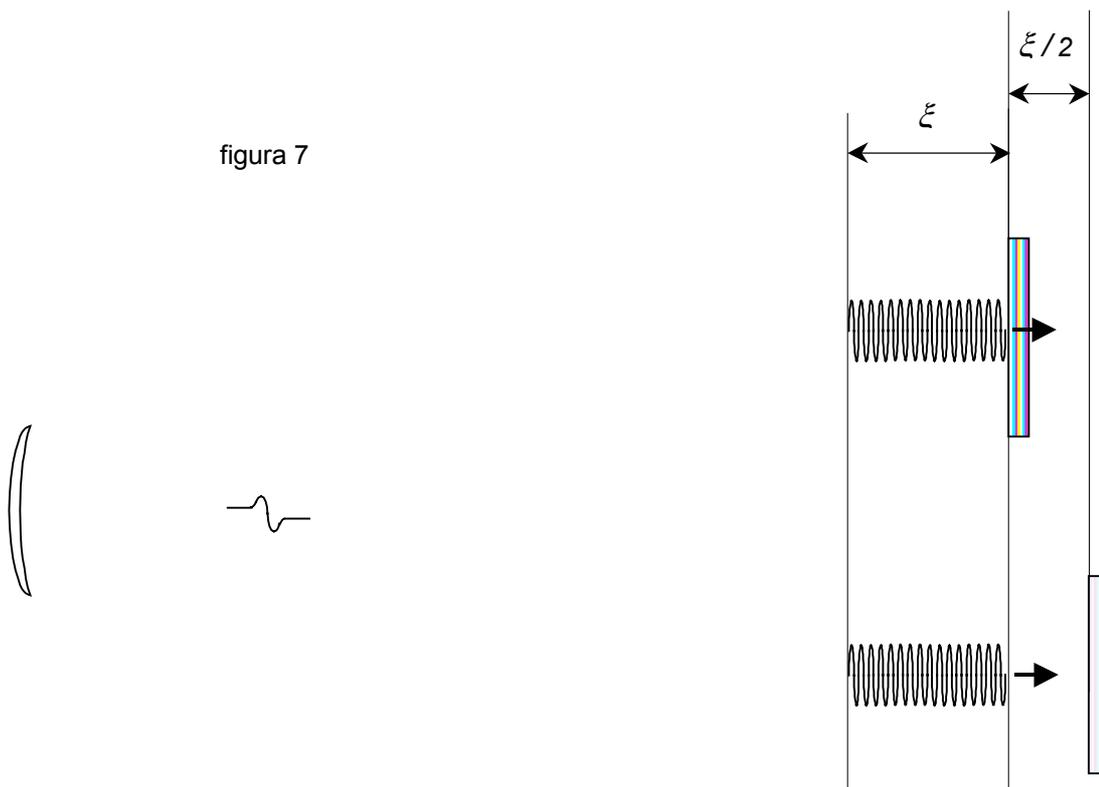
figura 6



Se invece (figura 6) la distanza d' tra gli oggetti è tale che il secondo pacchetto, dopo la riflessione, si trova in una porzione di spazio occupata anche dal primo (così sovrapponendosi ad esso per un tratto), il radar interpreterà il segnale come proveniente da un unico impulso (non essendo distinguibile una interruzione tra i due) e, quindi, non sarà in grado di risolvere i due pacchetti. In tal caso il potere risolutore telemetrico non è sufficiente ad effettuare la risoluzione che pertanto risulterà maggiore di d' .

Se la distanza tra i due oggetti fosse pari esattamente a $\xi / 2$ (figura 7), ad un determinato istante il primo pacchetto toccherebbe il primo oggetto.

figura 7



Dopo un tempo $\tau/2$ (figura 8), il primo pacchetto sarebbe stato riflesso a metà (in quanto in un tempo τ esso percorre uno spazio ξ) mentre il secondo pacchetto arriverebbe a toccare il secondo oggetto.

Dopo un altro tempo $\tau/2$ (figura 9), mentre il primo pacchetto completa la sua riflessione, il secondo ne compie metà, raggiungendo con il primo fronte d'onda l'ultimo fronte del primo pacchetto.

figura 8

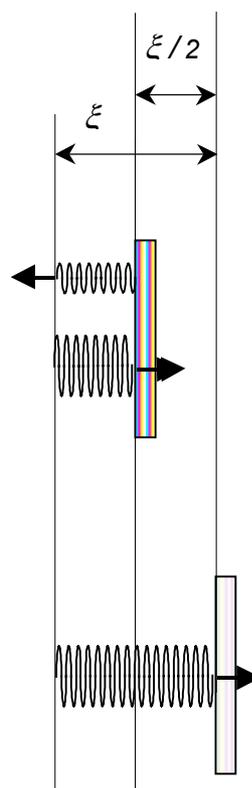
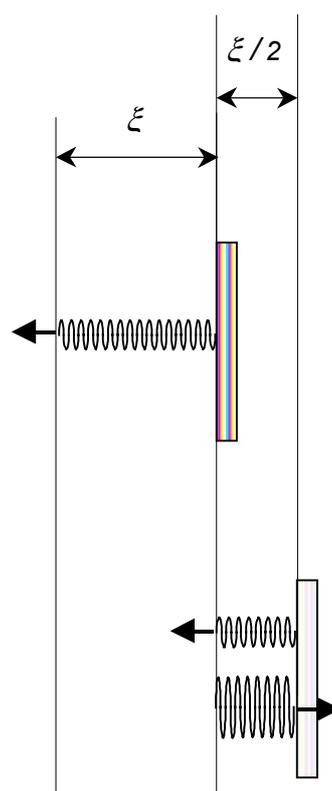
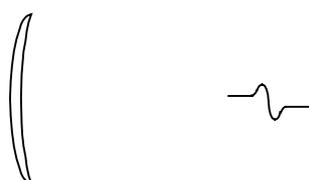


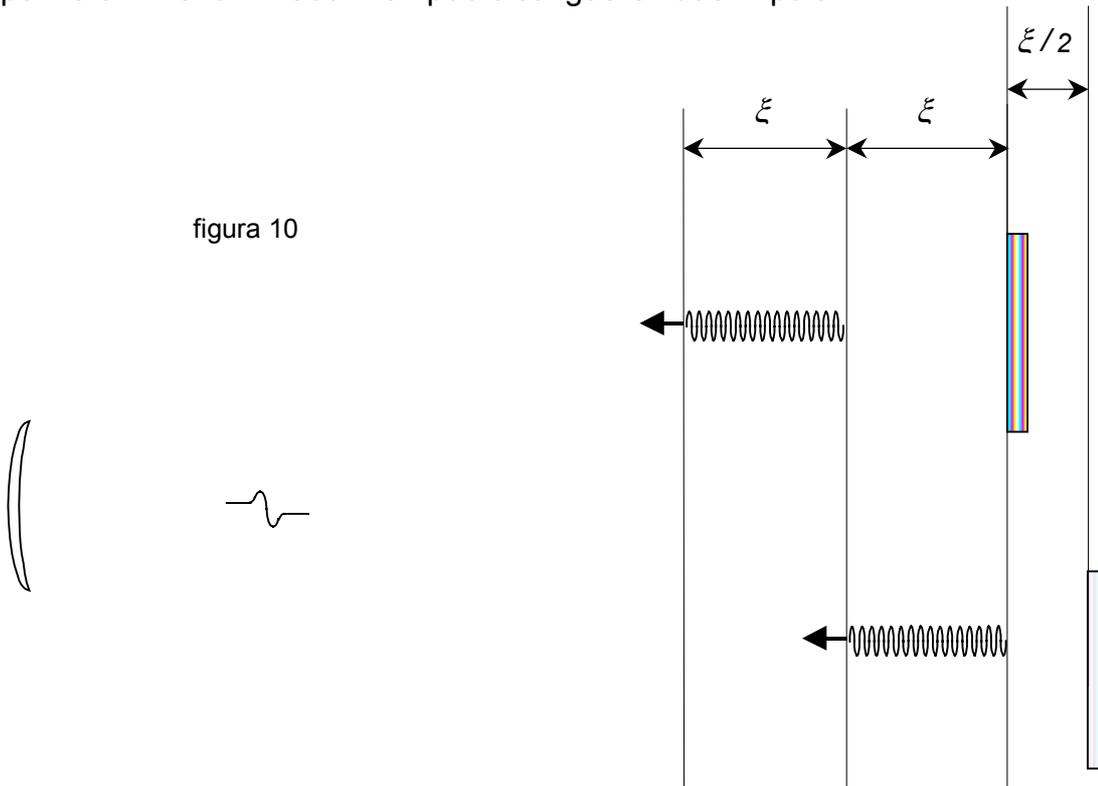
figura 9



I due pacchetti riflessi si accodano (figura 10) e ritornano in questa maniera verso l'antenna del radar. In queste condizioni si è raggiunta la situazione limite dal punto di vista della sovrapposizione dei due pacchetti ossia la distanza temporale tra i due pacchetti è quella massima perché essi possano essere visti dal radar come impulso unico: basterebbe una minima distanza in più tra essi per poter essere risolti. Ciò significa che la distanza $\tau/2$ è pari proprio alla risoluzione telemetrica: infatti per valori

(anche leggermente) superiori ad essa il radar vede i due pacchetti come distinti, mentre per valori inferiori il radar non può distinguere i due impulsi.

figura 10



È dunque:

$$\text{potere risolutore telemetrico} = \frac{\xi}{2} = \frac{c \tau}{2} \quad [\text{m} - \text{es. } 150]$$

Dunque, la scelta del tempo di trasmissione τ influenza direttamente la risoluzione della misura radar; per aumentare la risoluzione (diminuire la distanza tra oggetti risolvibili) occorre diminuire il valore di τ . È per questo che i radar più sofisticati possono funzionare con valori diversi di τ in funzione delle condizioni e delle esigenze di utilizzo.

Si noti che per le applicazioni comuni, il valore del potere risolutore telemetrico di un radar commerciale è più che accettabile; infatti, è improbabile che due navi mercantili si trovino a distanza inferiore a 150 m tra loro e, d'altra parte, questa distanza è certamente sufficiente se i bersagli avvistati sono fissi (costruzioni, scogli ecc.).

- POTERE RISOLUTORE GONIOMETRICO

Si dice *potere risolutore goniometrico* la capacità di distinguere oggetti posti su radiali diverse aventi origine comune nell'antenna del radar; minore è il valore dell'angolo tra tali radiali sulle quali ancora il radar vede oggetti distinti, maggiore è il potere risolutore goniometrico.

Detti:

n_a numero di giri di rotazione dell'antenna [giri/s – es. 0.3]
 T cadenza del radar [s – es. 0.001]

sarà:

$n_a 360^\circ$ angolo spazzato dall'antenna in un secondo [gradi/s - es. 108]

e quindi:

$\beta = n_a 360^\circ T$ angolo spazzato dall'antenna tra un impulso ed un altro [gradi - es. 0.108]

se:

v_a velocità antenna [giri/min – es. 18]
 f frequenza della cadenza [Hz – es. 1000]

avremo:

$$n_a = v_a/60$$
$$T = 1/f$$

per cui potremo esprimere β anche con la seguente espressione:

$$\beta = \frac{360}{60} \frac{v_a}{f} = 6 \frac{v_a}{f} \quad [\text{gradi - es. 0.108}]$$

β è da considerare un limite inferiore per il potere risolutore goniometrico: non è infatti possibile che alcun bersaglio sia colpito tra il lancio di un pacchetto ed il successivo.

Nelle condizioni poste, è possibile valutare il *numero di battute a bersaglio*, ossia il numero di pacchetti che effettivamente colpirà il bersaglio nell'ambito dell'arco corrispondente all'angolo di radiazione α dell'antenna.

Se diciamo:

T_A periodo dell'antenna (tempo necessario perché l'antenna compia un giro) [s – es. 3.33]
 n numero di battute nel giro [es. 3'330]
 $n_{1 \text{ grado}}$ numero di battute in un angolo pari ad un grado [es. 9.258]

sarà:

$$T_A = \frac{1}{n_a} = \frac{60}{v_a}$$

e

$$n = \frac{T_A}{T} = T_A f$$
$$n_{1 \text{ grado}} = \frac{n}{360} = \frac{T_A f}{360}$$

Detto α l'angolo di radiazione dell'antenna radar [gradi – es. 2], sul bersaglio andranno (in quanto contenuti nell'angolo di radiazione) n_b colpi:

$$n_b = n_{1 \text{ grado}} \alpha = \frac{T_A \alpha f}{360} \quad [\text{es. 18.51}]$$

Questa espressione permette di valutare se i valori caratteristici del radar permettono di realizzare un numero di colpi a bersaglio ritenuti sufficienti viste le esigenze di scansione. Se ciò non dovesse accadere, si potrebbe intervenire sui parametri che influenzano n_b ; ad esempio, per aumentare il numero di colpi a bersaglio si potrebbe aumentare l'angolo di radiazione α , oppure T_A (diminuendo il numero di giri dell'antenna) od anche f (aumentando la frequenza della cadenza a scapito della gittata).

IL GPS

La determinazione del punto GPS

Indicando con:

X, Y, Z	le coordinate (incognite) del ricevitore - e quindi della nave -;
X_i, Y_i, Z_i	le coordinate (note) del satellite i-mo;
δt	offset dell'orologio del ricevitore (pari alla differenza tra il tempo misurato dal ricevitore e quello - più preciso - GPS);
R_i	pseudodistanza (pseudorange) del satellite i-mo dal ricevitore;
$R_{v,i}$	distanza vera del satellite i-mo dal ricevitore;

la misura della distanza tra l'i-mo satellite ed il ricevitore potrebbe essere realizzata (se non vi fosse differenza di precisione tra il clock del satellite e quello del ricevitore) misurando il tempo Δt_i trascorso tra l'istante dell'invio del messaggio (informazione, questa, contenuta nel messaggio di navigazione) ed il momento della ricezione (misurato dal clock interno del ricevitore) secondo la legge:

$$R_i = c \Delta t_i$$

Tale valore, se i tempi misurati dal clock del satellite e quello del ricevitore avessero medesima precisione e fossero perfettamente sincronizzati, coinciderebbe con il valore della distanza tra satellite e ricevitore calcolata applicando il teorema di Pitagora nello spazio rispetto ad un qualsiasi riferimento cartesiano:

$$R_i = c \Delta t_i = \sqrt{(X-X_i)^2 + (Y-Y_i)^2 + (Z-Z_i)^2}$$

Ma, in realtà, vi è una significativa differenza (*offset*) tra il tempo (preciso e continuamente aggiornato) misurato dai clock satellitari e quello dell'orologio del ricevitore meno preciso e non sincrono col tempo GPS. La distanza così misurata sarà, pertanto, affetta da un errore non piccolo: è questo il motivo per cui il suo valore non coincide con la distanza tra satellite e ricevitore e viene detto *pseudodistanza (pseudorange)*. Per dare un'idea di quanto lo pseudorange possa essere diverso dalla distanza vera, immaginando che tra i due clock vi sia una differenza di precisione che coinvolga la sola quinta cifra decimale (10^{-5}) si avrebbe un errore:

$$e = c \delta t = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5} = 3000 \text{ m}$$

Detta, allora, $R_{v,i}$ la distanza vera tra satellite ed antenna del ricevitore, avremo che, se δt è l'offset del clock del ricevitore (differenza di tempo tra gli orologi dovuta alla minore precisione di quello di bordo), l'espressione di R_i si potrà scrivere come:

$$R_i = c \Delta t_i = R_{v,i} + c \delta t = \sqrt{(X-X_i)^2 + (Y-Y_i)^2 + (Z-Z_i)^2} + c \delta t$$

E quindi per il satellite i-mo varrà l'equazione (dello pseudorange):

$$c \Delta t_i = \sqrt{(X-X_i)^2 + (Y-Y_i)^2 + (Z-Z_i)^2} + c \delta t$$

Nelle 4 incognite X, Y, Z e δt (quest'ultimo termine è da considerare a tutti gli effetti una incognita in quanto non è mai dato sapere qual è la differenza tra la misura del tempo

effettuata dal satellite e quella del ricevitore ossia l'offset dell'orologio); Δt_i non è incognita in quanto corrisponde al valore effettivamente misurato dal sistema di bordo come differenza tra il tempo d'emissione del segnale da parte dell'i-mo satellite (e ricavato dal messaggio di navigazione D) ed il tempo in cui tale segnale arriva al ricevitore (misurato dal clock del ricevitore stesso).

È necessario, dunque, avere 4 equazioni nelle medesime incognite perché il sistema sia risolvibile; in altri termini è necessario agganciare almeno quattro satelliti e scrivere per ognuno di essi l'equazione dello pseudorange.

Si noti che le 4 equazioni così ottenute hanno effettivamente le stesse incognite in quanto le Δt_i sono misurate nel modo detto, le coordinate - incognite - del ricevitore sono, ovviamente, sempre le stesse così come uguale è anche l'offset del clock del ricevitore rispetto al clock di qualsiasi satellite (l'ora inviata dal satellite viene aggiornata dalle stazioni di terra ed è sempre la stessa - a meno del relativo errore - indipendentemente dal satellite che la trasmette).

Qualora (come nel caso dell'utilizzo navale del GPS) la quota del ricevitore è nota, le incognite effettive si riducono a tre e, quindi, basta l'aggancio di tre satelliti per fare il punto GPS.

Tuttavia, i sistemi GPS tentano sempre l'aggancio con un numero maggiore di satelliti per migliorare la qualità del fix; infatti, la misura dello pseudorange R_i è affetta da un errore che si riflette sulla precisione della soluzione del sistema delle equazioni nelle incognite X, Y, Z e δt .

Se si possono agganciare altri satelliti, si riduce l'errore compiuto nella determinazione del punto; infatti, gli errori di misura insiti nei parametri contenuti nelle equazioni delle R_i fanno sì che la circonferenza d'intersezione tra il cono - avente per vertice il satellite e generatrice di lunghezza pari a $c \Delta t_i$ - e la terra degeneri in un anello di spessore pari proprio all'incertezza della misura. L'intersezione tra gli anelli relativi alle misure eseguite dai vari satelliti non sarà più dunque un solo punto o una coppia di punti ma una figura ottenuta dall'intersezione di vari anelli. È evidente che maggiore è il numero dei rilievi (e quindi dei satelliti agganciati), minore è l'area dell'intersezione tra gli anelli, migliore la determinazione del punto.

Il segnale e la decodifica

Il segnale GPS risulta dalla composizione dei codici **P** e **C/A** e del messaggio di navigazione **D**; esso viene modulato su due diverse portanti nelle frequenze **L₁** (= 1575.42 MHz) e **L₂** (= 1227.60 MHz) e, per il satellite i-mo, ha la seguente forma analitica:

$$\text{nella frequenza } L_1 \Rightarrow S_{L_1i} = A_P X P_i(t) D_i(t) \cos(\omega_1 t + \phi) + A_G X G_i(t) D_i(t) \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\text{nella frequenza } L_2 \Rightarrow S_{L_2i} = B_P X P_i(t) D_i(t) \cos(\omega_2 t + \phi)$$

dove:

A_P ampiezza della portante del codice P in frequenza L_1 ;

A_G ampiezza della portante del codice C/A in frequenza L_1 ;

B_P ampiezza della portante del codice P in frequenza L_2 ;

$X P_i(t)$ codice binario P;

$X G_i(t)$ codice binario C/A;

- $D_i(t)$ messaggio di navigazione (binario);
- ω_1 pulsazione relativa alla frequenza $L_1 (= 2 \pi L_1)$;
- ω_2 pulsazione relativa alla frequenza $L_2 (= 2 \pi L_2)$;
- ϕ sfasamento dovuto al rumore ed alla deriva dell'oscillatore

Il messaggio di navigazione vero e proprio è contenuto in $D_i(t)$ che comprende:

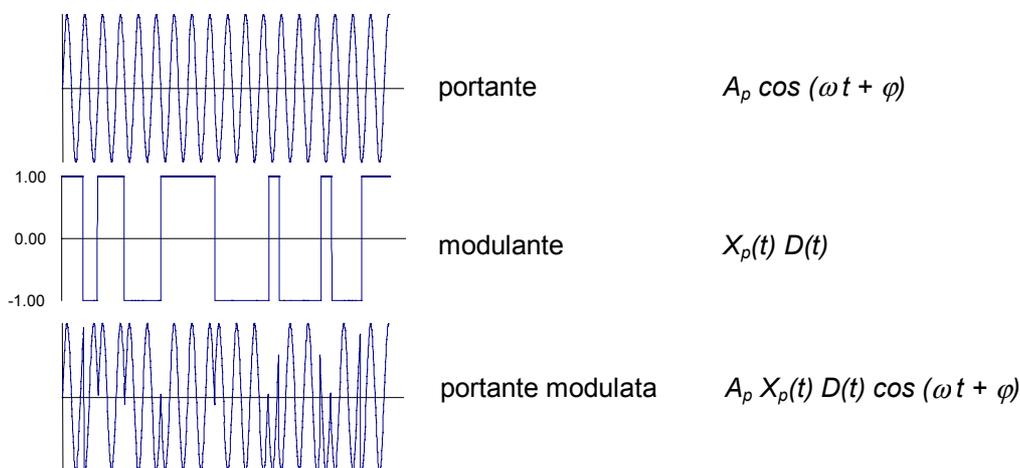
- tempo GPS di emissione dei dati dal satellite;
- età dei dati (differenza tra il tempo GPS e quello al quale è avvenuto l'ultimo aggiornamento dei dati trasmessi);
- coefficienti per la correzione ionosferica;
- coefficienti per il calcolo dell'offset dell'orologio del satellite;
- effemeridi dei satelliti;
- informazioni sullo stato dei satelliti.

La tecnica della trasmissione è per *frame* e *subframe* ossia le informazioni vengono suddivise per pagine e sottopagine ognuna delle quali contiene una parte del messaggio.

I codici binari P e C/A (detti *pseudo random noise* ossia rumori pseudo casuali) sono mescolati al messaggio di navigazione (moltiplicando istante per istante il valore di D con quello del codice) per impedirne la lettura ad utenti non abilitati; il codice C/A è tuttavia disponibile nei ricevitori commerciali e permette, pertanto, la decodifica dei dati GPS sia pure con precisione limitata e degradata dalla SA (Selective Availability), introdotta per aumentare l'errore del sistema rendendolo inutilizzabile ai fini bellici. Tale degrado consiste nel trasmettere il codice C/A con qualche differenza rispetto a quello posseduto dai ricevitori in modo da generare l'errore desiderato.

Il codice C/A viene inviato soltanto alla frequenza L_1 e ciò allo scopo di introdurre un primo livello di imprecisione nella determinazione del punto non permettendo la correzione dell'errore dovuto alla rifrazione ionosferica (possibile solo conoscendo entrambe le trasmissioni in L_1 ed L_2).

Lo pseudo random noise è realizzato mediante modulazione della portante come illustrato dalla figura seguente (in cui si suppone di trasmettere il codice P): la portante $A \cos (\omega t + \phi)$ viene moltiplicata per il valore della modulante che è a sua volta ottenuta moltiplicando il messaggio in binario $D(t)$ con il codice P o C/A.



L'utente comune può adire al messaggio di navigazione $D(t)$ esclusivamente tramite il segnale $S_{L1,i}$ in quanto il $S_{L2,i}$ contiene il codice sconosciuto $XP_i(t)$; tale codice è contenuto

anche nel messaggio inviato a frequenza L_1 ma con una armonica diversa (seno anziché coseno); l'impossibilità di decodificare il messaggio in frequenza L_2 impedisce di effettuare la correzione ionosferica.

SUSSIDI DIDATTICI

- G. CARRERA, Lezioni del Corso di Apparecchiature e Strumenti di Bordo (Rev. 2000), DINAV, Genova
- P. MONTI, Tecniche radar navali, Calderini, 1981;
- G.J. SONNENBERG, Radar and electronic navigation, Butterworths, 1988;
- M. VULTAGGIO, G. HAN, Sistemi di posizionamento a copertura globale, Istituto di Navigazione "G. Simeon", I.U.N. Napoli, 1994;
- M. VULTAGGIO, A. GRECO, G. HAN, Measurement of DGPS in the gulf of Naples, The fourth International Conference on Differential Satellite Navigation Systems, Bergen, 1995;
- M. I. SKOLNIK, Introduction to RADAR systems (third edition), Mc Graw-Hill International editions, 2001;