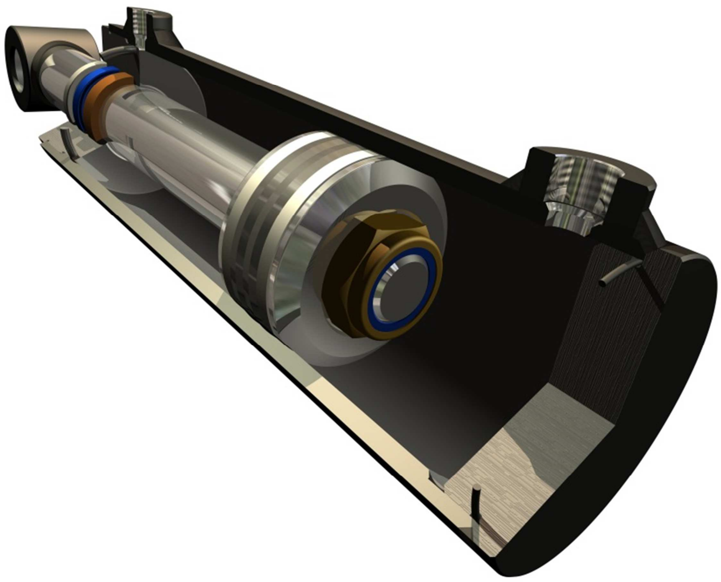
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Schede di **Impianti Navali**

Proporzionamento del pistone oleodinamico



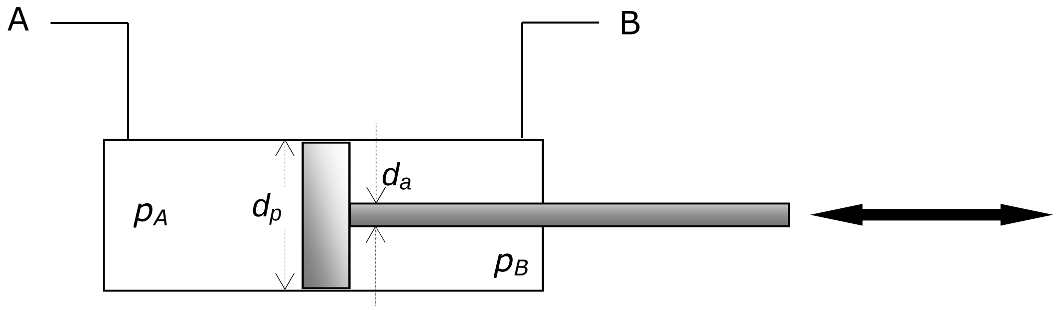
ver 1.3

A cura di Tommaso Coppola e Franco Quaranta

Proporzionamento del pistone oleodinamico

versione: ***1.3***
file originale: *Proporzionamento del pistone oleodinamico 161108 ver 1_3*
data di stampa: ***8/11/2016***
a cura di: *Tommaso Coppola e Franco Quaranta*

1 – generalità



Le attuazioni lineari vengono realizzate con l'utilizzo di pistoni spinti dalla forza che l'olio in pressione esercita sulla *corona* (o *cielo*) o sulla zona inferiore (o *base*); tali meccanismi vengono detti *cilindri oleodinamici* (o *pistoni oleodinamici*). Anche alcune attuazioni non lineari sono realizzate con pistoni e con l'ausilio di meccanismi che generano rotazione.
Questo semplice dispositivo si compone, in sostanza, di un cilindro in cui scorre a tenuta un pistone collegato (vedi figura) ad un carico attraverso un'*asta* (*piston rod*) che penetra - sempre a tenuta - il lato inferiore di chiusura del cilindro per collegarsi all'oggetto da attuare e trasmettergli la forza che permetterà l'attuazione.
Sebbene i vari tipi di cilindri oleodinamici in commercio siano molto simili tra loro per logica costruttiva, il movimento del pistone può essere gestito in più modi, sfruttando diversamente l'ingresso dell'olio in pressione nelle camere del cilindro; in figura è rappresentata la configurazione più comune in cui l'olio può entrare ed uscire attraverso due porte poste alle sue estremità.
Se l'olio in pressione è spinto ad entrare attraverso la porta *A* (è quindi $p_A > p_B$), il movimento del pistone avviene verso destra e la pressione dell'olio potrà essere esercitata su tutta l'area A_p. La forza realizzata varrà:

$$F = p_A \cdot A_p - p_B \cdot (A_p - A_a) = (p_A - p_B) \cdot \frac{\pi d_p^2}{4} + p_B \frac{\pi d_a^2}{4}$$

Se l'olio entra in pressione dalla porta *B* ($p_B > p_A$), il movimento del pistone avviene da destra verso sinistra; data la presenza dell'asta, la pressione dell'olio viene esercitata sulla corona circolare avente raggio esterno pari a quello del pistone ed interno pari a quello dell'asta. La forza ottenibile per l'attuazione vale:

$$F = p_B \cdot (A_p - A_a) - p_A \cdot A_p = (p_B - p_A) \cdot \frac{\pi d_p^2}{4} - p_B \cdot \frac{\pi d_a^2}{4}$$

Se la pressione nella camera a bassa pressione può essere considerata trascurabile rispetto a quella che regna nella camera ad alta (per es. quando l'olio rifluisce nella centralina dove vige la pressione atmosferica), le due espressioni possono essere semplificate rispettivamente in:

$$F = p_A \cdot A_p = p_A \cdot \frac{\pi d_p^2}{4} \qquad (p_A >> p_B)$$

e

$$F = p_B \cdot (A_p - A_a) = p_B \cdot \left(\frac{\pi d_p^2}{4} - \frac{\pi d_a^2}{4} \right) \qquad (p_B >> p_A)$$

In tutti i casi, all'interno dell'asta del pistone nasce una sollecitazione dovuta alla forza che il pistone trasmette all'oggetto attuato; l'asta deve essere pertanto proporzionata per resistere alle sollecitazioni che l'applicazione di questa forza genera nel materiale di cui si compone. A seconda dell'attuazione, che può essere monodirezionale o bidirezionale, l'asta viene caricata a trazione (in figura, se $p_B > p_A$ e movimento di attuazione verso sinistra) oppure a compressione ($p_A > p_B$ verso destra); gli effetti della modalità di carico sulla resistenza dell'asta sono diversi e vanno trattati separatamente.

Si noti che la valutazione del diametro dell'asta deve essere condotta con priorità rispetto a quella del diametro del pistone in quanto occorre dapprima realizzare condizioni di sicurezza nel funzionamento nei confronti del carico che grava sul sistema pistone - asta. Definito il valore del diametro dell'asta, si può procedere al calcolo dell'area del pistone che, nel caso la spinta sia esercitata sulla base del pistone, dovrà tener conto dell'area sottratta alla spinta dell'olio dalla presenza della sezione dell'asta.

2 – proporzionamento e verifica di pistone oleodinamico con asta caricata a trazione

L'asta del pistone è caricata a trazione se l'olio in pressione preme sulla base del pistone; in questo caso, la crisi dell'asta avviene se la sollecitazione supera il limite di snervamento del materiale di cui è costituita. Il criterio di proporzionamento dell'asta del pistone deve quindi garantire un ragionevole margine di sicurezza tra la sollecitazione che si instaura nell'asta quando su di essa grava il carico massimo previsto nell'esercizio e la tensione di snervamento del materiale σ_{sn}.
Detta σ_{amm} la tensione che si ritiene massima ammissibile nell'asta e $C_{s,sn}$ il coefficiente di sicurezza che si vuole rispettare, vale l'espressione:

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_{sn}}{C_{s,sn}} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{sn} = C_{s,sn} \cdot \sigma_{amm}$$

Detto F il valore della forza nominale applicata all'asta nelle condizioni di progetto (quella massima che l'asta sia chiamata a sopportare) ed A l'area della sezione resistente dell'asta, si avrà:

$$\sigma_{amm} = \frac{F}{A}$$

da cui:

$$\sigma_{sn} = \frac{F}{A} \cdot C_{s,sn} = \frac{F}{\pi r^2} \cdot C_{s,sn}$$

e, in definitiva:

$$r = \sqrt{\frac{F \cdot C_{s,sn}}{\pi \sigma_{sn}}}$$

Il modello fisico relativo alla caricazione per trazione può essere considerato tra i meno esposti all'incremento occasionale delle sollecitazioni; per questo motivo, in generale, il valore di $C_{s,sn}$ viene scelto pari o prossimo a 2.

L'espressione ricavata è utilizzabile tipicamente per il proporzionamento dell'asta di un pistone in fase di progetto; se occorresse effettuare la verifica di un pistone costruito, il valore del *coefficiente di sicurezza effettivo a snervamento* $C_{s,eff,sn}$ potrebbe essere ricavato come variabile dipendente:

$$C_{s,eff,sn} = \frac{\pi\ \sigma_{sn}\ r^2}{F}$$

Dato il modello fisico relativo al carico assiale, in linea generale, il valore di $C_{s,eff,sn}$ può essere ritenuto accettabile se risulta maggiore od uguale a 2.
Una volta proporzionata l'asta del pistone, occorre determinare il diametro della corona del pistone; dalle espressioni ricavate prima e ricordando che, nel caso di pistone caricato a trazione, l'area su cui agisce la pressione p_A è l'anello circolare di diametro esterno d_p e diametro interno d_a, supponendo che sia $p_A >> p_B$ si ha:

$$F = p_A \cdot \frac{\pi\left(d_p^2 - d_a^2\right)}{4} \quad \Rightarrow \quad d_p = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi\, p_A} + d_a^2}$$

Oppure, essendo $F = p_a \cdot A$

$$d_p = \sqrt{\frac{4\,A}{\pi} + d_a^2}$$

3 – proporzionamento e verifica di pistone oleodinamico con asta caricata a compressione

Quando il pistone lavora a compressione, vi sono due possibili motivi di crisi strutturale dell'asta: snervamento oppure instabilità dell'equilibrio delle sezioni.
Il prevalere dell'uno o dell'altro dipende dalla *snellezza della trave* λ ossia dal rapporto:

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{MIN}}$$

dove:

l_0 lunghezza libera di inflessione
ρ_{MIN} raggio di girazione minimo della sezione.

Detta l_{asta} la lunghezza complessiva dell'asta, nelle condizioni in cui lavora il pistone oleodinamico, si può supporre che[1]:

$$l_0 = l_{asta}$$

Siccome l'asta ha generalmente sezione circolare costante, se il suo raggio è r, il raggio di girazione ρ risulta pari alla metà del raggio[2]:

---

[1] La lunghezza libera di inflessione l_0 dipende dal tipo dei vincoli cui l'asta è assoggettata alle sue estremità; nel caso del pistone oleodinamico si può immaginare che alle estremità dell'asta non vi sia possibilità di trasmettere momento e quindi il modello più prossimo alla situazione fisica reale sia quello degli appoggi d'estremità. In queste condizioni, la lunghezza libera d'inflessione coincide con quella tra gli appoggi (ossia la lunghezza stessa dell'asta).

$$l_0 = l_{asta}$$

[2] Per sezione circolare e rotazione attorno all'asse baricentrico, il momento d'inerzia di figura I vale:

$$I = A\ \rho^2$$

da cui:

$$\rho = r/2$$

Quindi, la snellezza dell'asta può essere espressa semplicemente in funzione della lunghezza l_{asta} e del raggio r dell'asta attraverso l'espressione:

$$\lambda = 2l_{asta}/r$$

Nel caso di carico di punta senza eccentricità (azioni e reazioni dirette lungo uno stesso asse[3]), la *teoria di Eulero* permette di individuare la *sollecitazione critica* σ_{cr} al di sopra della quale l'asta entra in crisi per instabilità dell'equilibrio della sezione resistente. Detti:

E coefficiente di elasticità del materiale di cui è composta l'asta
r raggio dell'asta
λ snellezza del corpo ($= 2l_{asta}/r$)

la teoria di Eulero fornisce il valore della sollecitazione critica:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Come si è detto, se l'asta è caricata di punta l'insorgenza della crisi può avvenire per schiacciamento (snervamento) o per instabilità della sezione resistente. La modalità di crisi dipenderà dalla minore delle due sollecitazioni critiche in quanto, all'applicazione del carico esterno, sarà la prima ad essere raggiunta: si avrà crisi per schiacciamento della sezione se risulterà $\sigma_{sn} < \sigma_{cr}$, la crisi sarà dovuta ad instabilità nel caso contrario, ossia se $\sigma_{cr} < \sigma_{sn}$.
La formula di Eulero mostra che al crescere della snellezza λ il valore della sollecitazione critica σ_{cr} diminuisce; vi sarà un valore, definito *snellezza minima* (o *critica*) λ_{min} al di sopra del quale varrà la condizione:

$$\sigma_{cr} < \sigma_{sn}$$

e ci sarà crisi per instabilità; al di sotto di esso vale la condizione inversa e quindi si verificherà crisi per schiacciamento della sezione. Il λ_{min} - da considerare valore minimo della snellezza perché sia applicabile la teoria di Eulero - divide i campi in cui le modalità di crisi sono differenti; pertanto, il suo valore sarà relativo alla condizione in cui la σ_{cr} e la σ_{sn} si equivalgono.
Scrivendo l'equazione di Eulero con questa posizione si ha:

$$\sigma_{sn} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{min}^2}$$

$$\rho = \sqrt{I/A}$$

D'altro canto, la sezione avrà momento d'inerzia di figura pari a

$$I = \pi r^4/4$$

per cui:

$$\rho = \sqrt{\frac{\pi r^4/4}{\pi r^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}$$

[3] Normalmente, date le buone precisioni di lavorazione, le corrette sistemazioni in opera ed altre condizioni favorevoli al buon funzionamento dei cilindri oleodinamici, si può ritenere che, in linea di massima, non ci sia significativo disassamento tra la risultante delle forze di pressione sul pistone e la reazione applicata alla base dell'asta.

da cui:

$$\lambda_{min}^2 = \frac{\pi^2\ E}{\sigma_{sn}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{min} = \sqrt{\frac{\pi^2\ E}{\sigma_{sn}}}$$

Nel caso, piuttosto comune, che per la costruzione dell'asta venga utilizzato un acciaio avente le seguenti caratteristiche di resistenza:

$$E \ \cong\ 2.0 \cdot 10^{11}\ Pa \qquad e \qquad \sigma_{sn} \cong 315\ {}^{N}/_{mm^2} \cong 3.15 \cdot 10^8\ Pa$$

si avrà:

$$\lambda_{min} = \sqrt{\frac{\pi^2\ E}{\sigma_{sn}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2.0 \cdot 10^{11}}{3.15 \cdot 10^8}} \cong 79$$

Il valore calcolato è relativo all'utilizzo di un acciaio particolare - per quanto molto diffuso nella costruzione delle aste dei pistoni oleodinamici - e può essere utilizzato soltanto in quel caso.
Data l'approssimazione di calcolo, si può dire che per valori della snellezza prossimi ad 80 le due modalità di crisi intervengono quasi per gli stessi valori della sollecitazione. Se il valore di λ è più alto la crisi interverrà per instabilità ed il calcolo della σ_{cr} può essere compiuto applicando la teoria di Eulero; se è invece più basso di 80 la causa di crisi è lo snervamento ed il valore da ritenere critico per la sollecitazione equivarrà alla σ_{sn} del materiale dell'asta.

3.1 – asta caricata a compressione: verifica

Per l'asta di un pistone esistente, conoscendo le caratteristiche dimensionali e costruttive, è possibile individuare immediatamente la causa di crisi: basterà calcolare - con i metodi descritti - i valori di λ e λ_{min} relativi all'asta ed al materiale con cui è costruita. Dal raffronto tra i due si conoscerà la condizione di crisi da fronteggiare.
Nel caso di verifica di un elemento esistente, è opportuna la valutazione del coefficiente di sicurezza effettivo su cui si può contare nei confronti della crisi (per snervamento o instabilità a seconda dei valori di λ e λ_{min}).
Se $\lambda > \lambda_{min}$ (corpo *snello*) la crisi dell'asta avverrà per instabilità e la σ_{cr} potrà essere calcolata con la formula di Eulero:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2\ E}{\lambda^2}$$

Se si definisce *coefficiente di sicurezza effettivo ad instabilità* $C_{s,eff,inst}$ il rapporto tra la sollecitazione critica e quella massima ritenuta ammissibile nel materiale, si ha:

$$C_{s,eff,inst} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{amm}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{cr} = C_{s,eff,inst} \cdot \sigma_{amm}$$

Dal momento che la σ_{amm} è la massima che si vuole nel materiale, dovrà coincidere con la sollecitazione che si verifica nell'asta di sezione A spinta dalla forza F che, a sua volta, è la massima forza che si valuta possa essere applicata sull'asta, ossia:

$$\sigma_{amm} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi\ r^2}$$

Complessivamente, si ha:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = C_{s,eff,inst} \frac{F}{\pi r^2}$$

Ricordando il valore del λ valido per corpi cilindrici appoggiati ($\lambda = 2l_{asta}/r$):

$$\frac{\pi^2 E r^2}{4 l_{asta}^2} = C_{s,eff,inst} \frac{F}{\pi r^2}$$

da cui:

$$C_{s,eff,inst} = \frac{\pi^3 E r^4}{4 F l_{asta}^2}$$

espressione che permette di valutare il coefficiente reale di sicurezza nei confronti della crisi per instabilità della sezione resistente. Dato il modello fisico valido in questo caso, il valore di $C_{s,eff,inst}$ dovrebbe essere superiore a 4.
Se $\lambda < \lambda_{min}$ (corpo *tozzo*) la crisi dell'asta avverrà per schiacciamento della sezione ossia prevarrà il meccanismo dello snervamento. In tal caso, con approccio simile a quello utilizzato nel caso precedente, detto *coefficiente di sicurezza effettivo a snervamento* $C_{s,eff,sn}$ il rapporto tra la sollecitazione di snervamento e quella massima ritenuta ammissibile nel materiale, si ha:

$$C_{s,eff,sn} = \frac{\sigma_{sn}}{\sigma_{amm}} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{sn} = C_{s,eff,inst} \cdot \sigma_{amm}$$

e

$$\sigma_{amm} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

da cui:

$$C_{s,eff,sn} = \frac{\pi r^2 \sigma_{sn}}{F}$$

Dato il modello fisico relativo alla crisi per schiacciamento/snervamento, in linea generale, il valore di $C_{s,eff,sn}$ può essere ritenuto accettabile se maggiore od uguale a 2.

3.2 – asta caricata a compressione: dimensionamento

Nel caso che il sistema asta - pistone - cilindro sia da progettare, nel calcolo della sezione dell'asta occorre adottare una procedura differente in quanto, per sistema caricato a compressione, non sarà possibile calcolare direttamente la σ_{cr} che dipende dal raggio - non ancora definito - dell'asta.
Va considerato che quando c'è carico di punta il modello fisico di riferimento è meno stabile di quello riferito alla sola caricazione per trazione; ciò, in buona sostanza, dipende dal fatto che può insorgere disassamento tra le forze agenti, in contrasto con l'ipotesi di applicabilità della teoria di Eulero e conseguente esigenza di applicazione di un coefficiente di sicurezza più elevato.
Per il proporzionamento dell'asta si può procedere facendo l'ipotesi di lavoro che la crisi sia dovuta ad uno dei due meccanismi, dimensionare il raggio dell'asta e verificare se la snellezza risultante è tale da giustificare l'ipotesi fatta. In caso di verifica affermativa il raggio calcolato può essere confermato; in caso contrario, la crisi era dovuta all'altro meccanismo ed il valore del raggio dell'asta deve essere calcolato con le relative espressioni.
Si supponga, dunque, che l'asta sollecitata a compressione sia destinata alla crisi per instabilità; a causa della incertezza insita in questo modello fisico, la valutazione della massima sollecitazione ammissibile σ_{amm} deve necessariamente contemplare un coefficiente di sicurezza (all'instabilità) $C_{s,inst}$ più alto di quello definibile per il caso dello snervamento. In genere si adotta un valore compreso tra 4 e 5, a seconda dei casi reali di applicazione.

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_{cr}}{C_{s,inst}} \Rightarrow \sigma_{cr} = \sigma_{amm} \cdot C_{s,inst}$$

Ricordando l'espressione della σ_{cr} e che la massima sollecitazione ammissibile σ_{amm} è pari al rapporto tra il carico (la forza applicata) nelle condizioni nominali e l'area della sezione dell'asta, si ha:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{F}{A} \cdot C_{s,inst} = \frac{F}{\pi r^2} \cdot C_{s,inst}$$

e, essendo $\lambda = 2\, l_{asta}/r$:

$$\frac{\pi^2 r^2 E}{4\, l_{asta}^2} = \frac{F}{\pi r^2} \cdot C_{s,inst}$$

da cui:

$$r^4 = \frac{4\, C_{s,inst}\, F\, l_{asta}^2}{\pi^3 E}$$

e, in definitiva:

$$r = \sqrt[4]{\frac{4\, C_{s,inst}\, F\, l_{asta}^2}{\pi^3 E}}$$

Il proporzionamento dell'asta può essere così condotto - nell'ipotesi di lavoro di crisi per carico di punta - valutando il raggio nel modo visto. Per validare il risultato, con il valore di *r* ottenuto occorre ricalcolare il valore della snellezza λ risultante per l'asta e confrontarlo con quello di λ_{lim} (~80 se l'acciaio scelto ha $E \cong 2.0 \cdot 10^{11}\, Pa$ e $\sigma_{sn} \cong 315\, {}^{N}/_{mm^2} \cong 3.15 \cdot 10^8\, Pa$).
Il risultato in termini di *r* può essere confermato se risulta $\lambda > \lambda_{lim}$; in caso contrario basterà calcolare il valore di *r* attraverso la formula dello snervamento come è stato fatto in quel caso, con ricavo dell'espressione di calcolo del raggio pari a:

$$r = \sqrt{\frac{F \cdot C_{s,sn}}{\pi\, \sigma_{sn}}}$$

Una volta calcolato il raggio dell'asta, occorre determinare quello della corona del pistone. Trattandosi di carico a compressione, l'area su cui agisce la pressione p_A è tutta quella della corona del pistone per cui, con le stesse posizioni adottate nel caso del carico a trazione, si ha:

$$F = p_A \cdot \frac{\pi d_p^2}{4} \quad \Rightarrow \quad d_p = \sqrt{\frac{4F}{\pi p_A}}$$

Esempio 1

Si supponga di dover proporzionare un pistone oleodinamico (sezione dell'asta ed area di corona e base del pistone) in acciaio ad elevata resistenza (σ_{sn} = 315 N/mm^2 = 3.15 x 10^8 Pa), caricato a trazione con un carico di 100 kN. La pressione d'esercizio sia di 180 bar.

Assumendo un coefficiente di sicurezza C_s pari a 2, si può determinare l'area resistente necessaria perché non si superi la $\sigma_{amm} = \sigma_{sn}/C_s$ attraverso l'espressione:

$$\sigma_{amm} = \frac{F}{A} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F}{\sigma_{amm}} = \frac{10^5}{1{,}5 \cdot 10^8} = 6.7 \cdot 10^{-4}\, m^2$$

da cui si può ricavare il diametro minimo da dare all'asta del pistone:

$$d_a = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0.029\, m = 29\, mm$$

Con questo valore del diametro dell'asta, si può calcolare quello del pistone ricordando che, quando il pistone è spinto dalla sua base, l'area su cui l'olio può esercitare la sua pressione è pari alla sezione anulare avente per diametro interno quello dell'asta. Vale l'espressione:

$$A = \frac{F}{\Delta p} = \frac{10^5}{1{,}8 \cdot 10^7} = 5.6 \cdot 10^{-3}\, m^2$$

e, siccome A è l'area della corona circolare di diametri interno ed esterno risp. pari a d_a e d_p, si ha:

$$A = \frac{\pi (d_p^2 - d_a^2)}{4} \quad \Rightarrow \quad d_p = \sqrt{\frac{4A}{\pi} + d_a^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5.6 \cdot 10^{-3}}{\pi} + 0.029^2} = 0.089\, m = 89\, mm$$

Esempio 2

Si supponga di dover proporzionare un pistone oleodinamico (sezione dell'asta ed area di corona e base del pistone) in acciaio ad elevata resistenza (σ_{sn} = 315 N/mm^2 = 3.15 x 10^8 Pa) caricato a compressione con un carico di 100 kN, con asta di lunghezza pari a 2 m e supponendo vincoli di appoggio alle estremità. La pressione d'esercizio sia di 180 bar.

Considerando un C_s pari a 4, l'espressione di calcolo del raggio con il criterio esposto, da:

$$r = \sqrt[4]{\frac{4\, C_s\, F\, l^2_{asta}}{\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 4 \cdot 10^5\, 2^2}{\pi^3\, 2.0 \cdot 10^{11}}} = 0.0319\, m \cong 32\, mm$$

ed un diametro pari a:

$$d_a = 2 \cdot r = 64\, mm$$

Il λ risulta pari a

$$\lambda = \frac{2\, l_{asta}}{r} = \frac{4}{0.032} = 125$$

il che conferma l'applicabilità dei criteri di Eulero. Si noti che il calcolo a trazione avrebbe portato alla valutazione di un diametro pari a 29 mm.
Il diametro del pistone va calcolato tenendo conto del fatto che la pressione dell'olio agisce, in questo caso, sulla corona per cui si avrà:

$$A = \frac{F}{\Delta p} = \frac{10^5}{1{,}8 \cdot 10^7} = 5.6 \cdot 10^{-3}\, m^2$$

ove A è l'area della corona del pistone per cui:

$$A = \frac{\pi\, d_p^2}{4} \quad \Rightarrow \quad d_p = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5.6 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0.084\, m = 84\, mm$$

Esempio 3

Si supponga di dover proporzionare un pistone oleodinamico (sezione dell'asta ed area di corona e base del pistone) in acciaio ad elevata resistenza (σ_{sn} = 315 N/mm^2 = 3.15 x 10^8 Pa) la cui asta è lunga due metri e deve reggere il carico derivante dal sollevamento di un portellone di poppa controllato attraverso funi e una demoltiplica 1:3. Il carico complessivo massimo da reggere è di 20 t, la pressione d'esercizio di 250 bar

Data la demoltiplica, il carico complessivo sul pistone varrà

$$T = 3 \cdot 2.0 \cdot 10^4 \cdot 9.807 \cong 5.9 \cdot 10^5\, N \cong 590\ kN$$

Considerando un C_s pari a 4, l'espressione di calcolo del raggio con il criterio esposto, da:

$$r = \sqrt[4]{\frac{4\, C_s\ F\ l^2{}_{asta}}{\pi^3\, E}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 4 \cdot 5.9 \cdot 10^5\, 2^2}{\pi^3\, 2.0 \cdot 10^{11}}} = 0.0496\, m \cong 50\, mm$$

ed un diametro pari :

$$d_a = 2 \cdot r = 100\, mm$$

Il λ risulta pari a

$$\lambda = \frac{2 l_{asta}}{r} = \frac{4}{0.050} = 80$$

ai limiti dell'applicabilità dei criteri di Eulero (il calcolo a trazione - effettuato con un coefficiente di sicurezza minore - avrebbe portato alla valutazione di un diametro poco inferiore: 71 mm).
Il diametro del pistone va calcolato tenendo conto del fatto che la pressione dell'olio agisce, anche in questo caso, sulla corona per cui si avrà:

$$A = \frac{F}{\Delta p} = \frac{5.9 \cdot 10^5}{2{,}5 \cdot 10^7} = 2.4 \cdot 10^{-2}\, m^2$$

ove A è l'area della corona del pistone per cui:

$$A = \frac{\pi d_p^2}{4} \quad \Rightarrow \quad d_p = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2.4 \cdot 10^{-2}}{\pi}} = 0.17\, m = 170\ mm$$

Esempio 4

Si supponga di dover proporzionare un pistone oleodinamico (sezione dell'asta ed area di corona e base del pistone) in acciaio ad elevata resistenza (σ_{sn} = 315 N/mm^2 = 3.15 x 10^8 Pa) la cui asta è lunga 0.5 metri ed è sollecitata a compressione da un carico di 300 kN; la pressione d'esercizio è di 180 bar

Considerando un C_s pari a 4, l'espressione di calcolo del raggio con il criterio esposto, da:

$$r = \sqrt[4]{\frac{4\, C_s\ F\ l^2_{asta}}{\pi^3\, E}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 4 \cdot 3.0 \cdot 10^5\, 0.5^2}{\pi^3\, 2.0 \cdot 10^{11}}} = 0.021 m \cong 21 mm$$

ed un diametro pari a:

$$d_a = 2 \cdot r = 42\, mm$$

Il λ risulta pari a

$$\lambda = \frac{2 l_{asta}}{r} = \frac{1}{0.021} = 48$$

Questo valore del λ non giustifica l'applicazione della teoria di Eulero; il corpo è tozzo al punto da generare dapprima crisi per snervamento.
Si calcola allora il diametro resistente con il criterio dello snervamento a compressione.
Assumendo un coefficiente di sicurezza C_s pari a 2 (il che, per acciaio con σ_{sn} = 315 N/mm^2, genera una $\sigma_{amm} \cong 150$ N/mm^2) si può determinare l'area resistente necessaria perché non si superi la σ_{amm} = σ_{sn}/C_s attraverso l'espressione:

$$\sigma_{amm} = \frac{F}{A} \Rightarrow A = \frac{F}{\sigma_{amm}} = \frac{3.0 \cdot 10^5}{1{,}5 \cdot 10^8} = 2.0 \cdot 10^{-3}\, m^2$$

da cui si può ricavare il diametro minimo da dare all'asta del pistone:

$$d_a = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0.050\, m = 50\, mm$$

che, come prevedibile nonostante l'uso di un coefficiente di sicurezza inferiore, è maggiore di quella che sarebbe stata determinata applicando il criterio di Eulero, a confermare la circostanza che la crisi avverrebbe in questo caso per snervamento e non per instabilità.
Quanto al diametro del pistone, si ha:

$$A = \frac{F}{\Delta p} = \frac{3.0 \cdot 10^5}{1{,}8 \cdot 10^7} = 1.7 \cdot 10^{-2}\, m^2 \quad \Rightarrow \quad d_p = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1.7 \cdot 10^{-2}}{\pi}} = 0.14\, m = 140\ mm$$