

## Corso di Calcolatori Elettronici I A.A. 2010-2011

---

# Algebra di Boole

Lezione 5

Prof. Roberto Canonico



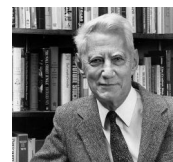
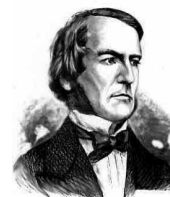
Università degli Studi di Napoli Federico II  
Facoltà di Ingegneria  
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (allievi A-DE+Q-Z)  
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

---

## Da Boole a Shannon

---

- L'algebra di Boole fu introdotta nel 1854 come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica
  - George Boole (1815-1864)
    - *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities (1854)*
  - Il suo uso per descrivere reti binarie di commutazione si deve a Claude Shannon
    - *A symbolic analysis of relay and switching circuits (1938)*
- 



## Algebra di Boole

- L'Algebra di Boole può essere vista come un'algebra astratta definita su un supporto  $K = \{0,1\}$  e tre operazioni

– AND ( $\cdot$ ):  $K \times K \rightarrow K$

– OR ( $+$ ):  $K \times K \rightarrow K$

– NOT ( $\neg$ ):  $K \rightarrow K$

x	y	x AND y	x	y	x OR y	x	NOT x
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

## Algebra di Boole: proprietà (1)

- Proprietà commutativa:  
 $x \text{ AND } y = y \text{ AND } x$        $x \text{ OR } y = y \text{ OR } x$
- Proprietà associativa:  
 $(x \text{ AND } y) \text{ AND } z = x \text{ AND } (y \text{ AND } z)$   
 $(x \text{ OR } y) \text{ OR } z = x \text{ OR } (y \text{ OR } z)$ 
  - per la proprietà associativa posso definire AND e OR a più di 2 operandi
    - es.  $x \text{ AND } y \text{ AND } z = (x \text{ AND } y) \text{ AND } z = x \text{ AND } (y \text{ AND } z)$
- Proprietà di idempotenza:  
 $x \text{ AND } x = x$        $x \text{ OR } x = x$
- Proprietà di assorbimento:  
 $x \text{ AND } (x \text{ OR } y) = x$        $x \text{ OR } (x \text{ AND } y) = x$

## Algebra di Boole: proprietà (2)

---

- Proprietà distributiva
    - $x \text{ AND } (y \text{ OR } z) = (x \text{ AND } y) \text{ OR } (x \text{ AND } z)$
    - $x \text{ OR } (y \text{ AND } z) = (x \text{ OR } y) \text{ AND } (x \text{ OR } z)$
  - Proprietà di convoluzione
    - $\text{NOT } (\text{NOT } x) = x$
  - Proprietà del minimo e del massimo:
    - $x \text{ AND } 0 = 0$
    - $x \text{ OR } 1 = 1$
- 

## Algebra di Boole come reticolo (1)

---

- Un'algebra astratta è una terna  $\langle K, \cdot, + \rangle$  costituita da un insieme  $K$  (sostegno) sul quale sono definite due leggi binarie di composizione interna "+" e "·"
    - $\cdot: K \times K \rightarrow K$
    - $+: K \times K \rightarrow K$
  - Un'algebra astratta  $\langle K, +, \cdot \rangle$  si dice *reticolo* se per ogni coppia di elementi di  $K$  le operazioni "+" e "·" soddisfano le proprietà commutativa, associativa, di assorbimento e di idempotenza
  - Un reticolo nel quale vale la proprietà distributiva sia di "+" rispetto a "·" che di "·" rispetto a "+" si dice *reticolo distributivo*
-

## Proprietà dei reticoli

- I reticoli sono *ordinati*, ovvero posseggono una relazione d'ordine "≤" così definita

$$x \leq^{\text{def}} y \Leftrightarrow x + y = y \Leftrightarrow x \cdot y = x$$

- ◆ Ricordiamo che una relazione d'ordine "≤" deve godere delle seguenti proprietà:
  - riflessiva:  $x \leq x$
  - antisimmetrica:  $x \leq y$  e  $y \leq x \Rightarrow x = y$
  - transitiva:  $x \leq y$  e  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

## Algebra di Boole come algebra astratta

- Un reticolo distributivo si dice *dotato di minimo e massimo assoluti* se in  $K$  sono presenti due elementi - che indicheremo con 0 e 1 rispettivamente - i quali verificano la *proprietà del minimo e massimo* per ogni elemento  $a$  di  $K$ :

$$a \cdot 0 = 0 \quad (0 \leq a) \qquad a + 1 = 1 \quad (a \leq 1)$$

- Un reticolo distributivo si dice *complementato* se per ogni elemento  $a$  di  $K$  esiste ed è unico un elemento (che diremo *complemento di  $a$* ) ed indicheremo con  $\neg a$ ) per il quale è valida la proprietà del complemento:

$$a \cdot \neg a = 0 \qquad a + \neg a = 1$$

- **Un reticolo distributivo, dotato di minimo e massimo assoluti e complementato, si dice un'algebra di Boole**
  - L'algebra a due valori definita nelle slide precedenti ne rappresenta un caso particolare

## AdB come reticolo: postulati definitori

<b>Commutativa</b>	<b>P1</b>	$a+b=b+a$	<b>P'1</b>	$a \cdot b=b \cdot a$
<b>Associativa</b>	<b>P2</b>	$(a+b)+c=a+(b+c)$	<b>P'2</b>	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
<b>Idempotenza</b>	<b>P3</b>	$(a+a)=a$	<b>P'3</b>	$(a \cdot a)=a$
<b>Assorbimento</b>	<b>P4</b>	$a+(a \cdot b)=a$	<b>P'4</b>	$a \cdot (a+b)=a$
<b>Distributiva</b>	<b>P5</b>	$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$	<b>P'5</b>	$a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)$
<b>Min e max</b>	<b>P6</b>	$a \cdot 0=0$	<b>P'6</b>	$a+1=1$
<b>Complemento</b>	<b>P7</b>	$a \cdot (\bar{a})=0$	<b>P'7</b>	$a+(\bar{a})=1$

## Legge di dualità

- Da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra per *dualità*, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi 0 ed 1 il rispettivo duale
- In altre parole, i 14 postulati impiegati per definire l'algebra non sono tutti indipendenti fra loro

## Teorema di De Morgan

---

$$\text{NOT } (x \text{ AND } y) = (\text{NOT } x) \text{ OR } (\text{NOT } y)$$

$$\text{NOT } (x \text{ OR } y) = (\text{NOT } x) \text{ AND } (\text{NOT } y)$$


---

## AdB: altre proprietà

---

- $0$  ed  $1$  sono l'uno il complemento dell'altro

$$\neg 0 = 1 \quad \neg 1 = 0$$

- *Convoluzione*: negando due volte un elemento si ottiene l'elemento stesso

$$\neg(\neg a) = a$$

- $0$  è l'elemento neutro della somma

$$a + 0 = a$$

- $1$  è l'elemento neutro del prodotto

$$a \cdot 1 = a$$


---

## Assorbimento del complemento

$$a + \bar{a}b = a + b$$

- Per la dimostrazione usate la proprietà distributiva ed infine il complemento

$$\underline{a + \bar{a}b} = \underline{(a + \bar{a})(a + b)} \quad (P5)$$

$$a + \bar{a}b = (a + b) \quad (P7)$$

## Teorema di De Morgan

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \quad (1)$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad (2)$$

$$(a + b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 1 \quad (1.1)$$

$$(a + b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0 \quad (1.2)$$

(1.1) *Dimostrazione*

$$\begin{aligned} a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} &= a + \bar{a} \cdot \bar{b} + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = && (P1, P3) \\ &= a + \bar{b} + b + \bar{a} = && (ass.comp) \\ &= a + \bar{a} + b + \bar{b} = && (P1) \\ &= 1 + 1 = 1 && (P'7, P'6) \end{aligned}$$

(1.2) *Dimostrazione*

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} &= a \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} = && (P5) \\ &= 0 \cdot \bar{b} + 0 \cdot \bar{a} = && (P7) \\ &= 0 + 0 = 0 && (P6, P3) \end{aligned}$$

La (2) vale per dualità

## Principio di eliminazione

---

- Nell'algebra di Boole ***non vale il principio di eliminazione***
  - $x+y=x+z$  non implica necessariamente  $y=z$
  - L'implicazione vale se è verificata la condizione aggiuntiva  $x \cdot y = x \cdot z$
- 

## Algebre di Boole (al plurale)

---

- La definizione di AdB come reticolo non specifica quale sia  $K$  e come siano definite le operazioni “+”, “·” e “¬”
    - Specifica soltanto un insieme di proprietà che devono essere soddisfatte da tali operazioni
  - Sono così possibili diversi modelli di algebra di Boole , uno dei quali è quello introdotto all'inizio
  - Altri possibili modelli di algebra di Boole:
    - l'algebra dei circuiti
    - l'algebra della logica delle proposizioni
    - l'algebra degli insiemi
-



## Algebra della logica

- L'insieme  $K=\{F,V\}$  su cui siano definite le operazioni
  - Congiunzione ( $\wedge$ )
  - Disgiunzione ( $\vee$ )
  - Negazione ( $\neg$ )

è un algebra di Boole con  $F = 0$ ,  $V = 1$ ,  
 congiunzione =  $\cdot$ , disgiunzione =  $+$ , negazione =  $\neg$

x	y	$x \wedge y$	x	y	$x \vee y$	x	$\neg x$
F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V		
V	V	V	V	V	V		

## Algebra delle logica

- Due funzioni notevoli nell'algebra delle proposizioni:

– Funzione equivalenza  $a \Leftrightarrow b$   
 $f(a,b) = ab + \bar{a}\bar{b}$

– Funzione implicazione  $a \Rightarrow b, f(a,b) = \bar{a} + b$

*Si dice che x implica y se e solo se dalla verità di x (antecedente) scaturisce necessariamente la verità di y (conseguente). In termini algebrici, essendo l'implicazione falsa se e solo se x è vera e y è falsa, applicando il Teorema di De Morgan, si ha*

$$\overline{x \Rightarrow y} = x\bar{y}$$

$$x \Rightarrow y = \bar{x} + y$$

## Algebra della logica

- Se  $x \Rightarrow y$  è vera, allora  $\bar{x} + y = 1$

$$\bar{x} + y = \bar{x} \cdot \bar{y} + y \quad (\text{ass.compl})$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} + xy + y \quad (P4)$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} + xy + yy \quad (P3)$$

$$= \overline{(x+y)} \cdot \bar{y} + (x+y) \cdot y = 1 \quad (\text{DeMorgan})$$



per le proprietà dell'equivalenza  
 $ab + \bar{a}b$

$$x + y = y \Leftrightarrow x \leq y$$

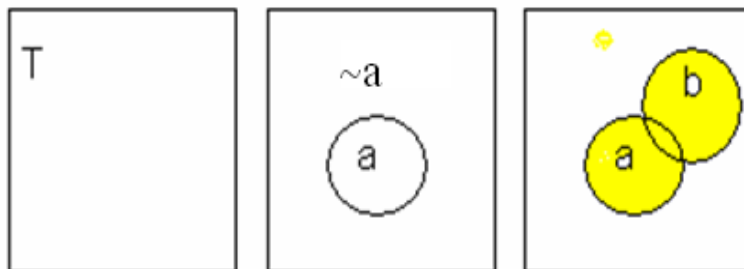


***l'implicazione è la relazione d'ordine nell'algebra della logica***

## Algebra degli insiemi

Insiemi		Modello matematico	
$\cup$	unione	+	somma
$\cap$	intersezione	$\cdot$	prodotto
$\sim A$	complemento	$\bar{a}$	complemento
$\emptyset$	insieme vuoto	0	minimo assoluto
T	insieme "totale"	1	massimo assoluto

## Algebra degli insiemi (2)



a) Insieme universo

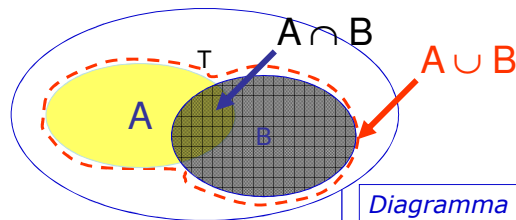
b)  $\sim a$ c)  $a \cup b$ 

21

## Algebra degli insiemi (3)

- Dati due insiemi  $A, B \in T$ , sono definite le operazioni di
  - Unione ( $\cup$ )
  - Intersezione ( $\cap$ )
  - Complemento ( $\sim$ )

$$\begin{aligned} a \cap \Phi &= \Phi \\ a \cup T &= T \end{aligned}$$



la sestupla  $\langle K, \cup, \cap, \sim, \Phi, T \rangle$  è un'algebra di Boole  
ove:

- $K$  indica l'insieme delle parti di  $T$
  - $\Phi$  indica l'insieme vuoto
- La relazione d'ordine  $\leq$  equivale alla relazione di inclusione tra insiemi

## Teorema di Stone

- Ogni algebra di Boole è rappresentabile su un'algebra di insiemi
- Il modello degli insiemi (equivalentemente i diagrammi di Venn) può essere assunto come strumento per verificare o dimostrare proprietà di una qualsiasi algebra di Boole

23

## Circuiti logici

- I circuiti logici sono circuiti elettronici nei quali una grandezza elettrica ai morsetti di ingresso e di uscita può assumere solo due valori, convenzionalmente rappresentati con i due elementi dell'algebra di Boole 0 ed 1.
- In elettronica digitale si studia come realizzare circuiti elettronici per il quale il legame tra ingressi ed uscite corrisponde a quello delle operazioni fondamentali AND, OR e NOT dell'algebra di Boole
  - PORTE LOGICHE
- Nelle reti logiche *unilaterali*, le uscite della rete corrispondono a valori di grandezze elettriche misurate in opportuni punti del circuito; il flusso dell'elaborazione procede fisicamente in un'unica direzione, dai segnali di ingresso verso i segnali di uscita
  - Es. la d.d.p. misurata rispetto a massa
- Nelle reti logiche *bilaterali*, invece, l'uscita della rete è determinata dalla presenza o dall'assenza di "contatto" tra due punti della rete.

## Segnali in circuiti elettronici digitali

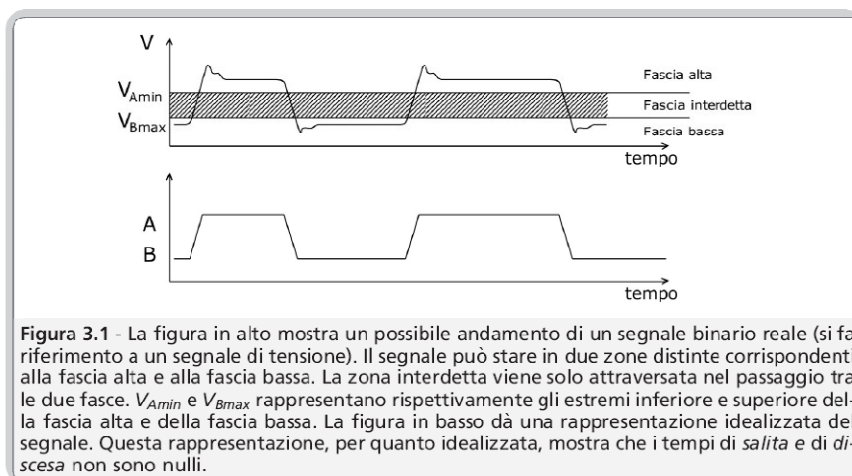
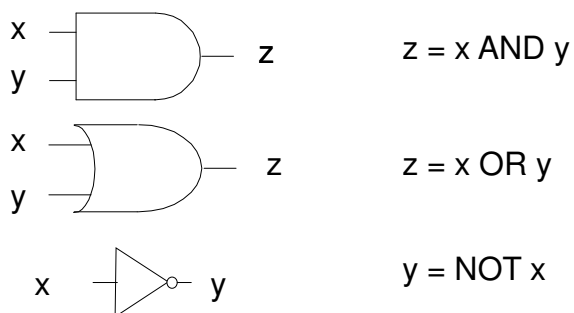


Figura 3.1 - La figura in alto mostra un possibile andamento di un segnale binario reale (si fa riferimento a un segnale di tensione). Il segnale può stare in due zone distinte corrispondenti alla fascia alta e alla fascia bassa. La zona interdetta viene solo attraversata nel passaggio tra le due fasce.  $V_{Amin}$  e  $V_{Bmax}$  rappresentano rispettivamente gli estremi inferiore e superiore della fascia alta e della fascia bassa. La figura in basso dà una rappresentazione idealizzata del segnale. Questa rappresentazione, per quanto idealizzata, mostra che i tempi di *salita* e di *discesa* non sono nulli.

da: G. Bucci. Calcolatori Elettronici – Architettura e organizzazione. © McGraw-Hill, 2009

## Porte logiche o gate

Circuiti elettronici che realizzano le operazioni fondamentali



## Un esempio di rete logica

$$y = b \cdot c \cdot (a \cdot \bar{d} + \bar{b} + c) + \bar{c} \cdot (d + \bar{a}) \cdot (b + c)$$

