Corso di Calcolatori Elettronici I
A.A. 2012-2013

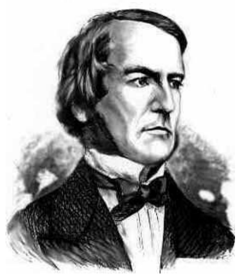
Algebra di Boole

Prof. Roberto Canonico

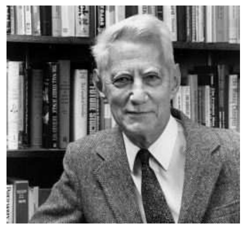
Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell'Inforazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (allievi A-DE)
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Da Boole a Shannon

- L'algebra di Boole fu introdotta nel 1854 come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica
- George Boole (1815-1864)
  - *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities (1854)*



- Il suo uso per descrivere reti binarie di commutazione si deve a Claude Shannon
  - *A symbolic analysis of relay and switching circuits (1938)*



Algebra di Boole

- L'Algebra di Boole può essere vista come un'algebra astratta definita su un supporto K = {0,1} e tre operazioni
  - AND (·): $K \times K \rightarrow K$
  - OR (+): $K \times K \rightarrow K$
  - NOT (¬): $K \rightarrow K$

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	NOT x
0	1
1	0

Algebra di Boole: proprietà (1)

- Proprietà commutativa:
  x AND y = y AND x   x OR y = y OR x
- Proprietà associativa:
  (x AND y) AND z = x AND (y AND z)
  (x OR y) OR z = x OR (y OR z)
  - per la proprietà associativa posso definire AND e OR a più di 2 operandi
    - es. x AND y AND z = (x AND y) AND z = x AND (y AND z)
- Proprietà di idempotenza:
  x AND x = x   x OR x = x
- Proprietà di assorbimento:
  x AND (x OR y) = x   x OR (x AND y) = x

Algebra di Boole: proprietà (2)

- Proprietà distributiva
  x AND (y OR z) = (x AND y) OR (x AND z)
  x OR (y AND z) = (x OR y) AND (x OR z)
- Proprietà di convoluzione
  NOT (NOT x) = x
- Proprietà del minimo e del massimo:
  x AND 0 = 0
  x OR 1 = 1

Algebra di Boole come reticolo (1)

- Un'algebra astratta è una terna <K, ·,+> costituita da un insieme *K* (sostegno) sul aule sono definite due leggi binarie di composizione interna "+" e "·"
  $\cdot$: $K \times K \rightarrow K$
  $+$: $K \times K \rightarrow K$
- Un'algebra astratta <K,+, ·> si dice *reticolo* se per ogni coppia di elementi di K le operazioni "+" e "·" soddisfano le proprietà commutativa, associativa, di assorbimento e di idempotenza
- Un reticolo nel quale vale la proprietà distributiva sia di "+" rispetto a "·" che di "·" rispetto a "+" si dice *reticolo distributivo*

Proprietà dei reticoli

- I reticoli sono *ordinati*, ovvero posseggono una relazione d'ordine "≤" così definita

$$x \le y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x + y = y \Leftrightarrow x \cdot y = x$$

- Ricordiamo che una relazione d'ordine "≤" deve godere delle seguenti proprietà:
  - riflessiva: $x \le x$
  - antisimmetrica: $x \le y$ *e* $y \le x$ => $x = y$
  - transitiva: $x \le y$ *e* $y \le z$ => $x \le z$

Algebra di Boole come algebra astratta

- Un reticolo distributivo si dice *dotato di minimo e massimo assoluti* se in K sono presenti due elementi - che indicheremo con 0 e 1 rispettivamente - i quali verificano la *proprietà del minimo e massimo* per ogni elemento a di K:

$$a \cdot 0 = 0 \ \ (0 \le a) \qquad\qquad a + 1 = 1 \ (a \le 1)$$

- Un reticolo distributivo si dice *complementato* se per ogni elemento a di K esiste ed è unico un elemento (che diremo *complemento di a* ed indicheremo con ¬a) per il quale è valida la proprietà del complemento:

$$a \cdot \neg a = 0 \qquad\qquad a + \neg a = 1$$

- **Un reticolo distributivo, dotato di minimo e massimo assoluti e complementato, si dice un'algebra di Boole**
  - **L'algebra a due valori definita nelle slide precedenti ne rappresenta un caso particolare**

AdB come reticolo: postulati definitori

Commutativa	**P1**	**a+b=b+a**	**P'1**	**a•b=b•a**
Associativa	**P2**	**(a+b)+c =a+(b+c)**	**P'2**	**(a•b) •c=a• (b•c)**
Idempotenza	**P3**	**(a+a)=a**	**P'3**	**(a•a)=a**
Assorbimento	**P4**	**a+(a•b)=a**	**P'4**	**a• (a+b)=a**
Distributiva	**P5**	**a• (b+c)=a•b+a•c**	**P'5**	**a+(b•c)=(a+b)•(a+c)**
Min e max	**P6**	**a•0=0**	**P'6**	**a+1=1**
Complemento	**P7**	**a•(ā)=0**	**P'7**	**a+(ā)=1**

Legge di dualità

- Da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra per *dualità*, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi 0 ed 1 il rispettivo duale
- In altre parole, i 14 postulati impiegati per definire l'algebra non sono tutti indipendenti fra loro

Teorema di De Morgan

NOT (x AND y) = (NOT x) OR (NOT y)

NOT (x OR y) = (NOT x) AND (NOT y)

AdB: altre proprietà

- *0* ed *1* sono l'uno il complemento dell'altro

$$\neg 0 = 1 \qquad\qquad \neg 1 = 0$$

- *Convoluzione*: negando due volte un elemento si ottiene l'elemento stesso

$$\neg(\neg\, a) = a$$

- *0* è l'elemento neutro della somma

$$a + 0 = a$$

- *1* è l'elemento neutro del prodotto

$$a \cdot 1 = a$$

Assorbimento del complemento

$$a+\overline{a}b=a+b$$

- Per la dimostrazione usate la proprietà distributiva ed infine il complemento

$a+\bar{a}b=(a+\bar{a})(a+b)$ (P5)

$a+\bar{a}b=(a+b)$ (P7)

Teorema di De Morgan

$\overline{a+b} = \overline{a}\cdot\overline{b}$ (1)

$\overline{a\cdot b} = \overline{a}+\overline{b}$ (2)

$(a+b)+(\overline{a}\cdot\overline{b})=1$ *(1.1)*

$(a+b)\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})=0$ *(1.2)*

(1.1) *Dimostrazione*

$a+b+\overline{a}\cdot\overline{b}=a+\overline{a}\cdot\overline{b}+b+\overline{a}\cdot\overline{b}=$ $(P1,P3)$

$=a+\overline{b}+b+\overline{a}=$ $(ass.comp)$

$=a+\overline{a}+b+\overline{b}=$ $(P1)$

$=1+1=1$ $(P'7,P'6)$

(1.2) Dimostrazione

$(a+b)\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}=a\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}+b\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}=$ $(P5)$

$=0\cdot\overline{b}+0\cdot\overline{a}=$ $(P7)$

$=0+0=0$ $(P6,P3)$

La (2) vale per dualità

Principio di eliminazione

- Nell'algebra di Boole ***non vale il principio di eliminazione***
- $x+y=x+z$ non implica necessariamente $y=z$
- L'implicazione vale se è verificata la condizione aggiuntiva $x \cdot y = x \cdot z$

Algebre di Boole (al plurale)

- La definizione di AdB come reticolo non specifica quale sia K e come siano definite le operazioni "+" , "·" e "¬"
  - Specifica soltanto un insieme di proprietà che devono essere soddisfatte da tali operazioni
- Sono così possibili diversi modelli di algebra di Boole , uno dei quali è quello introdotto all'inizio
- Altri possibili modelli di algebra di Boole:
  - l'algebra dei circuiti
  - l'algebra della logica delle proposizioni
  - l'algebra degli insiemi

Algebra della logica

- L'insieme K={F,V} su cui siano definite le operazioni
  - Congiunzione(^)
  - Disgiunzione (v)
  - Negazione (¬)

è un algebra di Boole con F = 0, V = 1,
congiunzione = · , disgiunzione = +, negazione = ¬

x	y	x ^ y
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

x	y	x v y
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

x	¬ x
F	V
V	F

Algebra della logica

- a v (¬a) = V
  Tertium non datur
- a ^ (¬a) = F
  Principio di non contraddizione

Algebra delle logica

- Due funzioni notevoli nell'algebra delle proposizioni:
  - Funzione equivalenza $$a \Leftrightarrow b$$ $$f(a,b) = ab + \bar{a}\bar{b}$$
  - Funzione implicazione $a \Rightarrow b,\ f(a,b) = \bar{a} + b$

Si dice che x implica y se e solo se dalla verità di x (antecedente) scaturisce necessariamente la verità di y (conseguente). In termini algebrici, essendo l'implicazione falsa se e solo se x è vera e y è falsa, applicando il Teorema di De Morgan, si ha

$$x \Rightarrow y = \overline{x\bar{y}}$$
$$x \Rightarrow y = \bar{x} + y$$

Algebra della logica

- Se $x \Rightarrow y$ è vera, allora $\bar{x} + y = 1$

$$\bar{x} + y = \bar{x} \cdot \bar{y} + y \qquad (ass.compl)$$
$$= \bar{x} \cdot \bar{y} + xy + y \qquad (P4)$$
$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} + xy + yy \qquad (P3)$$
$$= \overline{(x + y)} \cdot \bar{y} + (x + y) \cdot y = 1 \qquad (DeMorgan)$$

per le proprietà dell'equivalenza $ab + \bar{a}\bar{b}$

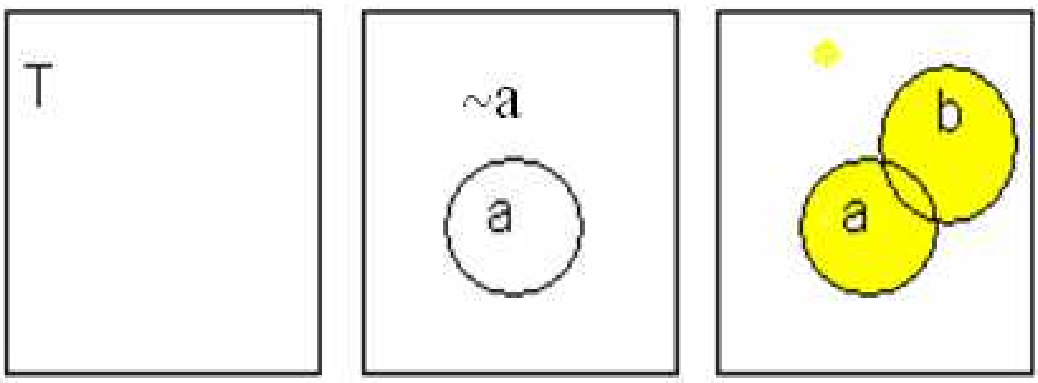
$$x + y = y \Leftrightarrow x \leq y$$

l'implicazione è la relazione d'ordine nell'algebra della logica

Algebra degli insiemi

Insiemi		Modello matematico	
$\cup$	unione	$+$	somma
$\cap$	intersezione	$\cdot$	prodotto
$\sim A$	complemento	$\overline{a}$	complemento
Φ	insieme vuoto	0	minimo assoluto
T	insieme "totale"	1	massimo assoluto

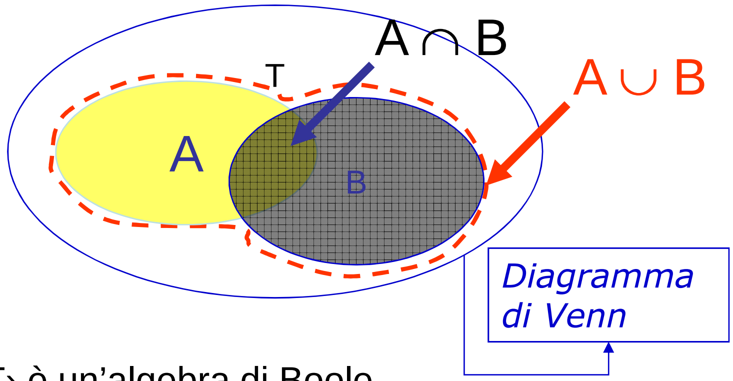
Algebra degli insiemi (2)



a) Insieme universo   b) ~a   c) $a \cup b$

Algebra degli insiemi (3)

- Dati due insiemi A,B $\in$ T,sono definite le operazioni di
  - Unione ($\cup$)
  - Intersezione ($\cap$)
  - Complemento (~)



$a \cap \Phi = \Phi$
$a \cup T = T$

la sestupla ‹K, $\cup$, $\cap$, ~,Φ,T› è un'algebra di Boole
ove:
- K indica l'insieme delle parti di T
- Φ indica l'insieme vuoto

- La relazione d'ordine ≤ equivale alla relazione di inclusione tra insiemi

Teorema di Stone

- Ogni algebra di Boole è rappresentabile su un'algebra di insiemi
- Il modello degli insiemi (equivalentemente i diagrammi di Venn) può essere assunto come strumento per verificare o dimostrare proprietà di una qualsiasi algebra di Boole

Circuiti logici

- I circuito logici sono circuiti elettronici nei quali una grandezza elettrica ai morsetti di ingresso e di uscita può assumere solo due valori , convenzionalmente rappresentati con i due elementi dell'algebra di Boole 0 ed 1.
- In elettronica digitale si studia come realizzare circuiti elettronici per il quale il legame tra ingressi ed uscite corrisponde a quello delle operazioni fondamentali AND, OR e NOT dell'algebra di Boole
  - PORTE LOGICHE
- Nelle reti logiche *unilaterali*, le uscite della rete corrispondono a valori di grandezze elettriche misurate in opportuni punti del circuito; il flusso dell'elaborazione procede fisicamente in un'unica direzione, dai segnali di ingresso verso i segnali di uscita
  - Es. la d.d.p. misurata rispetto a massa
- Nelle reti logiche *bilaterali*, invece, l'uscita della rete è determinata dalla presenza o dall'assenza di "contatto" tra due punti della rete.

Segnali in circuiti elettronici digitali

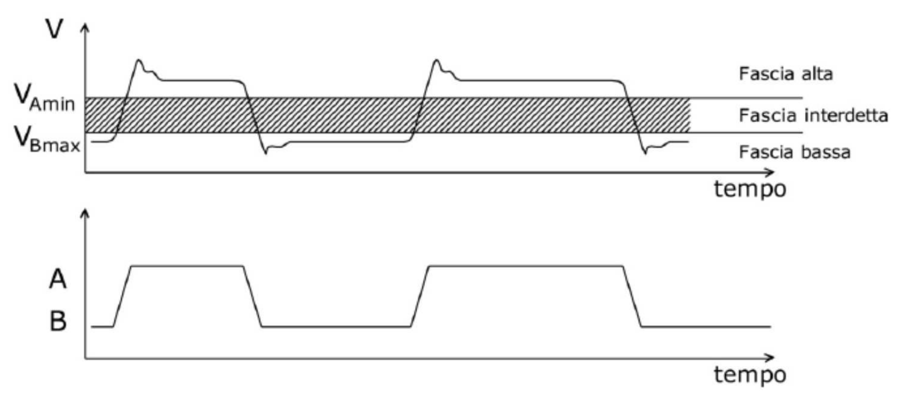
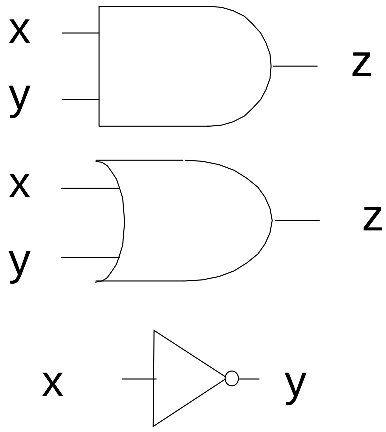


Figura 3.1 - La figura in alto mostra un possibile andamento di un segnale binario reale (si fa riferimento a un segnale di tensione). Il segnale può stare in due zone distinte corrispondenti alla fascia alta e alla fascia bassa. La zona interdetta viene solo attraversata nel passaggio tra le due fasce. V_{Amin} e V_{Bmax} rappresentano rispettivamente gli estremi inferiore e superiore della fascia alta e della fascia bassa. La figura in basso dà una rappresentazione idealizzata del segnale. Questa rappresentazione, per quanto idealizzata, mostra che i tempi di *salita* e di *discesa* non sono nulli.

da: G. Bucci. Calcolatori Elettronici – Architettura e organizzazione. © McGraw-Hill, 2009

Porte logiche o gate

Circuiti elettronici che realizzano le operazioni fondamentali



z = x AND y

z = x OR y

y = NOT x

Un esempio di rete logica

$$y = b \cdot c \cdot (a \cdot \overline{d} + \overline{b} + c) + \overline{c} \cdot (d + \overline{a}) \cdot (b + c)$$