Corso di Calcolatori Elettronici I
A.A. 2012-2013

Minimizzazione di funzioni booleane: espansione e copertura

Prof. Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (allievi A-DA)
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Ottimizzazione di funzioni combinatorie: espansione (1/3)

I metodi di ottimizzazione delle funzioni combinatorie sono basati sull'applicazione delle proprietà dell' Algebra di Boole:

- Assorbimento:

  P1+P2 = xP + !xP = (x+!x)P = P *in tal caso si dice che P1 e P2 generano* ***consenso***

- Idempotenza:

  P+P=P

Esse consentono di semplificare l'espressione di una funzione a partire dalla sua rappresentazione in forma canonica, che ne assicura la copertura in termini di somma di mintermini (o prodotto di maxtermini).

Ottimizzazione di funzioni combinatorie: espansione (2/3)

- L'applicazione delle proprietà di assorbimento ed idempotenza è alla base del processo di espansione, volto a trasformare l'espressione algebrica di una funzione in modo da costruire termini prodotto (o somma) costituiti dal minor numero possibile di letterali.

- Si introduce così il concetto di implicante, ossia un prodotto (o una somma) di letterali risultante dal processo di espansione, che assorbe più mintermini (maxtermini) semplificando la copertura di una funzione.

Ottimizzazione di funzioni combinatorie: espansione (3/3)

- Applicando ripetutamente il processo di espansione ad una funzione è possibile determinare un insieme di implicanti primi, ossia non ulteriormente semplificabili, candidati a far parte della copertura ottima della funzione.

- Fra gli implicanti primi è possibile estrarre un set di implicanti primi essenziali, necessari alla copertura poiché sono gli unici a coprire qualche "uno" della funzione; la copertura ottima conterrà dunque tali implicanti essenziali più un sottoinsieme degli implicanti primi rimanenti, scelti secondo un criterio di costo.

Tre tipologie di ottimizzazione dei circuiti combinatori

- Circuiti a 2 livelli e 1 uscita: metodo esatto per identificare i primi implicanti essenziali e un metodo esatto o approssimato (branch & bound) per identificare una copertura ottima.
- Circuiti a 2 livelli e più uscite: come prima e metodo approssimato per trovare la copertura ottima basato sull'identificazione di implicanti primi essenziali di ogni singola uscita.
- Circuiti a più livelli e più uscite: numerosi metodi approssimati per esplorare diverse alternative di area e ritardo (i più efficaci: sintesi ottima a 2 liv. di porzioni del circuito a 1 uscita.)

Costo Forma Minima: esempio

$$f = bc\,(a\overline{d} + \overline{b} + c) + \overline{c}\,(d + \overline{a})\,(b + c)$$

CL=11; CP=7; CI=17

$$f = \mathrm{b}\,(\overline{a} + \mathrm{c} + \mathrm{d})$$

CL=4; CP=2; CI=5

Alcuni presupposti teorici (1/3)

- Una funzione $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ può essere espressa come una somma contenente soltanto i suoi implicanti primi (forma *PI*)
  - Infatti, un implicante non primo A_i presente in una forma somma-di-prodotti della f può essere sempre eliminato osservando che si può aggiungere alla f un implicante primo P_i a sua volta implicato da A_i senza alterare la f
  - A_i è poi assorbito da P_i

Dimostrazione

- *Una funzione $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ può essere espressa come somma di soli suoi primi implicanti (o - per brevità - in forma PI).*

Dimostrazione

Se la funzione in forma elementare $y = \sum A_i$ contiene un termine A_k non PI si ha allora $A_k \Rightarrow P_j \Rightarrow y$ con P_j primo implicante;

P_j può essere aggiunto alla *y* e si ottiene $y = \sum A_k + P_j$;

essendo $A_k + P_j = P_j$, A_k può essere eliminato dalla forma di y, dove viene sostituito da P_j.

Il ragionamento va ripetuto per tutte le clausole non PI.

Alcuni presupposti teorici (2/3)

- Una forma elementare che minimizzi i valori dei costi CL e CI è una forma PI
- Fra le forme minime a 2 livelli che minimizzano CP ne esiste almeno una PI
- Sotto il vincolo di rete a 2 livelli, la forma minima va allora cercata tra le forme PI

DIM.: Fra tutte le forme elementari non PI, si scelga quella minima; se questa viene trasformata in una forma PI nella quale P_j sostituisce A_k, poiché P_j è una clausola di ordine inferiore ad A_k, diminuisce CL (diminuendo i letterali) e diminuisce CI (diminuendo il numero di variabili indipendenti della funzione componente) mentre CP non aumenta (diminuisce se era già nella sommatoria, resta inalterato altrimenti).

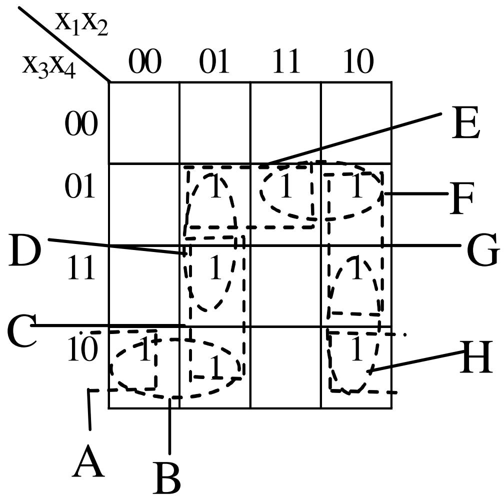
Alcuni presupposti teorici (3/3)

- Un implicante primo E_i di una funzione *f* è detto ***essenziale*** se è l'unico ad essere implicato da un mintermine di *f*
- In altri termini, E_i è l'unico a "*coprire*" un determinato mintermine della funzione
- Il ***nucleo N*** della funzione è la somma dei suoi implicanti primi essenziali

$$\boxed{N = \sum_{i=1}^{k} E_i}$$

- Ogni forma minima di f è del tipo ***f = N+R*** con **N** ed **R** eventualmente nulli

Funzioni cicliche (N=0)



N = 0

Metodi di Ottimizzazione

I Metodi di Ottimizzazione possono essere classificati in due macrocategorie:

- Metodi Esatti
  - Karnaugh
  - Quine-McCluskey
- Euristiche

Applicabili entrambi a reti a due o più livelli

Il metodo delle Mappe di Karnaugh

Si articola in due fasi:

1)**Espansione:** consiste nella ricerca degli implicanti primi, costituiti dai sottocubi di area massima sulle mappe

2)**Copertura:** consiste nel determinare il sottoinsieme minimo di implicanti primi della funzione in grado di coprire tutti i suoi mintermini

Procedura per la minimizzazione

1. Ricerca di tutti gli implicanti primi della funzione *f* da minimizzare;
2. Selezione degli implicanti primi essenziali, per individuare il **nucleo *N***;
3. Copertura della funzione, cioè determinazione della forma minima di *R*, da aggiungere ad *N* per minimizzare *f*

I passi 1) e 2) possono essere svolti con l'ausilio delle mappe di Karnaugh per funzioni fino a 5 variabili

Il metodo delle Mappe di Karnaugh - fase di espansione

I mintermini semplificabili sono rappresentati da celle adiacenti sulle mappe: l’ operazione di espansione viene effettuata a partire da ogni mintermine in tutte le direzioni per raggrupparne un numero equivalente a una potenza di 2. Ciascun mintermine può appartenere a più raggruppamenti.

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

(a)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

(b)

Mappa di Karnaugh della funzione $f(x, y, z) = xyz + xyz' + x'yz'$

Il metodo delle Mappe di Karnaugh- Esempio 1

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0

Considerando tutti gli implicanti primi individuati si ottiene l’espressione:

f(xyz)= !x!y+ !yz+ xz

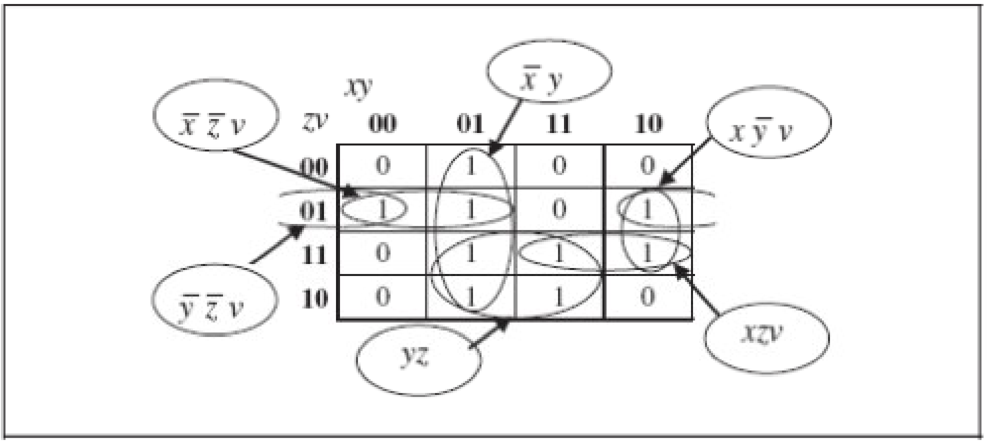
che non risulta minima.

Esaminando la mappa si nota che gli implicanti !x!y e xz sono sufficienti a coprire tutti gli 1 della funzione, e quindi fanno parte della copertura minima mentre l’implicante !yz può essere trascurato. In definitiva quindi:

f(xyz)= !x!y+ xz

Il metodo delle Mappe di Karnaugh – Esempio 2

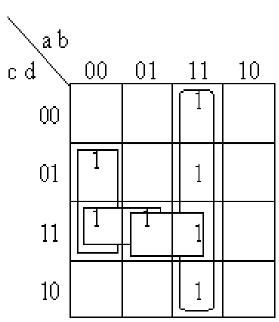
Mappa di Karnaugh per la funzione
f(*x,y,z,v*)=Σ{1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 15)
I Primi Implicanti PI sono i sottocubi di area massima



Ricerca PI sulle mappe di Karnaugh

$$f = abcd + \bar{a}\,bcd + \bar{a}\bar{b}\,cd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\,d + ab\,\bar{c}\,d + abc\,\bar{d} + ab\,\bar{c}\bar{d}$$

- Gli implicanti primi sono individuati graficamente come **sottocubi di area massima** sulla mappa di Karnaugh

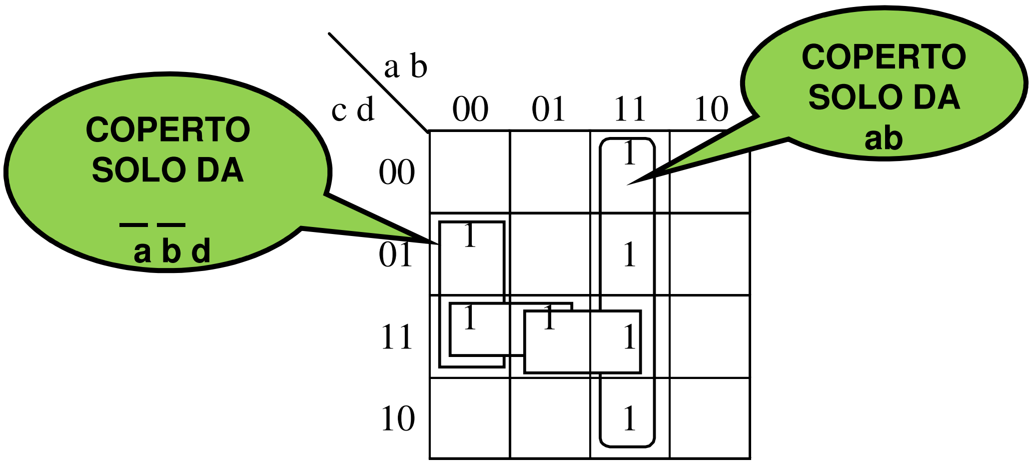


Implicanti primi

$bcd,\ \bar{a}\,cd,\ \bar{a}\bar{b}\,d,\ ab$

Individuazione del nucleo sulle mappe di Karnaugh

- Sono essenziali gli implicanti primi che **da soli** ricoprono un "1"



Matrice di Copertura e Copertura minima

- Individuati gli implicanti primi, occorre scegliere tra di essi un insieme minimo che consenta di "coprire" tutta la funzione

	abcd	0001	0011	1100	0111	1101	1110	1111
A	00-1	1	1					
B	0-11		1		1			
C	-111				1			1
D	11--			1		1	1	1

Copertura minima

- Un modo generale per definire il problema della copertura è il seguente:
  - data una matrice di *N* righe e *M* colonne, i cui elementi siano $a_{ij} = 1$ oppure $a_{ij} = 0$, si dice che una riga *i* *copre* una colonna *j* se $a_{ij} = 1$.
    Si selezioni il numero minimo di righe che coprono tutte le colonne.
- Il problema della copertura è di interesse generale in molti settori differenti
  - ad esempio, in problemi di testing

Individuazione del nucleo sulla matrice di copertura

- Sulla matrice di copertura corrispondono alle righe che coprono le colonne con un unico '1'
- Nell'esempio N = A + D

		abc d	0001	0011	1100	0111	1101	1110	1111
ESSENZIALE	A	00-1	1	1					
	B	0-11		1		1			
	C	-111				1			1
ESSENZIALE	D	11--			1		1	1	1

Metodi di copertura minima

- Trovare la copertura minima vuol dire trovare la forma minima di R, cioè quegli implicanti che, pur non essendo essenziali, devono essere eventualmente aggiunti al nucleo per trovare una forma che "copra" tutti i mintermini
- Per funzioni di poche variabili, la scelta dei PI di R da aggiungere a quelli essenziali di N può essere fatta direttamente sulla mappe di Karnaugh, valutando ad occhio le varie (poche) alternative possibili
- Un metodo tabellare: righe/colonne dominanti

Righe/Colonne dominanti

- Chiamiamo “***linea***” indifferentemente una riga o una colonna
- Una linea *L* domina la linea *K* se la “include”, ovvero se contiene tutti i suoi 1

La colonna di destra domina quella di sinistra

1	1	0	1	0
0	1	0	1	0

La riga in alto domina l’altra

Righe/Colonne dominanti

- Se si eliminano le **righe dominate** e le colonne **dominanti**, da una matrice di copertura, se ne trae una equivalente
  – che rappresenta, cioè, il medesimo problema di copertura

Matrice di copertura: criteri di dominanza

❑ La ***riga i domina la riga j*** se l'implicante Pi copre tutti i mintermini che copre l'implicante Pj più almeno uno

✓ i mintermini coperti dall'implicante dominato sono un sottoinsieme dei mintermini coperti dall'implicante dominante: scegliendo di eliminare l'implicante dominato e mantere il dominante avremmo la certezza di coprire un insieme maggiore di mintermini, con un costo totale di copertura di sicuro non maggiore di quello che si avrebbe facendo la scelta opposta

❑ La ***colonna i domina la colonna j*** se il mintermine mj è coperto da un sottoinsieme degli implicanti che coprono mi

✓ qualsiasi implicante copra mj copre anche mi: scegliendo di eliminare il mintermine mi e mantenere mj avremmo la certezza che gli implicanti selezionati per coprire quest'ultimo coprono anche il primo, con un costo totale di copertura non maggiore di quello che si avrebbe facendo la scelta opposta

Righe/Colonne dominanti

- Il metodo tabellare per righe/colonne dominanti procede allora come segue:
  1. Si ricercano gli implicanti primi (*PI*) e si individuano quelli essenziali;
  2. Si includono nella forma minima i *PI* essenziali, eliminandoli dalla matrice, unitamente con i mintermini ricoperti;
  3. Si eliminano le righe dominate e le colonne dominanti;
  4. Si individuano i *PI* essenziali “secondari” della matrice così ridotta;
  5. Si ripetono i passi 2, 3, 4 finché è possibile.

Esempio (1/6)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,1,2,8,9,15,17,21,24,25,27,28,31) =$$

$$= \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 x_5 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_5 + \ldots\ldots$$

Esempio (2/6)

Implicanti	Mintermini coperti
A = -100-	8,9,24,25
B = --001	1,9,17,25
C = 0-00-	0,1,8,9
D = 11-11	27,31
E = -1111	15,31
F = 110-1	25,27
G = 10-01	17,21
H = 11-00	24,28
J = 000-0	0,2

Esempio (3/6)

	P_0	P_1	P_2	P_8	P_9	P_{15}	P_{17}	P_{21}	P_{24}	P_{25}	P_{27}	P_{28}	P_{31}
A				1	1				1	1			
B		1			1		1			1			
C	1	1		1	1								
D											1		1
E						1							1
F										1	1		
G							1	1					
H									1			1	
J	1		1										

Primi implicanti essenziali: N (nucleo) = J, E, G, H

Esempio (4/6)

	P_0	P_1	P_2	P_8	P_9	P_{15}	P_{17}	P_{21}	P_{24}	P_{25}	P_{27}	P_{28}	P_{31}
A				1	1				1	1			
B		1			1		1			1			
C	1	1		1	1								
D											1		1
E						1							1
F										1	1		
G							1	1					
H									1			1	
J	1		1										

Gli implicanti primi essenziali J,E,G,H
coprono i mintermini: 0, 2, 15, 17, 21, 24, 28, 31

Esempio (5/6)

	P_1	P_8	P_9	P_{25}	P_{27}
A		1	1	1	
B	1		1	1	
C	1	1	1		
D					1
F				1	1

	P_1	P_8	P_{25}	P_{27}
A		1	1	
B	1		1	
C	1	1		
F			1	1

	P_1	P_8
A		1
B	1	
C	1	1

riga D dominata dalla F
Colonna P_9 dominante

F implicante primo essenziale secondario:
copre P_{25} e P_{27}

Righe A e B dominate dalla **C**

Esempio (6/6)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\sum(0,1,2,8,9,15,17,21,24,25,27,28,31)=$$

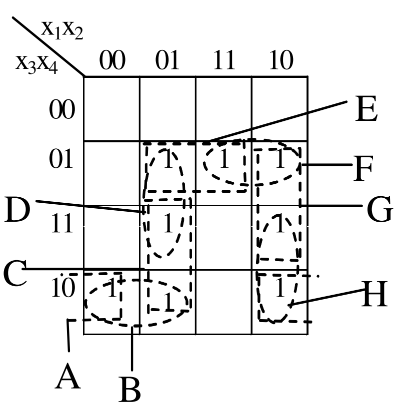
$$=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5+\ldots\ldots=$$

$$=E+G+H+J+F+C=$$

$$=x_2x_3x_4x_5+x_1\bar{x}_2\bar{x}_4x_5+x_1x_2\bar{x}_4\bar{x}_5+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5$$

$$+x_1x_2\bar{x}_3x_5+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

Un altro esempio: funzione ciclica



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				1		1		
B				1	1			
C					1		1	
D	1						1	
E	1		1					
F		1	1					
G		1						1
H						1		1

- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A+C+E+G oppure B+D+F+H

Matrice di copertura: ESEMPIO (1/2)

	m1	m4	m5	m6	m7	m9	m11	m14	m15
A	X		X						
B	X					X			
C						X	X		
D							X		X
E		X	X	X	X				
F				X	X			X	X

Il mintermine m4 risulta coperto solo da E e il mintermine m14 solo da F:

E ed F pertanto sono implicanti essenziali e possono essere cancellati dalla tabella insieme a tutti i mintermini che coprono.

C(F)= {E,F}

Matrice di copertura: ESEMPIO (2/2)

	m1	m9	m11
~~A~~	X		
B	X	X	
C		X	X
~~D~~			X

Nella tabella risultante ogni mintermine è coperto almeno da due implicanti: non ci sono più implicanti essenziali e si può procedere col metodo della dominanza:

La riga C domina la riga D e la B domina la A: cancello le righe A e D.

	m1	m9	m11
B	X	X	
C		X	X

A questo punto B e C coprono mintermini non coperti da altri implicanti: essi sono allora etichettati come **implicanti essenziali *secondari*** e aggiunti alla **copertura minima di f**:

C(F)= {E,F,B,C}