

Corso di Calcolatori Elettronici I

A.A. 2012-2013

Minimizzazione di funzioni booleane: introduzione

Prof. Roberto Canonico



Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (allievi A-DA)
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Ottimizzazione di funzioni combinatorie

Per *ottimizzazione* di una funzione si intende la sua trasformazione, attraverso passi successivi, con lo scopo di ottenere un'espressione equivalente ma migliore rispetto ad una data metrica di valutazione (area occupata, tempo necessario a produrre un dato risultato, potenza o energia assorbita ecc.).

Possibili metriche di area:

- Numero di porte logiche generiche
 - Numero di porte logiche a due ingressi
 - Numero di implicantanti o di implicati
 - Numero di letterali
-

Costo di una funzione (1/4)

- Il costo in termini di *letterali* C_L è pari al numero delle variabili indipendenti della funzione, ciascuna moltiplicata per il numero di volte che essa compare nella forma.
 - Il costo in termini di *funzioni* o *porte* C_P è pari al numero delle funzioni elementari f_i che la compongono, che per reti unilaterali è uguale al numero complessivo di porte adoperate.
-

Costo di una funzione (2/4)

- Il costo in termini di *ingressi* C_I è pari al numero delle funzioni f_i che la compongono, ciascuna moltiplicata per le variabili (dipendenti o indipendenti) di cui è funzione. Per reti unilaterali tale costo equivale al numero complessivo di porte adoperate, ciascuna pesata per il numero di ingressi (fan-in).

Esempio

- $f=b(!a+c+d)$ $C_L=4$ $C_P=2$ $C_I=5$
 - $f=bc(a!d+!b+c)+!c(d+!a)(b+c)$ $C_L=11$ $C_P=7$ $C_I=17$
-

Costo di una funzione (3/4)

$$F_3 = AB + C(D + E)$$

$$F_3 = AB + CD + CE$$

costo ingressi=8 per (a) e 9 per (b)

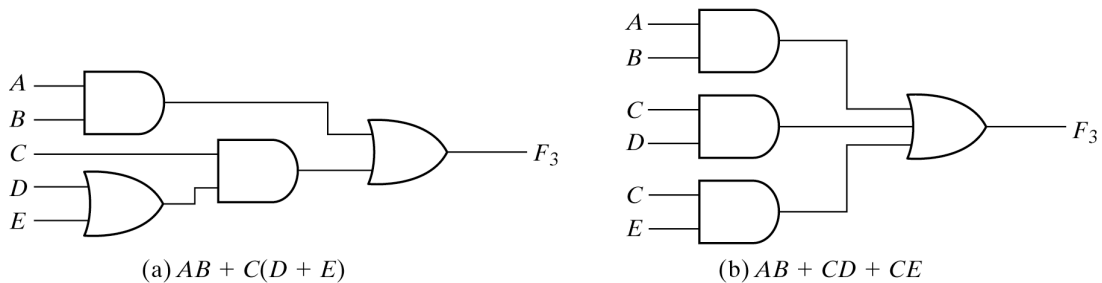


Fig. 2-4 Three- and Two-Level implementation

Costo di una funzione (4/4)

$$G = ABCD + !A!B!C!D \quad (i)$$

$$G = (!A + B)(!B + C)(!C + D)(!D + A) \quad (ii)$$

- Costo letterali (i) e (ii) è pari a 8 ma la forma (ii) occupa una maggiore area
- Costo ingressi è pari a $8+2=10$ per (i)
- Costo ingressi è pari a $8+4=12$ per (ii)

Funzioni di costo: esempio

$$f = bc(\bar{a}\bar{d} + \bar{b} + c) + \bar{c}(d + \bar{a})(b + c)$$

Costo di letterali (CL)	11
Costo di funzioni o di porte (CP)	7
Costo di ingressi (CI)	17

Ottimizzazione di funzioni combinatorie: espansione (1/3)

I metodi di ottimizzazione delle funzioni combinatorie sono basati sull'applicazione delle proprietà dell'Algebra di Boole:

□ **Assorbimento:**

$P_1 + P_2 = xP + !xP = (x + !x)P = P$ in tal caso si dice che P_1 e P_2 generano **consenso**

□ **Idempotenza:**

$$P + P = P$$

Esse consentono di semplificare l'espressione di una funzione a partire dalla sua rappresentazione in forma canonica, che ne assicura la copertura in termini di somma di mintermini (o prodotto di maxtermini).

Ottimizzazione di funzioni combinatorie: espansione (2/3)

- L'applicazione delle proprietà di assorbimento ed idempotenza è alla base del processo di **espansione**, volto a trasformare l'espressione algebrica di una funzione in modo da costruire termini prodotto (o somma) costituiti dal minor numero possibile di letterali.
 - Si introduce così il concetto di **implicante**, ossia un prodotto (o una somma) di letterali risultante dal processo di espansione, che assorbe più mintermini (maxtermini) semplificando la copertura di una funzione.
-

Ottimizzazione di funzioni combinatorie: espansione (3/3)

- Applicando ripetutamente il processo di espansione ad una funzione è possibile determinare un insieme di **implicanti primi**, ossia non ulteriormente semplificabili, candidati a far parte della copertura ottima della funzione.
 - Fra gli implicanti primi è possibile estrarre un set di implicanti primi **essenziali**, necessari alla copertura poiché sono gli unici a coprire qualche "uno" della funzione; la copertura ottima conterrà dunque tali implicanti essenziali più un sottoinsieme degli implicanti primi rimanenti, scelti secondo un criterio di costo.
-