

Corso di Calcolatori Elettronici I

A.A. 2012-2013

Minimizzazione delle funzioni booleane tramite metodo tabellare di Quine-McCluskey

Prof. Roberto Canonico



Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica e
delle Tecnologie dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (allievi A-DA)
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Metodo Quine-McCluskey

- Metodo esatto per la sintesi di reti a 2 livelli
- Fattibile fino a circa 20 ingressi
- In grado di considerare funzioni a più uscite
- Può minimizzare sia il costo degli implicant che quello dei letterali

L'algoritmo (facilmente implementabile) opera in due fasi distinte

- 1) **Espansione**
 - 2) **Copertura**
-

Il metodo di Quine-McCluskey – I Fase

1. Si considerano i mintermini appartenenti all'ON-Set e al DC-Set della funzione, espressi mediante i valori dei corrispondenti letterali, e li si ordina in senso crescente in base al numero di "1" contenuti, dividendoli in classi.
 2. Ogni elemento di ciascuna classe viene confrontato con tutti gli elementi della classe immediatamente successiva allo scopo di individuare consensi: la variabile eventualmente eliminata in caso di consenso viene segnata con il simbolo di don't care nel nuovo implicante generato dal processo di espansione.
 - in caso di confronto fra implicanti contenenti don't care è possibile generare espansione solo se il simbolo di don't care si trova nella stessa posizione nei due implicanti di partenza ed essi differiscono solo per un letterale.
-

Il metodo di Quine-McCluskey – I Fase

3. Ogni volta che due implicanti partecipano ad un raccoglimento devono essere marcati poiché non rappresentano implicanti primi, e non devono quindi essere considerati nella seconda fase.
 - Nel caso di funzioni non completamente specificate se due mintermini entrambi appartenenti al DC-Set generano espansione, il nuovo implicante viene introdotto nella successiva tabella ma viene marcato a priori, poiché non sarà necessario coprirlo nella successiva fase.
 4. Il procedimento viene ripetuto finché non è più possibile determinare consensi; gli implicanti che risulteranno non marcati alla fine della prima fase sono gli implicanti primi della funzione.
-

Quine-McCluskey – I Fase - ESEMPIO

x	y	z	v	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

m_i	x	y	z	v	
1	0	0	0	1	✓
4	0	1	0	0	✓
5	0	1	0	1	✓
6	0	1	1	0	✓
9	1	0	0	1	✓
7	0	1	1	1	✓
11	1	0	1	1	✓
14	1	1	1	0	✓
15	1	1	1	1	✓

$\{m_1, \dots, m_n\}$	x	y	z	v	
1,5	0	-	0	1	A
1,9	-	0	0	1	B
4,5	0	1	0	-	✓
4,6	0	1	-	0	✓
5,7	0	1	-	1	✓
6,7	0	1	1	-	✓
6,14	-	1	1	0	✓
9,11	1	0	-	1	C
7,15	-	1	1	1	✓
11,15	1	-	1	1	D
14,15	1	1	1	-	✓

A B C D E F sono tutti gli **implicanti primi** della funzione (non sono stati marcati durante il processo di espansione)

$\{m_1, \dots, m_n\}$	x	y	z	v	
4, 5, 6, 7	0	1	-	-	E
6, 7, 14, 15	-	1	1	-	F

Copertura minima

- Un modo generale per definire il problema della copertura è il seguente:
 - data una matrice di N righe e M colonne, i cui elementi siano $a_{ij} = 1$ oppure $a_{ij} = 0$, si dice che una riga i *copre* una colonna j se $a_{ij} = 1$.
Si selezioni il numero minimo di righe che coprono tutte le colonne.
- Il problema della copertura è di interesse generale in molti settori differenti
 - ad esempio, in problemi di testing

Il metodo di Quine-McCluskey – Il Fase: copertura (1/3)

1. Si costruisce la **tabella di copertura**: si conviene di porre sulle righe gli implicanti primi di f determinati nella prima fase e sulle colonne tutti i mintermini per cui la funzione vale 1; la casella in posizione (i,j) viene marcata con una "x" o un "1" se l'implicante i copre il mintermine j
 - in caso di funzioni non completamente specificate nella tabella di copertura vengono indicati solo i mintermini appartenenti all'ON-Set della funzione poiché non è necessario coprire le condizioni di indifferenza
 - **NB**: nel caso in cui si adopera la convenzione con mintermini sulle righe e implicanti sulle colonne vanno rivisti opportunamente i criteri di essenzialità e dominanza mostrati di seguito
-

Individuazione del nucleo sulla matrice di copertura

- Sulla matrice di copertura corrispondono alle righe che coprono le colonne con un unico '1'
- Nell'esempio $N = A + D$

	<u>abc</u> <u>d</u>	0001	0011	1100	0111	1101	1110	1111
ESSENZIALE	A 00-1	1	1					
	B 0-11		1		1			
	C -111				1			1
ESSENZIALE	D 11--			1		1	1	1

Metodi di copertura minima

- Trovare la copertura minima vuol dire trovare la forma minima di R, cioè quegli implicanti che, pur non essendo essenziali, devono essere eventualmente aggiunti al nucleo per trovare una forma che "copra" tutti i mintermini
 - Per funzioni di poche variabili, la scelta dei PI di R da aggiungere a quelli essenziali di N può essere fatta direttamente sulla mappe di Karnaugh, valutando ad occhio le varie (poche) alternative possibili
 - Un metodo tabellare: righe/colonne dominanti
-

Righe/Colonne dominanti

- Chiamiamo "**linea**" indifferentemente una riga o una colonna
- Una linea L domina la linea K se la "include", ovvero se contiene tutti i suoi 1

La colonna di destra domina quella di sinistra

1	1	0	1	0
0	1	0	1	0

La riga in alto domina l'altra

Righe/Colonne dominanti

- Se si eliminano le **righe dominate** e le colonne **dominanti**, da una matrice di copertura, se ne trae una equivalente
 - che rappresenta, cioè, il medesimo problema di copertura
-

Righe/Colonne dominanti

- Il metodo tabellare per righe/colonne dominanti procede allora come segue:
 1. Si ricercano gli implicanti primi (*PI*) e si individuano quelli essenziali;
 2. Si includono nella forma minima i *PI* essenziali, eliminandoli dalla matrice, unitamente con i mintermini ricoperti;
 3. Si eliminano le righe dominate e le colonne dominanti;
 4. Si individuano i *PI* essenziali “secondari” della matrice così ridotta;
 5. Si ripetono i passi 2, 3, 4 finché è possibile.
-

Esercizio 1 (1/4)

- Minimizzare con il metodo di Quine-McCluskey, la rete con quattro ingressi ed una uscita specificata come segue:

$$\text{ONSet}=\{0,2,4,5,6,7,8,9,13,15\}; \text{DCSet}=\emptyset$$

Soluzione:

- Si considerino i valori degli ingressi delle configurazioni che costituiscono l'ONSet e si ricava:

$$\text{ONSet}=\{0000,0010,0100,0101,0110,0111,1000,1001,1101,1111\}$$

- che dà origine alla seguente partizione:

$$\text{ONSet}=\{\{0000\}\{0010,0100,1000\}\{0101,0110,1001\}\{0111,1101\}\{1111\}}$$



Esercizio 1 – I fase (2/4)

Passo 0	Passo 1	Passo 2
0000 (0) -	00-0 (0,2) -	0--0 (0,4,2,6)
0010 (2) -	0-00 (0,4) -	01-- (4,5,6,7)
0100 (4) -	-000 (0,8)	-1-1 (5,7,13,15)
1000 (8) -	0-10 (2,6) -	
0101 (5) -	010- (4,5) -	
0110 (6) -	100- (8,9)	
1001 (9) -	01-0 (4,6) -	
0111 (7) -	01-1 (5,7) -	
1101 (13) -	-101 (5,13) -	
1111 (15) -	011- (6,7) -	
	1-01 (9,13)	
	-111 (7,15) -	
	11-1 (13,15) -	

Tutte le configurazioni che non sono state marcate con il simbolo “~” sono implicanti primi. Si determina così l'elenco completo degli implicanti primi da considerare:

P1	P2	P3	P4	P5	P6
!a!d	!ab	bd	!b!c!d	a!b!c	a!cd
(0,2,4,6)	(4,5,6,7)	(5,7,13,15)	(0,8)	(8,9)	(9,13)

Seconda fase: si considera la tabella implicanti/mintermini e, applicando i tre consueti criteri, viene semplificata.



Esercizio 1 – II fase (3/4)

	0	2	4	5	6	7	8	9	13	15
P1	X	X	X		X					
P2			X	X	X	X				
P3				X		X			X	X
P4	X						X			
P5							X	X		
P6								X	X	

P1 e P3 sono essenziali:
cancello le righe
corrispondenti e i
mintermini da essi
coperti.

La copertura di f è data
da:

$$C(f) = \{P1, P3\}$$

	0	2	4	5	6	7	8	9	13	15
P1	X	X	X		X					
P2			X	X	X	X				
P3				X		X			X	X
P4	X						X			
P5							X	X		
P6								X	X	

Esercizio 1 - II fase (4/4)

	8	9
P4	X	
P5	X	X
P6		X

P5 domina P4 e P6 che
vengono cancellate.

La copertura di f è data da:

$$C(f) = \{P1, P3, P5\}$$

$$f = P1 + P3 + P5 = !a!d + bd + a!b!c$$