

Corso di Calcolatori Elettronici I

Algebra di Boole

Prof. Roberto Canonico



Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Da Boole a Shannon

- L'algebra di Boole fu introdotta nel 1854 come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica
- George Boole (1815-1864)
 - *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities (1854)*
- Il suo uso per descrivere reti binarie di commutazione si deve a Claude Shannon
 - *A symbolic analysis of relay and switching circuits (1938)*



Algebra di Boole

- L'Algebra di Boole può essere vista come un'algebra astratta definita su un insieme (detto *supporto*) $K = \{0,1\}$ e con tre operazioni
 - AND (\cdot): $K \times K \rightarrow K$
 - OR ($+$): $K \times K \rightarrow K$
 - NOT (\neg): $K \rightarrow K$

x	y	x AND y	x	y	x OR y	x	NOT x
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

Algebra di Boole: proprietà (1)

- Proprietà commutativa:

$$x \text{ AND } y = y \text{ AND } x \qquad x \text{ OR } y = y \text{ OR } x$$
- Proprietà associativa:

$$(x \text{ AND } y) \text{ AND } z = x \text{ AND } (y \text{ AND } z)$$

$$(x \text{ OR } y) \text{ OR } z = x \text{ OR } (y \text{ OR } z)$$
 - per la proprietà associativa posso definire AND e OR a più di 2 operandi
 - es. $x \text{ AND } y \text{ AND } z = (x \text{ AND } y) \text{ AND } z = x \text{ AND } (y \text{ AND } z)$
- Proprietà di idempotenza:

$$x \text{ AND } x = x \qquad x \text{ OR } x = x$$
- Proprietà di assorbimento:

$$x \text{ AND } (x \text{ OR } y) = x \qquad x \text{ OR } (x \text{ AND } y) = x$$

Algebra di Boole: proprietà (2)

- Proprietà distributiva
 - $x \text{ AND } (y \text{ OR } z) = (x \text{ AND } y) \text{ OR } (x \text{ AND } z)$
 - $x \text{ OR } (y \text{ AND } z) = (x \text{ OR } y) \text{ AND } (x \text{ OR } z)$
 - Proprietà di involuzione
 - $\text{NOT } (\text{NOT } x) = x$
 - Proprietà del minimo e del massimo:
 - $x \text{ AND } 0 = 0$
 - $x \text{ OR } 1 = 1$
-

Algebra di Boole come reticolo (1)

- Un'algebra astratta è una terna $\langle K, \cdot, + \rangle$ costituita da un insieme K (sostegno) sul quale sono definite due leggi binarie di composizione interna "+" e "·"
 - $\cdot: K \times K \rightarrow K$
 - $+: K \times K \rightarrow K$
 - Un'algebra astratta $\langle K, +, \cdot \rangle$ si dice *reticolo* se per ogni coppia di elementi di K le operazioni "+" e "·" soddisfano le proprietà commutativa, associativa, di assorbimento e di idempotenza
 - Un reticolo nel quale vale la proprietà distributiva sia di "+" rispetto a "·" che di "·" rispetto a "+" si dice *reticolo distributivo*
-

Proprietà dei reticoli

- I reticoli sono *ordinati*, ovvero posseggono una relazione d'ordine “ \leq ” così definita

$$x \leq^{\text{def}} y \Leftrightarrow x + y = y \Leftrightarrow x \cdot y = x$$

- ◆ Ricordiamo che una relazione d'ordine “ \leq ” deve godere delle seguenti proprietà:
 - riflessiva: $x \leq x$
 - antisimmetrica: $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
 - transitiva: $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Algebra di Boole come algebra astratta

- Un reticolo distributivo si dice *dotato di minimo e massimo assoluti* se in K sono presenti due elementi - che indicheremo con 0 e 1 rispettivamente - i quali verificano la *proprietà del minimo e massimo* per ogni elemento a di K :

$$a \cdot 0 = 0 \quad (0 \leq a) \qquad a + 1 = 1 \quad (a \leq 1)$$

- Un reticolo distributivo si dice *complementato* se per ogni elemento a di K esiste ed è unico un elemento (che diremo *complemento di a*) ed indicheremo con $\neg a$) per il quale è valida la proprietà del complemento:

$$a \cdot \neg a = 0 \qquad a + \neg a = 1$$

- **Un reticolo distributivo, dotato di minimo e massimo assoluti e complementato, si dice un'algebra di Boole**

- L'algebra a due valori definita nelle slide precedenti ne rappresenta un caso particolare

AdB come reticolo: postulati definitori

Commutativa	P1	$a+b=b+a$	P'1	$a \cdot b=b \cdot a$
Associativa	P2	$(a+b)+c=a+(b+c)$	P'2	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
Idempotenza	P3	$(a+a)=a$	P'3	$(a \cdot a)=a$
Assorbimento	P4	$a+(a \cdot b)=a$	P'4	$a \cdot (a+b)=a$
Distributiva	P5	$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$	P'5	$a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)$
Min e max	P6	$a \cdot 0=0$	P'6	$a+1=1$
Complemento	P7	$a \cdot (\bar{a})=0$	P'7	$a+(\bar{a})=1$

Legge di dualità

- Da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra per *dualità*, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi 0 ed 1 il rispettivo duale
- In altre parole, i 14 postulati impiegati per definire l'algebra non sono tutti indipendenti fra loro

Teorema di De Morgan

$$\text{NOT } (x \text{ AND } y) = (\text{NOT } x) \text{ OR } (\text{NOT } y)$$

$$\text{NOT } (x \text{ OR } y) = (\text{NOT } x) \text{ AND } (\text{NOT } y)$$

ovvero:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

AdB: altre proprietà

- 0 ed 1 sono l'uno il complemento dell'altro

$$\neg 0 = 1 \quad \neg 1 = 0$$

- *Convoluzione*: negando due volte un elemento si ottiene l'elemento stesso

$$\neg(\neg a) = a$$

- 0 è l'elemento neutro della somma

$$a + 0 = a$$

- 1 è l'elemento neutro del prodotto

$$a \cdot 1 = a$$

Assorbimento del complemento

$$a + \bar{a}b = a + b$$

- Per la dimostrazione usate la proprietà distributiva ed infine il complemento

$$\underline{a + \bar{a}b = (a + \bar{a})(a + b)} \quad (P5)$$

$$a + \bar{a}b = (a + b) \quad (P7)$$

Teorema di De Morgan

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad (1)$$

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \quad (2)$$

$$(a + b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 1 \quad (1.1)$$

$$(a + b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0 \quad (1.2)$$

(1.1) *Dimostrazione*

$$\begin{aligned} a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} &= a + \bar{a} \cdot \bar{b} + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = && (P1, P3) \\ &= a + \bar{b} + b + \bar{a} = && (ass.comp) \\ &= a + \bar{a} + b + \bar{b} = && (P1) \\ &= 1 + 1 = 1 && (P'7, P'6) \end{aligned}$$

(1.2) *Dimostrazione*

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} &= a \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} = && (P5) \\ &= 0 \cdot \bar{b} + 0 \cdot \bar{a} = && (P7) \\ &= 0 + 0 = 0 && (P6, P3) \end{aligned}$$

La (2) vale per dualità

Principio di eliminazione

- Nell'algebra di Boole ***non vale il principio di eliminazione***
 - $x+y=x+z$ non implica necessariamente $y=z$
 - L'implicazione vale se è verificata la condizione aggiuntiva $x \cdot y = x \cdot z$
-

Algebre di Boole (al plurale)

- La definizione di AdB come reticolo non specifica quale sia K e come siano definite le operazioni “+”, “ \cdot ” e “ \neg ”
 - Specifica soltanto un insieme di proprietà che devono essere soddisfatte da tali operazioni
 - Sono così possibili diversi modelli di algebra di Boole , uno dei quali è quello introdotto all'inizio
 - Altri possibili modelli di algebra di Boole:
 - l'algebra dei circuiti
 - l'algebra della logica delle proposizioni
 - l'algebra degli insiemi
-

Algebra della logica

- L'insieme $K=\{F,V\}$ su cui siano definite le operazioni
 - Congiunzione (\wedge)
 - Disgiunzione (\vee)
 - Negazione (\neg)

è un algebra di Boole con $F = 0$, $V = 1$,
 congiunzione = \cdot , disgiunzione = $+$, negazione = \neg

x	y	$x \wedge y$	x	y	$x \vee y$	x	$\neg x$
F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V		
V	V	V	V	V	V		

Algebra della logica

- $a \vee (\neg a) = V$
Tertium non datur
- $a \wedge (\neg a) = F$
Principio di non contraddizione

Algebra delle logica

- Due funzioni notevoli nell'algebra delle proposizioni:

– Funzione equivalenza $a \Leftrightarrow b$
 $f(a,b) = ab + \bar{a}\bar{b}$

– Funzione implicazione $a \Rightarrow b, f(a,b) = \bar{a} + b$

Si dice che x implica y se e solo se dalla verità di x (antecedente) scaturisce necessariamente la verità di y (conseguente). In termini algebrici, essendo l'implicazione falsa se e solo se x è vera e y è falsa, applicando il Teorema di De Morgan, si ha

$$\overline{x \Rightarrow y} = x\bar{y}$$

$$x \Rightarrow y = \bar{x} + y$$

Algebra della logica

- Se $x \Rightarrow y$ è vera, allora $\bar{x} + y = 1$

$$\bar{x} + y = \bar{x} \cdot \bar{y} + y \quad (\text{ass.compl})$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} + xy + y \quad (P4)$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} + xy + yy \quad (P3)$$

$$= (\overline{x+y}) \cdot \bar{y} + (x+y) \cdot y = 1 \quad (\text{DeMorgan})$$



per le proprietà dell'equivalenza
 $ab + \bar{a}b$

$$x + y = y \Leftrightarrow x \leq y$$



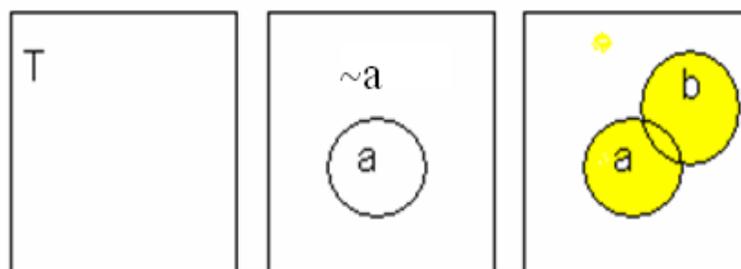
l'implicazione è la relazione d'ordine nell'algebra della logica

Algebra degli insiemi

Insiemi		Modello matematico	
\cup	unione	+	somma
\cap	intersezione	\cdot	prodotto
$\sim A$	complemento	\overline{a}	complemento
\emptyset	insieme vuoto	0	minimo assoluto
T	insieme "totale"	1	massimo assoluto

21

Algebra degli insiemi (2)



a) Insieme universo

b) $\sim a$ c) $a \cup b$

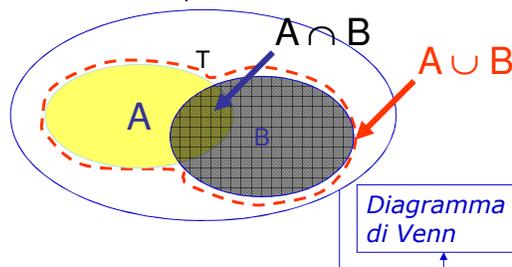
22

Algebra degli insiemi (3)

- Dati due insiemi $A, B \in T$, sono definite le operazioni di
 - Unione (\cup)
 - Intersezione (\cap)
 - Complemento (\sim)

$$a \cap \Phi = \Phi$$

$$a \cup T = T$$



la sestupla $\langle K, \cup, \cap, \sim, \Phi, T \rangle$ è un'algebra di Boole
ove:

- K indica l'insieme delle parti di T
 - Φ indica l'insieme vuoto
- La relazione d'ordine \leq equivale alla relazione di inclusione tra insiemi

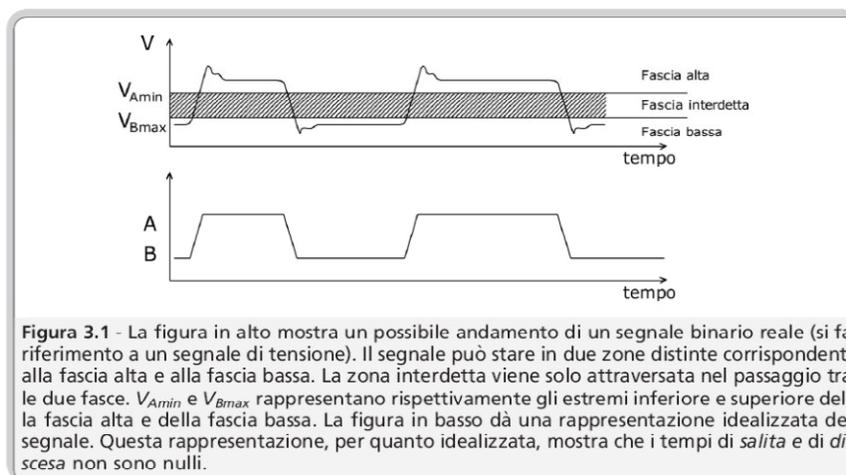
Teorema di Stone

- Ogni algebra di Boole è rappresentabile su un'algebra di insiemi
- Il modello degli insiemi (equivalentemente i diagrammi di Venn) può essere assunto come strumento per verificare o dimostrare proprietà di una qualsiasi algebra di Boole

Circuiti logici

- I circuiti logici sono circuiti elettronici nei quali una grandezza elettrica ai morsetti di ingresso e di uscita può assumere solo due valori, convenzionalmente rappresentati con i due elementi dell'algebra di Boole 0 ed 1.
- In elettronica digitale si studia come realizzare circuiti elettronici per il quale il legame tra ingressi ed uscite corrisponde a quello delle operazioni fondamentali AND, OR e NOT dell'algebra di Boole
 - PORTE LOGICHE
- Nelle reti logiche *unilaterali*, le uscite della rete corrispondono a valori di grandezze elettriche misurate in opportuni punti del circuito; il flusso dell'elaborazione procede fisicamente in un'unica direzione, dai segnali di ingresso verso i segnali di uscita
 - Es. la d.d.p. misurata rispetto a massa
- Nelle reti logiche *bilaterali*, invece, l'uscita della rete è determinata dalla presenza o dall'assenza di "contatto" tra due punti della rete.

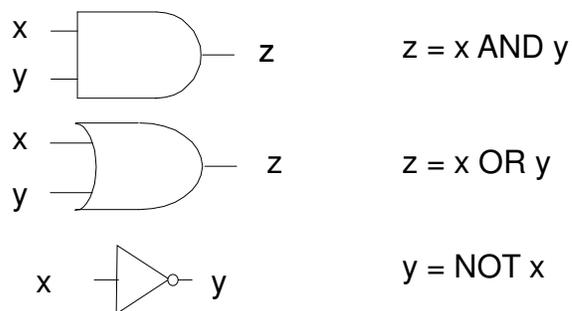
Segnali in circuiti elettronici digitali



da: G. Bucci. Calcolatori Elettronici – Architettura e organizzazione. © McGraw-Hill, 2009

Porte logiche o gate

Circuiti elettronici che realizzano le operazioni fondamentali



Un esempio di rete logica

$$y = b \cdot c \cdot (a \cdot \bar{d} + \bar{b} + c) + \bar{c} \cdot (d + \bar{a}) \cdot (b + c)$$

