Corso di Calcolatori Elettronici I

Algebra di Boole
Forme normali P ed S

Prof. Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Variabili e funzioni booleane

- Elementi del sostegno dell'algebra *K* → ***valori booleani***
- Variabili che possono assumere valori booleani → ***variabili booleane***
- Funzioni di variabili booleane in *K* → ***funzioni booleane***

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Le variabili possono essere a loro volta funzioni booleane
- Un insieme *F* di funzioni sul sostegno di un'algebra si dice **funzionalmente completo** se *qualsiasi* funzione dell'algebra può essere ottenuta come composizione di funzioni appartenenti ad *F*

2

Tabelle di verità

- Se l'algebra è finita, qualsiasi funzione può in linea di principio essere rappresentata mediante una tabella, definita ***tabella di verità***

Tabelle di verità

- Funzione algebrica
  - Funzione definita in maniera tabellare per cui alla variabile dipendente sono associate tutte le possibili combinazioni delle n variabili indipendenti

$$N = k^n$$

numero delle ripetizioni di k valori su n posti

$$M = k^N = k^{k^n}$$

numero delle ripetizioni di k valori su N posti

ove:
- n=numero delle variabili indipendenti
- k=numero dei valori dell'algebra (k=2)
- N=numero totale di punti della funzione
- M=numero totale delle funzioni di n variabili

Tabelle di verità

a	b	c	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Funzioni di due variabili

Esistono 16 diverse funzioni booleane di due variabili:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Funzioni di due variabili

f	algebrica	nome	simb-	f	algebrica	nome	simb-
f_0	0	**contraddizione**		f_8	$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x+y}$	NOR	$x \downarrow y$
f_1	$x \cdot y$	congiunzione-AND	$x \cdot y$	f_9	$\overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y$	equivalenza	$x \equiv y$ [1]
f_2	$x \cdot \overline{y}$	and-not-y		f_{10}	$\overline{y}$	nony	$\overline{y}$
f_3	x	x		f_{11}	$x + \overline{y}$	implicazione	$y \rightarrow x$
f_4	$\overline{x} \cdot y$	and-not-x		f_{12}	$\overline{x}$	nonx	$\overline{x}$
f_5	y	y		f_{13}	$\overline{x} + y$	implicazione	$x \rightarrow y$
f_6	$\overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$	oresclusivo	$x \oplus y$	f_{14}	$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x \cdot y}$	nand	$x \uparrow y$
f_7	$x + y$	disgiunzione.OR	$x + y$	f_{15}	1	tautologia	

Forme Algebriche

- L'importanza della forma
  - La corrispondenza biunivoca è tra FORMA e CIRCUITO (e non tra una funzione e un circuito)
  - Le eguaglianze notevoli e quelle derivate fra espressioni equivalgono a equivalenza funzionale fra CIRCUITI

Ancora definizioni…

$$y = a\bar{b} + b\bar{d}x$$

SOMMA DI PRODOTTI

b,d,¬x letterali

$$y = a \cdot (b + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + x)$$

PRODOTTO DI SOMME

termine elementare (clausola)

fattore elementare

$$f(a,b,c) = \ldots + a\bar{b}\bar{c} + \ldots$$

mintermine (P_i)

$$f(a,b,c) = \ldots(\ldots) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\ldots)\ldots$$

maxtermine (S_i)

Mintermini e Maxtermini

$$P_0 = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \quad P_5 = a\bar{b}c$$

$$S_0 = a + b + c \quad S_5 = \bar{a} + b + \bar{c}$$

$$\overline{P_i} = S_i$$ (da de Morgan)

$$\forall i \neq j \; P_i \cdot P_j = 0, \; S_i + S_j = 1$$

$$\sum P_i = 1, \; \prod S_i = 0$$

Forma normale di tipo *P*

$$f(x_1,\ldots\ldots,x_n)=\overline{x}_1 f(0,x_2,\ldots\ldots,x_n)+x_1 f(1,x_2,\ldots\ldots,x_n)=$$
$$=\overline{x}_1[\overline{x}_2 f(0,0,x_3,\ldots x_n)+x_2 f(0,1,x_3,\ldots x_n)]+$$
$$x_1[\overline{x}_2 f(1,0,x_3,\ldots x_n)+x_2 f(1,1,x_3,\ldots x_n)]$$
$$\ldots\ldots$$
$$=f(0,0,\ldots 0)\overline{x}_1\overline{x}_2\cdots\overline{x}_n+\ldots+f(1,1,\ldots 1)x_1x_2\cdots x_n=\sum_{i=0}^{2^n-1}\alpha_i P_i$$

dove

$$\alpha_0=f(0,0,\ldots 0),\ \alpha_1=f(0,0,\ldots 1),\ldots\ldots\alpha_{2^n-1}=f(1,1,\ldots 1),$$

“valori” della funzione: sono gli ‘1’ e ‘0’ della tabella di verità, non sono variabili!

Forma normale di tipo *P*

- Da quanto visto prima si deduce che una funzione di n variabili, assegnata mediante una tabella di verità, può essere espressa da una forma disgiuntiva di congiunzioni o, algebricamente, da una somma di prodotti.
- Ciascun termine della somma è associato ad un "1" presente nella colonna della tabella ed è un prodotto delle n variabili, ciascuna delle quali nella forma negata o non a seconda che nelle colonne corrispondenti sia presente uno "0" o un "1".
- Qualsiasi funzioni è pertanto “algebrica”.

Forma Normale di Tipo P

a	b	c	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$y = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + abc$$

Forma normale di tipo *P*

- Viceversa, qualsiasi funzione algebrica può essere posta in forma normale *P* "aggiungendo" i letterali mancanti
- Basta sviluppare tutte le operazioni fino ad ottenere una somma di prodotti
- Le clausole che non siano mintermini (ovvero che non contengano tutte le variabili della funzione) possono essere moltiplicate per la somma di tutte le possibili clausole ottenibili con le variabili assenti

Il solito esempio

- Partendo da

$$y(a,b,c,d)=\bar{a}b+bc+bd$$

Forma normale di tipo *S*

$$f(x_1 \ldots x_n)=\prod_{i=0}^{2^n-1}(\alpha_i+S_i)$$

- Si può ottenere con il procedimento duale di quello usato per la forma di tipo *P*
- In alternativa, si può negare la forma di tipo *P* e poi applicare de Morgan

Forma normale di tipo *S*

- Una funzione di n variabili può essere espressa da una forma congiuntiva di disgiunzioni o, algebricamente, da un prodotto di somme.
- Ciascun fattore del prodotto è associato ad uno 0 presente nella colonna della tabella ed è una somma delle n variabili, ciascuna delle quali nella forma negata o non a seconda che nelle colonne corrispondenti sia presente un 1 o uno 0.

Forma Normale di Tipo S

a	b	c	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$y = (\overline{a}+b+c)\cdot(\overline{a}+b+\overline{c})\cdot(\overline{a}+\overline{b}+c)$$

Numero caratteristico

- E' la stringa ordinata di valori, tipica di ciascuna funzione, di lunghezza 2^n per funzioni di n variabili e coincidente con la colonna di "0" e "1" nella tabella di verità
- L'insieme dei numeri caratteristici delle funzioni di n variabili, costituisce ancora un'algebra di Boole (con le operazioni effettuate "bit a bit")

Numero caratteristico

(1) $f = a + bc + \bar{a}b$

$$\begin{aligned}
\#a &= 00001111 \\
\#b &= 00110011 \\
\#c &= 01010101 \\
\#bc &= 00010001 \\
\#a + bc &= 00011111 \\
\#\bar{a}b &= 00110000 \\
\#f &= 00111111
\end{aligned}$$

- Per provare che è vero, partire dalla (1) e ricavare la forma P. Dopodiché controllare gli 1 della tabella.