Corso di Calcolatori Elettronici I

Algebra di Boole: mappe di Karnaugh

Prof. Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Funzioni Equivalenza ed Implicazione

- Funzione equivalenza

$$a \Leftrightarrow b \text{ è vera s.s.e. è } 1\text{: } f(a,b) = ab + \overline{a}\,\overline{b} = (a \equiv b)$$

- Funzione implicazione

$$a \Rightarrow b \text{ è vera s.s.e. vale } 1\text{: } f(a,b) = \overline{a} + b = (a \rightarrow b)$$

- *Si dice che **x implica y** se e solo se dalla verità di x (antecedente) scaturisce necessariamente la verità di y (conseguente)*
- *In termini algebrici, essendo l'implicazione falsa se e solo se x è vera e y è falsa, applicando il Teorema di De Morgan, si ha*

$$\overline{x \rightarrow y} = x \cdot \overline{y}$$

$$x \rightarrow y = \overline{x \cdot \overline{y}} = \overline{x} + y$$

Implicazione come relazione d’ordine

- Se $x \Rightarrow y$ è vera, allora $\overline{x} + y = 1$

$$\overline{x} + y = \overline{x} \cdot \overline{y} + y \quad (ass.compl)$$
$$= \overline{x} \cdot \overline{y} + xy + y \quad (P4)$$
$$= \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{y} + xy + yy \quad (P3)$$
$$= \overline{(x+y)} \cdot \overline{y} + (x+y) \cdot y = 1 \quad (DeMorgan)$$

per le proprietà dell’equivalenza

$$\boxed{ab + \overline{a}\,\overline{b}}$$

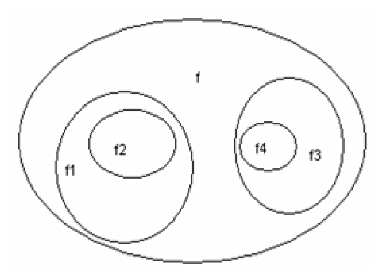
$$\boxed{x + y = y \Leftrightarrow x \le y}$$

l'implicazione è la relazione d'ordine nell'algebra della logica

Implicanti di una funzione

- Un **implicante** di *f* è una funzione f_1 tale che

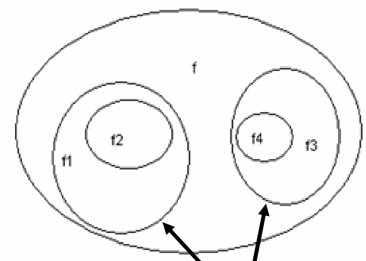
$$\overline{f_1} + f = 1 \qquad cioè \qquad f_1 \rightarrow f$$



- Esempio: implicanti di *f*
  - $f_1 \rightarrow f$
  - $f_2 \rightarrow f$
  - $f_3 \rightarrow f$
  - $f_4 \rightarrow f$
- ma anche: $f_2 \rightarrow f_1$ e $f_4 \rightarrow f_3$

Implicanti primi di una funzione

- Nell'insieme degli implicanti di *f*, definiamo **primi** quegli implicanti che a loro volta non implicano nessun altro implicante di *f*



Solo f_1 ed f_3 sono implicanti primi

Proprietà degli implicanti

1. La clausola di una funzione *f* in forma di tipo *P* è un suo implicante

$$f = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad \overline{A_i} + f = \overline{A_i} + (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$$

2. Una clausola B ne implica un'altra A se e solo se B contiene tutti i letterali di A
3. La somma di due clausole di ordine *n* che contengono *n-1* letterali uguali ed in cui un letterale dell'una sia il complemento di quello dell'altra è la clausola di ordine *n-1* formata dai letterali comuni (detta ***consenso***)

Proprietà degli implicanti (2)

3. Ad una funzione può essere aggiunto un suo implicante senza alterarne il valore
4. *A* è un implicante di *f* se e solo se nella prima forma canonica di *f* sono presenti tutti i mintermini aventi *A* come fattore
   - Infatti, se *A* è un implicante, lo si può aggiungere ad *f*, per poi espanderlo in mintermini (facendo comparire anche le variabili assenti in *A*)
   - Se, viceversa, sono presenti tutti i mintermini aventi *A* come fattore, essi possono essere raccolti in modo da far apparire *A* come clausola di *f*.

$$f(x,y,z) = xy + yz, \text{ e quindi } xy \Rightarrow f \text{ e } yz \Rightarrow f$$

$$\text{si ha: } f = xy\bar{z} + xyz + xyz + \bar{x}yz$$

Mappe di Karnaugh

a	b	c	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$\Leftrightarrow$

c \ ab	00	01	11	10
0	1			1
1		1		

Mappe di Karnaugh

- Le mappe di Karnaugh sono una rappresentazione “tabellare” delle funzioni booleane, alternativa alla tabella di verità
- Consentono di individuare facilmente “consensi” nell’espressione algebrica
- Due celle adiacenti sulle MdK sono associate a mintermini che differiscono in un solo letterale
  - Rappresentano una clausola di ordine n-1
  - Es: $\bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c = (\bar{a}+a)\bar{b}c = \bar{b}c$

Mappe di Karnaugh

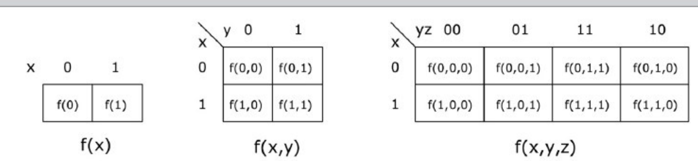
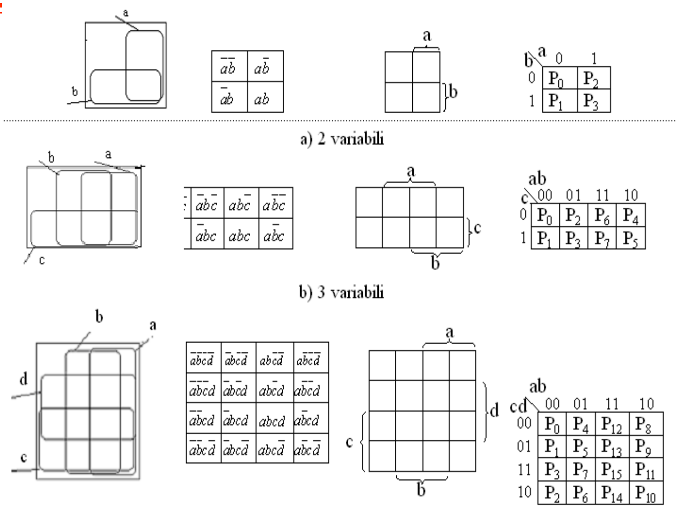


Figura 3.8 - Mappe di Karnaugh di ordine 1, 2 e 3. La figura indica chiaramente che ogni casella riporta il valore di *f* per la configurazione delle variabili che ne dà le coordinate.

da: G. Bucci. Calcolatori Elettronici – Architettura e organizzazione. © McGraw-Hill, 2009

Mappe di Karnaugh



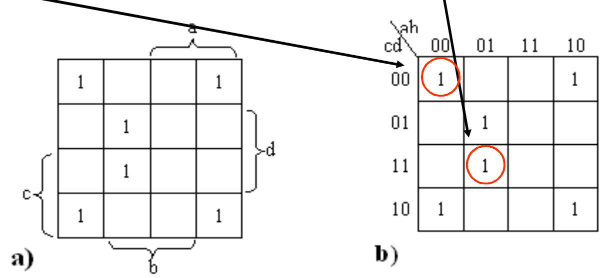
a) 2 variabili

b) 3 variabili

c) 4 variabili

Rappresentazione dei mintermini sulle Mappe di Karnaugh

$$y = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}bcd$$



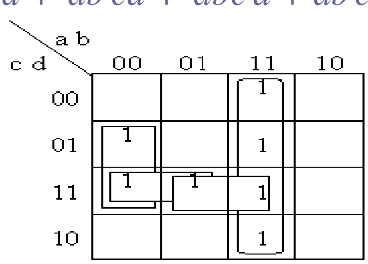
Proprietà notevoli

- I mintermini che si oppongono in una sola variabile sono adiacenti e quindi le coppie di quadratini adiacenti rappresentano clausole di ordine *n*-1;
- Le clausole di ordine *n*-1 (*n*≥*2)* che si oppongono in una sola variabile sono ancora adiacenti e quindi le "quadruple" rappresentano clausole di ordine *n*-2;
- Le "ottuple" (*n*≥*3*) rappresentano clausole di ordine *n-3*.
- Le clausole sono anche dette "cubi", o "sottocubi"
- Maggiore è la dimensione del sottocubo, minore l'ordine (numero di letterali) della clausola
- **I sottocubi di area massima rappresentano gli implicanti primi della funzione**

Implicanti primi sulle mappe di Karnaugh

- Gli implicanti primi sono individuati graficamente come sottocubi di area massima

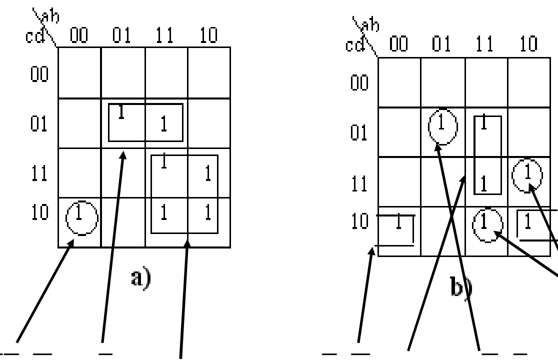
$$f = abcd + \bar{a}bcd + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d + abc\bar{d} + ab\bar{c}\bar{d}$$



Implicanti primi: $bcd,\ \bar{a}cd,\ \bar{a}\bar{b}d,\ ab$

Mappe di Karnaugh

Due modi per rappresentare la stessa funzione:



$$a)\ y_1 = \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + b\bar{c}d + ac \qquad b)\ y_2 = \bar{b}c\bar{d} + abd + \bar{a}b\bar{c}d + a\bar{b}cd + abc\bar{d}$$

Mappe di Karnaugh

$a)\ f(x,y,z) = \bar{y}\bar{z} + \bar{y}z + \bar{x}y$ $\qquad$ $b)\ f(x,y,z) = \bar{x} + \bar{y}$

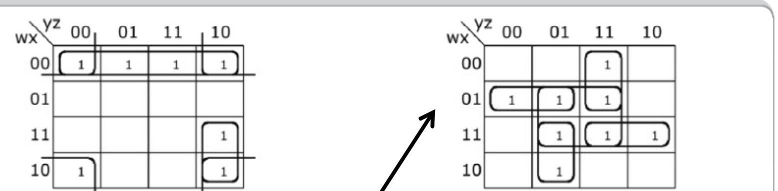
Figura 3.10 - Esempio di due diverse coperture di una stessa funzione. La copertura di destra, essendo formata da sottocubi più ampi, fornisce la minima espressione SP.

da: G. Bucci. Calcolatori Elettronici – Architettura e organizzazione. © McGraw-Hill, 2009

Implicanti primi essenziali

- Un implicante primo E_i di una funzione *f* è detto ***essenziale*** se è l'unico ad essere implicato da un mintermine di *f*
- In altri termini, E_i è l'unico a "*coprire*" un determinato mintermine della funzione

Mappe di Karnaugh



a) $f(w,x,y,z) = \overline{w}\,\overline{z} + wy\overline{z} + \overline{x}\,\overline{z}$ *b*) $f(w,x,y,z) = \overline{w}x\overline{y} + \overline{w}yz + wxy + w\overline{y}z$

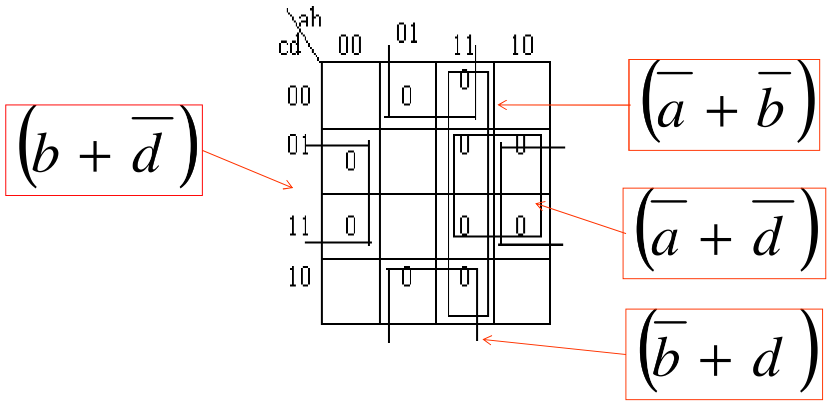
Figura 3.11 - Esempio di mappe di ordine 4. Sulla mappa di sinistra si noti l'implicante corrispondente alle quattro caselle poste agli angoli della mappa. Esso porta un contributo pari a $\overline{x}\overline{y}$. L'espressione minima SP relativa alla mappa di destra non comprende l'implicante primo *xz*

$\overline{a}\,\overline{b}c + \overline{w}x\overline{y}, \overline{w}yz, wxy, w\overline{y}z$ **sono essenziali, xz NO**

da: G. Bucci. Calcolatori Elettronici – Architettura e organizzazione. © McGraw-Hill, 2009

Mappe di Karnaugh

- Mappe per funzioni in forma S



Mappe di Karnaugh a 5 variabili

- Possono essere usate anche per funzioni di 5 variabili, perdendo tuttavia l'efficacia e l'immediatezza della rappresentazione