

## Corso di Calcolatori Elettronici I

---

# Algebra di Boole: forme NAND e NOR

Prof. Roberto Canonico



Università degli Studi di Napoli Federico II  
Dipartimento di Ingegneria Elettrica  
e delle Tecnologie dell'Informazione  
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

---

## Funzioni NAND e NOR

---

$$\text{NAND} \quad x \uparrow y = \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\text{NOR} \quad x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

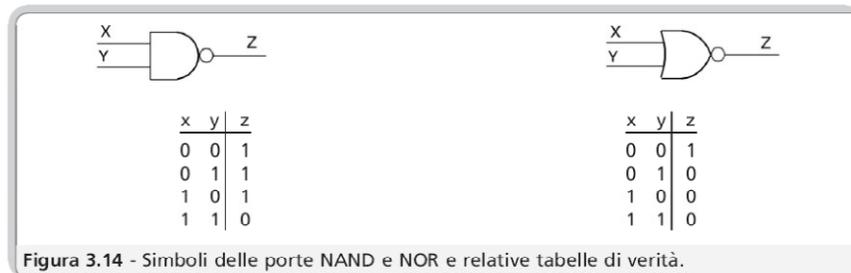
De Morgan

$$x_1 \uparrow x_2 \uparrow \dots \uparrow x_n = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_n}$$

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow \dots \downarrow x_n = \overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \dots \cdot \overline{x_n}$$


---

## Porte NAND e NOR



da: G. Bucci. Calcolatori Elettronici – Architettura e organizzazione. © McGraw-Hill, 2009

## Non associatività di NAND e NOR

- NAND e NOR *non* godono della proprietà associativa

$$\text{NAND } (x_1 \uparrow x_2) \uparrow x_3 \neq x_1 \uparrow (x_2 \uparrow x_3) \neq x_1 \uparrow x_2 \uparrow x_3$$

$$\text{NOR } (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \neq x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \neq x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3$$

## AND, OR e NOT da NAND e NOR

- E' possibile ottenere una AND e una OR tramite NAND e NOR

$$x \cdot y = \overline{x \uparrow y} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$$

$$x + y = \overline{x \downarrow y} = \overline{x} \uparrow \overline{y}$$

- E' possibile ottenere una NOT tramite NAND e NOR

$$\text{NAND } x \uparrow 1 = \overline{x \cdot 1} = \overline{x}$$

$$\text{NOR } x \downarrow 0 = \overline{x + 0} = \overline{x}$$

## AND, OR e NOT da NAND e NOR

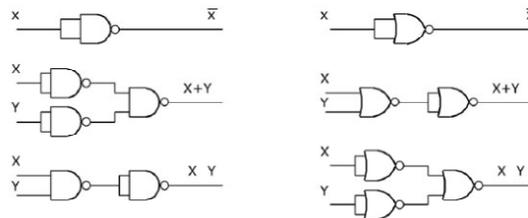


Figura 3.15 - Costruzione delle operazioni di NOT, OR e AND dalle porte NAND e NOR.

## Funzioni NAND e NOR

- Riassumendo, le NAND permettono di ottenere una NOT, una AND ed una OR
- Similmente per la NOR
- Ricordiamo che {AND,OR,NOT} è un insieme funzionalmente completo, quindi →

{NAND} e {NOR} sono due insiemi funzionalmente completi

## NAND e NOR: proprietà

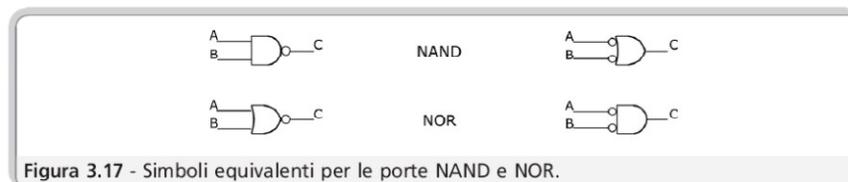


Figura 3.17 - Simboli equivalenti per le porte NAND e NOR.

## Proprietà di NAND e NOR

- Una NAND di prodotti è uguale alla NAND delle variabili indipendenti.  
(**Duale**) Una NOR di somme è uguale alla NOR delle variabili indipendenti

$$(ab) \uparrow (cd) = \overline{(ab) \cdot (cd)} = a \uparrow b \uparrow c \uparrow d$$

$$(a+b) \downarrow (c+d) = \overline{(a+b) + (c+d)} = a \downarrow b \downarrow c \downarrow d$$

- Una OR di NAND è uguale alla NAND delle variabili indipendenti.  
(**Duale**) Una AND di NOR è uguale alla NOR delle variabili indipendenti

$$(a \uparrow b) + (c \uparrow d) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{c} \cdot \overline{d} = a \uparrow b \uparrow c \uparrow d$$

$$(a \downarrow b) \cdot (c \downarrow d) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} = a \downarrow b \downarrow c \downarrow d$$

- Una AND è uguale ad una NOR di NAND.  
(**Duale**) Una OR è uguale ad una NAND di NOR

$$(a \uparrow b) \downarrow (c \uparrow d) = abcd$$

$$(a \downarrow b) \uparrow (c \downarrow d) = a + b + c + d$$

## Forme NAND e NOR di una funzione

- Una forma elementare di tipo P si trasforma in una forma NAND a due livelli operando come segue:
  - tutti gli operatori si trasformano in NAND, rispettando le priorità;
  - le clausole costituite da un solo letterale vengono negate.

$$f = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n = \overline{\overline{\chi_1} \cdot \overline{\chi_2} \cdot \dots \cdot \overline{\chi_n}} = \overline{\chi_1} \uparrow \overline{\chi_2} \uparrow \dots \uparrow \overline{\chi_n}$$

- Dualmente per la forma di tipo S

## Da rete AND-OR a rete NAND

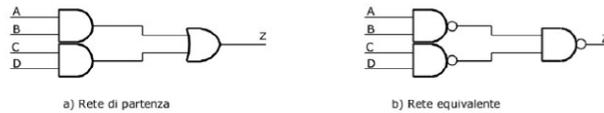


Figura 3.16 - Passaggio da rete SP a rete NAND. In questo caso, il passaggio richiede solo la sostituzione di porte AND e OR con porte NAND.

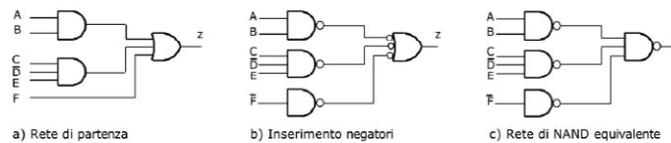


Figura 3.18 - Passaggio da rete SP a rete di NAND.

da: G. Bucci. Calcolatori Elettronici – Architettura e organizzazione. © McGraw-Hill, 2009

## Generalizzando...

- Se le  $\gamma_n$  sono funzioni invece che letterali, la proprietà precedente può essere generalizzata
- Una forma con operatori AND e OR a  $n$  livelli che abbia come ultimo livello una OR (*AND*) si trasforma in una forma **NAND** (*NOR*), operando come segue:
  - tutti gli operatori si trasformano in NAND (*NOR*) rispettando le priorità;
  - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano.

## Forme NAND e NOR di una funzione

- Una forma con operatori AND e OR a  $n$  livelli che abbia come ultimo livello una OR (AND) si trasforma in una forma **NOR** (NAND) ad  $n+1$  livelli, operando come segue:
  - si aggiunge una NOR (NAND) finale che complementa le uscite;
  - tutti gli operatori si trasformano in NOR (NAND) rispettando le priorità;
  - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano.

$$f = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n) \cdot 1 = (\gamma_1 \downarrow \gamma_2 \downarrow \dots \downarrow \gamma_n) \downarrow 0$$

## Esempio 1

Dalla funzione a 2 livelli in forma P:

$$f = ab + \bar{a}\bar{b} + c$$

si ottiene la forma NAND

$$f = (a \uparrow b) \uparrow (\bar{a} \uparrow \bar{b}) \uparrow \bar{c}$$

ove  $\bar{c}$  è negato perché singolo letterale (livello complementare 1) oppure quella NOR

$$f = ((\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow (a \downarrow b) \downarrow c) \downarrow 0$$

ove  $a, b$  sono negate in entrambe le clausole perché diventate di livello 3 e  $c$  non lo è più perché di livello 2.

## Esempio 2

Dualmente dalla funzione in forma S

$$f = (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) \cdot c$$

si ottiene la forma NOR

$$f = (a \downarrow b) \downarrow (\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow \bar{c}$$

oppure quella NAND

$$f = ((\bar{a} \uparrow \bar{b}) \uparrow (a \uparrow b) \uparrow c) \uparrow 1$$

## Esempio 3

La funzione a 4 livelli

$$f = b \cdot (c + \bar{c} \cdot (\bar{a} + d))$$

si trasforma nella forma NOR ancora a 4 livelli

$$f = \bar{b} \downarrow (c \downarrow (c \downarrow (\bar{a} \downarrow d)))$$

dove  $b$  e  $\bar{c}$  sono negate rispettivamente ai livelli complementari 1 e 3, oppure nella forma NAND a 5 livelli

$$f = (b \uparrow (\bar{c} \uparrow (\bar{c} \uparrow (a \uparrow \bar{d})))) \uparrow 1$$

ove  $\bar{c}$  al livello 3 e  $\bar{a}, d$  al livello 5 sono negati.