

## Corso di Calcolatori Elettronici I

---

---

# Macchine sequenziali

**Prof. Roberto Canonico**

Università degli Studi di Napoli Federico II  
Dipartimento di Ingegneria Elettrica  
e delle Tecnologie dell'Informazione  
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione



## Automa a Stati Finiti (ASF)

---

---

- E' una prima astrazione di macchina "dotata di memoria" che esegue algoritmi
  - Introduce il concetto fondamentale di "**STATO**" che informalmente può essere definito come una particolare condizione della macchina, in conseguenza del quale la macchina reagisce con una determinata "uscita" ad un determinato "ingresso"
  - Poiché l'uscita dipende anche dallo *stato*, l'ASF è un automa intrinsecamente dotato di una *memoria interna* che può quindi *influenzare le risposte date dall'automa* anche a parità di dati d'ingresso
  - Esempio: riconoscitore di sequenza
-

## Modello di Automa a Stati Finiti

- Un ASF è una quintupla  $\langle Q, I, U, t, w \rangle$  dove:
  - $Q$ : insieme finito di stati interni       $q \in Q$
  - $I$ : insieme finito di ingressi       $i \in I$
  - $U$ : insieme finito di uscite       $u \in U$
  - $t$ : funzione di transizione
    - $t: Q \times I \rightarrow Q$
  - $w$ : funzione di uscita
    - $w: Q \times I \rightarrow U$       MODELLO ASF DI MEALY
    - $w: Q \rightarrow U$       MODELLO ASF DI MOORE

## Significato delle funzioni $t$ e $w$

- Funzione stato prossimo  $t$ 
  - Ad ogni stato presente e per ogni simbolo di ingresso la funzione  $t$  associa uno stato futuro:
 
$$t: Q \times I \rightarrow Q$$
  - Ad ogni coppia  $\{\text{stato}, \text{simbolo di ingresso}\}$  è associato, se specificato, uno stato futuro
- Funzione d'uscita  $w$ 
  - Genera il simbolo d'uscita
  - Macchine di Mealy. L'uscita dipende sia dallo stato sia dall'ingresso:
 
$$w: Q \times I \rightarrow U$$
  - Macchine di Moore. L'uscita dipende solamente dallo stato:
 
$$w: Q \rightarrow U$$

## Tabella degli stati

- Una macchina sequenziale può essere descritta mediante la *Tabella degli stati*
- Indici di colonna sono i simboli di ingresso  $i \in I$
- Indici di riga sono i simboli di stato  $q \in Q$  che indicano lo stato presente
- Elementi sono:
  - Macchine di Mealy: La coppia  $\{q', u\}$ :
    - $q' = t(i, q)$  è il simbolo stato prossimo
    - $u = w(i, q)$  è il simbolo di uscita
  - Macchine di Moore: Il simbolo stato prossimo  $q'$ :
    - $q' = t(i, q)$  è il simbolo stato prossimo
- Nelle macchine di Moore i simboli d'uscita sono associati allo stato presente

## Tabella degli stati

- Macchine di Mealy

|                   |                   |      |
|-------------------|-------------------|------|
| $i_1$             | $i_2$             | ..   |
| $S_j^{t+1} / u_j$ | $S_k^{t+1} / u_k$ | .... |
| $S_m^{t+1} / u_m$ | $S_l^{t+1} / u_l$ | .... |
| ....              | ....              | .... |

- Macchine di Moore

|             |             |      |       |
|-------------|-------------|------|-------|
| $i_1$       | $i_2$       | ..   |       |
| $S_j^{t+1}$ | $S_k^{t+1}$ | .... | $u_1$ |
| $S_m^{t+1}$ | $S_l^{t+1}$ | .... | $u_2$ |
| ....        | ....        | .... | ....  |

## Rappresentazione grafica di un ASF

---

- E' possibile rappresentare graficamente un ASF mediante un **grafo** detto *diagramma degli stati*
  - *Stato*: rappresentato da un nodo (cerchio)
  - *Transizione*: rappresentata da un arco orientato (freccia)
  - *Ciascun arco viene etichettato con l'ingresso che causa la transizione e la conseguente uscita, separati da un simbolo (/)*
  - *Se l'uscita non è specificata, può essere indicata con il simbolo "-"*
- 

## Diagramma degli stati

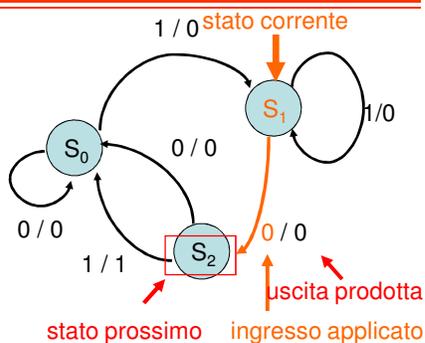
---

- Spesso, la stesura della *Tabella degli stati* è preceduta da una rappresentazione grafica ad essa equivalente, denominata *Diagramma degli stati*
  - Il Diagramma degli stati è un *grafo orientato*  $G(V,E,L)$ 
    - *V* - Insieme dei *nodi*
      - Ogni nodo rappresenta uno stato
      - Ad ogni nodo è associato un simbolo d'uscita (macchine di Moore)
    - *E* - Insieme degli *archi*
      - Ogni arco rappresenta le transizioni di stato
    - *L* - Insieme degli:
      - Ingressi e Uscite (macchine di Mealy)
      - Ingressi (macchine di Moore)
-

## Grafo degli stati

- Grafo degli stati

- ogni nodo corrisponde ad uno stato
- ogni transizione (arco) indica il prossimo stato in corrispondenza di un determinato ingresso
- Mealy: uscita associata all'arco
- Moore: uscita associata al nodo (stato)



ad esempio, trovandosi nello stato  $S_1$ , nel caso sia applicato il valore di ingresso  $0$ , la macchina si posta nel nuovo stato  $S_2$  producendo come uscita il valore  $0$

9

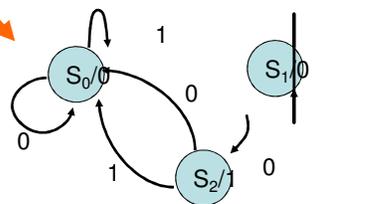
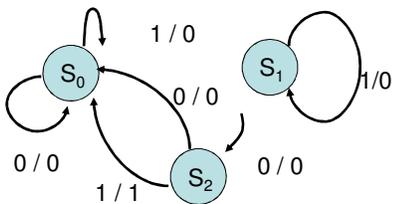
## Tabelle e grafi degli stati

|       | 0       | 1       |
|-------|---------|---------|
| $S_0$ | $S_0/0$ | $S_1/0$ |
| $S_1$ | $S_2/0$ | $S_1/0$ |
| $S_2$ | $S_0/0$ | $S_0/1$ |

Mealy

|       | 0     | 1     | U |
|-------|-------|-------|---|
| $S_0$ | $S_0$ | $S_1$ | 0 |
| $S_1$ | $S_2$ | $S_1$ | 0 |
| $S_2$ | $S_0$ | $S_0$ | 1 |

Moore



10

## Esempio – Macchina di Mealy

- Questo esempio mostra l'equivalenza delle due rappresentazioni nel caso di una macchina di Mealy

Diagramma degli stati

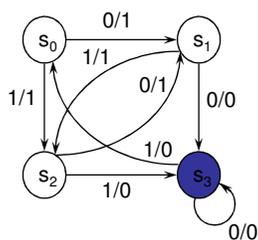


Tabella degli stati

|                | 0                 | 1                 |
|----------------|-------------------|-------------------|
| S <sub>0</sub> | S <sub>1</sub> /1 | S <sub>2</sub> /1 |
| S <sub>1</sub> | S <sub>3</sub> /0 | S <sub>2</sub> /1 |
| S <sub>2</sub> | S <sub>1</sub> /1 | S <sub>3</sub> /0 |
| S <sub>3</sub> | S <sub>3</sub> /0 | S <sub>0</sub> /0 |

## Esempio – Macchina di Moore

- Questo esempio mostra l'equivalenza delle due rappresentazioni nel caso di una macchina di Moore

Diagramma degli stati

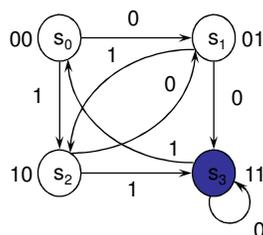


Tabella degli stati

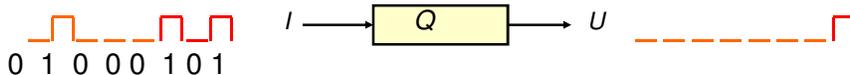
|                | 0              | 1              | U  |
|----------------|----------------|----------------|----|
| S <sub>0</sub> | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | 00 |
| S <sub>1</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>2</sub> | 01 |
| S <sub>2</sub> | S <sub>1</sub> | S <sub>3</sub> | 10 |
| S <sub>3</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>0</sub> | 11 |

## Macchine sequenziali

- Le macchine sequenziali sono realizzazioni di automi a stati finiti in cui i valori di  $I$ ,  $U$  e  $Q$  sono codificati in binario
- Problema della tempificazione: in corrispondenza di quali eventi avvengono le transizioni di stato ?
- Esistono diversi modelli realizzativi di macchine sequenziali che differiscono per il modo con cui viene risolto il problema della tempificazione

## Esempio

- Vogliamo realizzare una macchina in grado di riconoscere la sequenza 101
  - la macchina avrà un ingresso  $I$  su cui arriva una sequenza di 1 o 0
  - una uscita  $U$  che si alza solo quando in ingresso è appena arrivata una sequenza **101**



## Esempio

- potremo usare una macchina a stati finiti con tre stati  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  con i seguenti significati
  - $S_0$  è lo stato in cui non è stato riconosciuto ancora niente in ingresso
  - $S_1$  è lo stato in cui ci si trova se è stata riconosciuta una sequenza di un bit uguale a "1"
  - $S_2$  è lo stato in cui ci si trova se è stata riconosciuta la sequenza "10". A questo punto, se arriva un '1' si sarà riconosciuta la sequenza "101", se arriva '0' non si è riconosciuto niente. In ogni caso, si ritorna in  $S_0$ , ma con uscite diverse a seconda che si sia riconosciuta o meno la sequenza

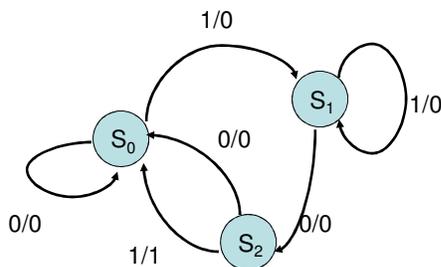
15

## Esempio

Automa in grado di riconoscere la sequenza in ingresso **101**

|       | 0       | 1       |
|-------|---------|---------|
| $S_0$ | $S_0/0$ | $S_1/0$ |
| $S_1$ | $S_2/0$ | $S_1/0$ |
| $S_2$ | $S_0/0$ | $S_0/1$ |

descrizione tramite tabella



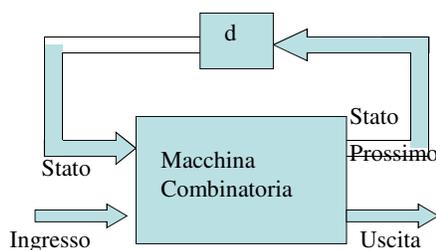
descrizione tramite grafo

16

## Modello fondamentale

*Una Macchina Sequenziale  
può essere realizzata con:*

- Una macchina Combinatoria
- Un ritardo



17

## Le Parti della Macchina

- L'ingresso della macchina combinatoria è l'ingresso della macchina sequenziale *più* l'uscita del ritardo (lo stato precedente).
- L'uscita della macchina combinatoria è l'uscita della macchina sequenziale *più* il prossimo stato della macchina.

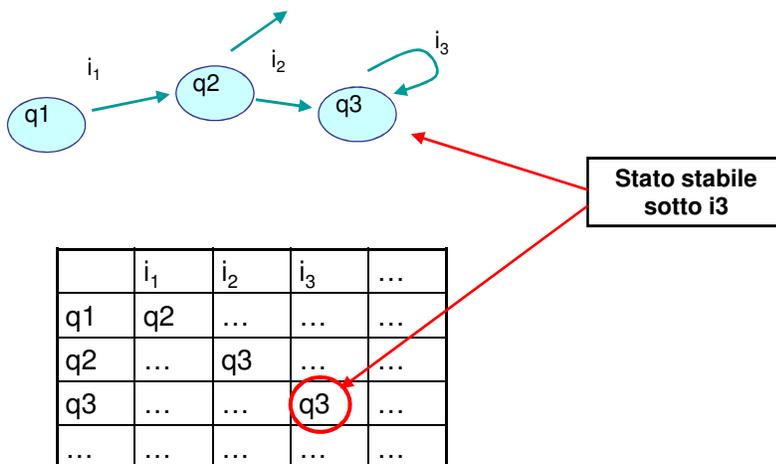
18

## Stati stabili sotto un ingresso

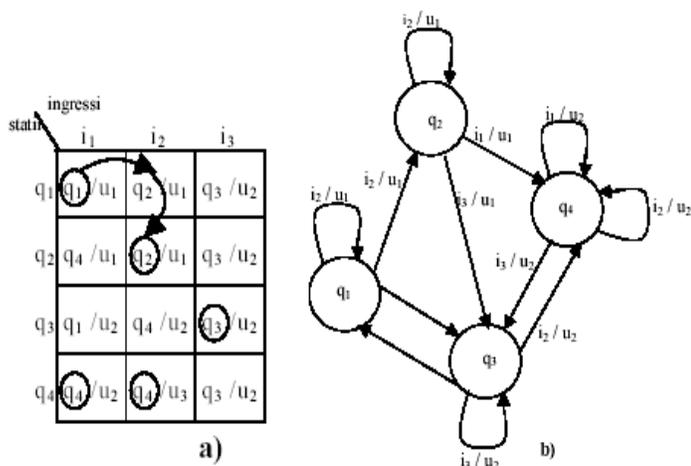
- Una macchina con ingressi a livelli ha uno **stato stabile**  $q$  sotto un ingresso  $i$  se
 
$$\tau(q,i) = q \quad (\tau \text{ funzione prossimo stato})$$
- In altre parole, applicando in maniera continua l'ingresso  $i$  la macchina permane nello stato  $q$
- Se partendo da qualsiasi stato ed applicando qualsiasi ingresso è sempre possibile arrivare in uno stato stabile, la macchina si dice **asincrona**

19

## Stati stabili

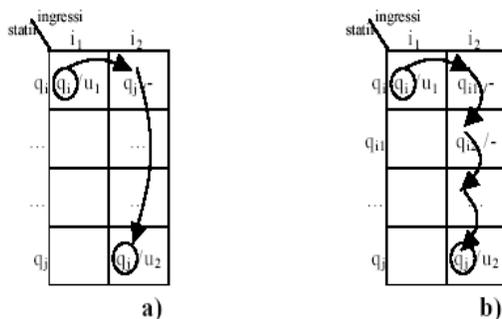


## Macchina Asincrona



## Macchina Asincrona

*Una macchina con sequenze di ingressi a livelli funziona solo se è asincrona.*



*Schema di transizioni in macchine asincrone:  
a) transizione diretta; b) transizione con cicli*

## Macchine asincrone

|    | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
|----|-------|-------|-------|
| q1 | q1    | q2    | q3    |
| q2 | q4    | q2    | q3    |
| q3 | q1    | q4    | q3    |
| q4 | q4    | q4    | q3    |

La macchina è asincrona: partendo da qualsiasi stato ed applicando una qualsiasi sequenza fissa in ingresso si perviene ad uno stato stabile. Es.:

Partendo da  $q1$  ed applicando  $i_2$  si rimane in  $q2$  (purché  $i_2$  sia applicato per un tempo sufficiente a far arrivare la macchina nello stato  $q2$ )

23

## Macchine asincrone

Applicando una sequenza di due ingressi in una macchina asincrona, la transizione tra uno stato stabile e l'altro avviene mediante una transizione orizzontale e poi  $k$  transizioni verticali verso lo stato stabile (ciclo lungo  $k$ )

|    | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
|----|-------|-------|-------|
| q1 | q1    | q2    | q3    |
| q2 | q4    | q2    | q3    |
| q3 | q1    | q4    | q3    |
| q4 | q4    | q4    | q3    |

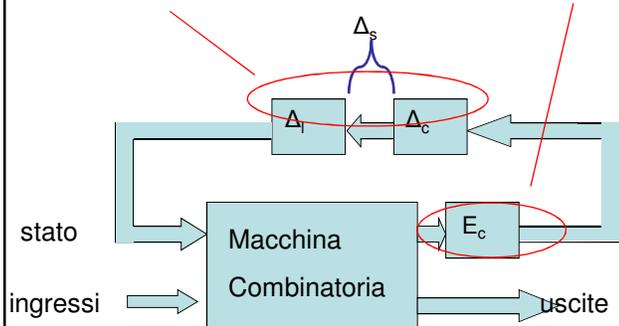
L'unica condizione necessaria a garantire il passaggio da uno stato stabile ad un nuovo stato stabile noto è che il nuovo ingresso sia applicato **per un tempo sufficiente** a permettere la transizione attraverso gli stati intermedi

Le uscite possono essere assegnate ai soli stati stabili

## Macchine asincrone

ritardo puro della macchina combinatoria ( $\Delta_c$ ) più ritardo delle linee ( $\Delta_l$ )

ritardo inerziale della macchina combinatoria  $E_c$



La transizione tra due stati stabili avviene soltanto se la durata  $d$  dell'ingresso che genera la transizione attraverso  $k$  stati consecutivi è tale che

$$d > k(E_c + \Delta_s)$$

## Macchina Asincrona

