Corso di Calcolatori Elettronici I

Minimizzazione di funzioni booleane: parte II

Prof. Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell’Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Corso di Laurea in Ingegneria dell’Automazione

Procedura per la minimizzazione

1. **Espansione**: ricerca di tutti gli implicanti primi della funzione *f*
2. **Copertura** della funzione: determinazione del minimo insieme di implicanti primi che copra tutti i mintermini implicanti *f*
   – Selezione degli implicanti primi essenziali, per individuare il **nucleo *N***
   – Determinazione della forma minima di *R*, da aggiungere ad *N* per esprimere *f* in forma minima

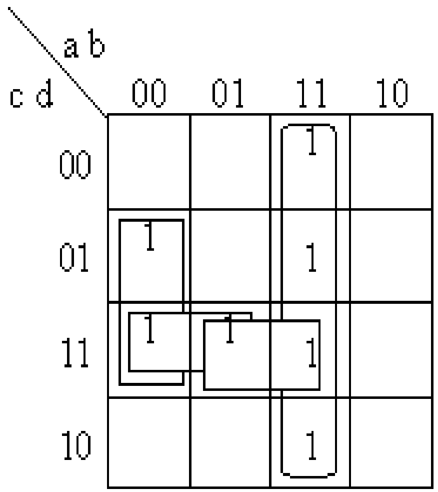
Espansione sulle mappe di Karnaugh

- L'operazione di espansione sulle mappe di Karnaugh consiste nel determinare i *sottocubi di area massima*
- Sottocubi: gruppi di 2^k caselle adiacenti
  - Rappresentano clausole di ordine n-k

Espansione sulle mappe di Karnaugh (esempio)

$$f = abcd + \bar{a}bcd + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d + abc\bar{d} + ab\bar{c}\bar{d}$$

- Gli implicanti primi sono individuati graficamente come sottocubi di area massima sulla mappa di Karnaugh



Primi implicanti: $bcd,\ \bar{a}cd,\ \bar{a}\bar{b}d,\ ab$

Espansione: Metodo di McCluskey

- Ciascuna clausola della funzione viene indicata da una stringa di *1*, *0* e ‘-’ :
  - *1* per le variabili in forma affermata
  - *0* per quelle in forma negata
  - ‘-’ per le variabili che non compaiono nel prodotto

- Le clausole individuate vengono suddivise in classi contenenti elementi con egual numero di *1*, per facilitare l’individuazione dei consensi e ridurre il numero di confronti

Metodo di McCluskey

1. Si riconduce la funzione *f* alla forma canonica di tipo P e i mintermini (clausole di ordine n) si esprimono nel formato visto prima
2. Si suddividono i mintermini in classi che si ordinano, da "classe 0" a "classe n"; si pone, $k=n$
3. Per ogni i da 0 a $k-1$: si generano i consensi di ordine $k-1$ accoppiando le clausole della "classe i" con quelle della "classe i+1"; si marcano le clausole che generano consenso
4. Le clausole non marcate sono implicanti primi di ordine *k*. Nei consensi generati si eliminano gli eventuali doppioni; i consensi stessi sono ordinati e riorganizzati da "classe 0" a "classe $k-1$".
5. Si pone $k=k-1$ e si ripete il passo 3 finché non sia $k \geq 0$.

Metodo di McCluskey: esempio

$$f = abcd + \bar{a}\,bcd + \bar{a}\bar{b}\,cd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\,d + ab\,\bar{c}\,d + abc\,\bar{d} + ab\,\bar{c}\bar{d}$$

Implicanti del 4° ordne	Implicanti del 3° ordne	Implicanti del 2° ordne
1) 0001 √	1-2) 00-1	-------------
------------	-------------	3-5-6-7) 11--
2) 0011 √	2-4) 0-11	3-6-5-7) 11--
3) 1100 √	3-5) 110- √	
------------	3-6) 11-0 √	
4) 0111 √	-------------	
5) 1101 √	4-7) -111	
6) 1110 √	5-7) 11-1 √	
------------	6-7) 111- √	
7) 1111 √		

Gli implicanti
non spuntati sono
gli implicanti primi

Primi implicanti: $bcd,\ \bar{a}\,cd,\ \bar{a}\bar{b}\,d,\ ab$

Matrice di Copertura e Copertura minima

- Individuati gli implicanti primi, occorre scegliere tra di essi un insieme minimo che consenta di “coprire” tutta la funzione

	abc d	0001	0011	1100	0111	1101	1110	1111
A	00-1	1	1					
B	0-11		1		1			
C	-111				1			1
D	11--			1		1	1	1

Copertura minima

- Un modo generale per definire il problema della copertura è il seguente:
  - data una matrice di N righe e M colonne, i cui elementi siano $a_{ij} = 1$ oppure $a_{ij} = 0$, si dice che una riga i *copre* una colonna j se $a_{ij} = 1$.
    Si selezioni il numero minimo di righe che coprono tutte le colonne.
- Il problema della copertura è di interesse generale in molti settori differenti
  - ad esempio, in problemi di testing

Individuazione del nucleo sulla matrice di copertura

- Sulla matrice di copertura corrispondono alle righe che coprono le colonne con un unico ‘1’
- Nell’esempio N = A + D

		abc d	0001	0011	1100	0111	1101	1110	1111
ESSENZIALE	A	00-1	1	1					
	B	0-11		1		1			
	C	-111				1			1
ESSENZIALE	D	11--			1		1	1	1

Metodi di copertura minima

- Trovare la copertura minima vuol dire trovare la forma minima di R, cioè quegli implicanti che, pur non essendo essenziali, devono essere eventualmente aggiunti al nucleo per trovare una forma che "copra" tutti i mintermini
- Per funzioni di poche variabili, la scelta dei PI di R da aggiungere a quelli essenziali di N può essere fatta direttamente sulla mappe di Karnaugh, valutando ad occhio le varie (poche) alternative possibili
- Un metodo tabellare: righe/colonne dominanti

Righe/Colonne dominanti

- Chiamiamo “***linea***” indifferentemente una riga o una colonna
- Una linea *L* domina la linea *K* se la “include”, ovvero se contiene tutti i suoi 1

La colonna di destra domina quella di sinistra

1	1	0	1	0
0	1	0	1	0

La riga in alto domina l’altra

Righe/Colonne dominanti

- Se si eliminano le **righe dominate** e le colonne **dominanti**, da una matrice di copertura, se ne trae una equivalente
  - che rappresenta, cioè, il medesimo problema di copertura

Matrice di copertura: criteri di dominanza

- La ***riga i domina la riga j*** se l'implicante Pi copre tutti i mintermini che copre l'implicante Pj più almeno uno
  - ✓ i mintermini coperti dall'implicante dominato sono un sottoinsieme dei mintermini coperti dall'implicante dominante: scegliendo di eliminare l'implicante dominato e mantere il dominante avremmo la certezza di coprire un insieme maggiore di mintermini, con un costo totale di copertura di sicuro non maggiore di quello che si avrebbe facendo la scelta opposta
- La ***colonna i domina la colonna j*** se il mintermine mj è coperto da un sottoinsieme degli implicanti che coprono mi
  - ✓ qualsiasi implicante copra mj copre anche mi: scegliendo di eliminare il mintermine mi e mantenere mj avremmo la certezza che gli implicanti selezionati per coprire quest'ultimo coprono anche il primo, con un costo totale di copertura non maggiore di quello che si avrebbe facendo la scelta opposta

Righe/Colonne dominanti

- Il metodo tabellare per righe/colonne dominanti procede allora come segue:
  1. Si ricercano gli implicanti primi (*PI*) e si individuano quelli essenziali;
  2. Si includono nella forma minima i *PI* essenziali, eliminandoli dalla matrice, unitamente con i mintermini ricoperti;
  3. Si eliminano le righe dominate e le colonne dominanti;
  4. Si individuano i *PI* essenziali “secondari” della matrice così ridotta;
  5. Si ripetono i passi 2, 3, 4 finché è possibile.

Esempio (1/6)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,1,2,8,9,15,17,21,24,25,27,28,31) =$$

$$= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 x_5 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4\overline{x}_5 + \ldots\ldots$$

Esempio (2/6)

Implicanti	Mintermini coperti
A = -100-	8,9,24,25
B = --001	1,9,17,25
C = 0-00-	0,1,8,9
D = 11-11	27,31
E = -1111	15,31
F = 110-1	25,27
G = 10-01	17,21
H = 11-00	24,28
J = 000-0	0,2

Esempio (3/6)

	P_0	P_1	P_2	P_8	P_9	P_{15}	P_{17}	P_{21}	P_{24}	P_{25}	P_{27}	P_{28}	P_{31}
A				1	1				1	1			
B		1			1		1			1			
C	1	1		1	1								
D											1		1
E						1							1
F										1	1		
G							1	1					
H									1			1	
J	1		1										

Primi implicanti essenziali: N (nucleo) = J, E, G, H

Esempio (4/6)

	P_0	P_1	P_2	P_8	P_9	P_{15}	P_{17}	P_{21}	P_{24}	P_{25}	P_{27}	P_{28}	P_{31}
A				1	1				1	1			
B		1			1		1			1			
C	1	1		1	1								
D											1		1
E						1							1
F										1	1		
G							1	1					
H									1			1	
J	1		1										

Gli implicanti primi essenziali J,E,G,H
coprono i mintermini: 0, 2, 15, 17, 21, 24, 28, 31

Esempio (5/6)

	P_1	P_8	P_9	P_{25}	P_{27}
A		1	1	1	
B	1		1	1	
C	1	1	1		
D					1
F				1	1

	P_1	P_8	P_{25}	P_{27}
A		1	1	
B	1		1	
C	1	1		
F			1	1

	P_1	P_8
A		1
B	1	
C	1	1

riga D dominata dalla F
Colonna P_9 dominante

F implicante primo essenziale secondario:
copre P_{25} e P_{27}

Righe A e B dominate dalla **C**

Esempio (6/6)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,1,2,8,9,15,17,21,24,25,27,28,31) =$$

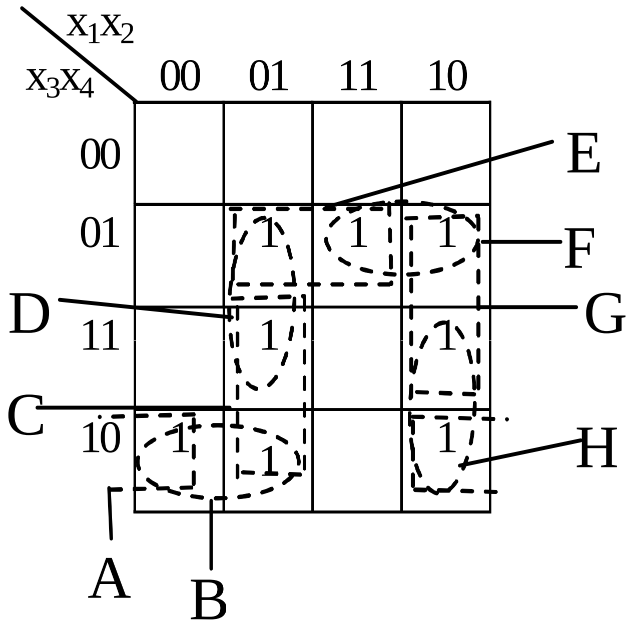
$$= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 x_5 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4\overline{x}_5 + \ldots\ldots =$$

$$= E + G + H + J + F + C =$$

$$= x_2x_3x_4x_5 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_4x_5 + x_1x_2\overline{x}_4\overline{x}_5 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_5$$

$$+ x_1x_2\overline{x}_3x_5 + \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4$$

Un altro esempio: funzione ciclica



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				**1**		**1**		
B				**1**	**1**			
C					**1**		**1**	
D	**1**						**1**	
E	**1**		**1**					
F		**1**	**1**					
G		**1**						**1**
H						**1**		**1**

- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A+C+E+G oppure B+D+F+H

Matrice di copertura: ESEMPIO (1/2)

	m1	m4	m5	m6	m7	m9	m11	m14	m15
A	X		X						
B	X					X			
C						X	X		
D							X		X
E		X	X	X	X				
F				X	X			X	X

Il mintermine m4 risulta coperto solo da E e il mintermine m14 solo da F:

E ed F pertanto sono implicanti essenziali e possono essere cancellati dalla tabella insieme a tutti i mintermini che coprono.

C(F)= {E,F}

Matrice di copertura: ESEMPIO (2/2)

	m1	m9	m11
~~A~~	~~X~~		
B	X	X	
C		X	X
~~D~~			~~X~~

Nella tabella risultante ogni mintermine è coperto almeno da due implicanti: non ci sono più implicanti essenziali e si può procedere col metodo della dominanza:

La riga C domina la riga D e la B domina la A: cancello le righe A e D.

	m1	m9	m11
B	X	X	
C		X	X

A questo punto B e C coprono mintermini non coperti da altri implicanti: essi sono allora etichettati come **implicanti essenziali *secondari*** e aggiunti alla **copertura minima di f**:

C(F)= {E,F,B,C}