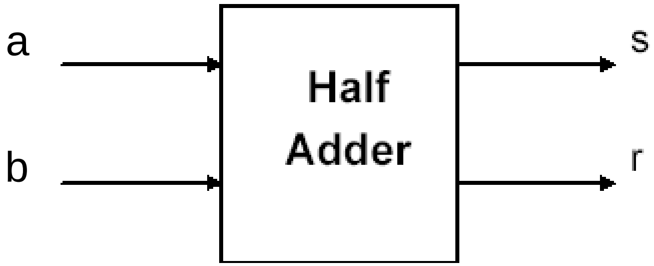
Corso di Calcolatori Elettronici I

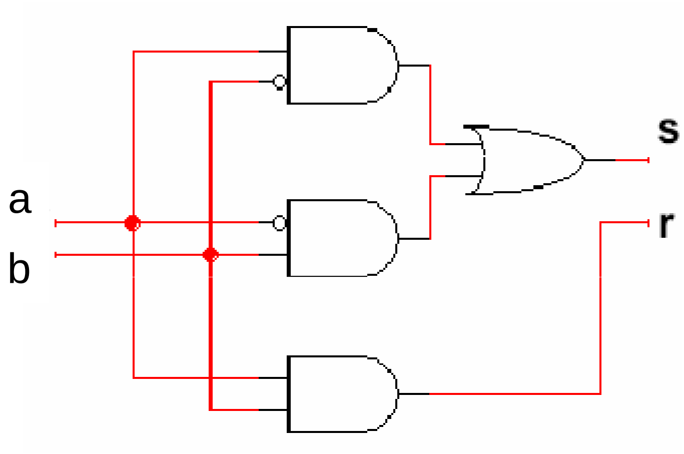
Macchine combinatorie: addizionatori binari

Prof. Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Half Adder

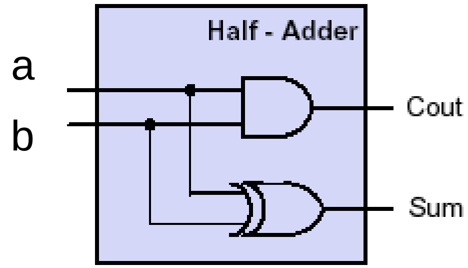




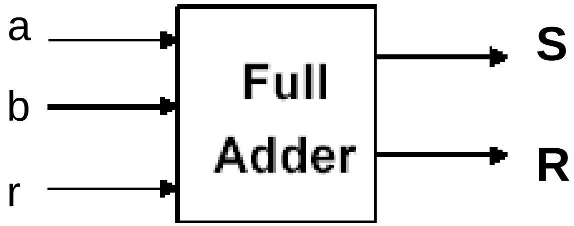
a	b	s	r
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$s = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b} = a \oplus b$

$r = a \cdot b$



Full Adder (1/2)



a	b	r	S	R
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

S

r \ ab	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

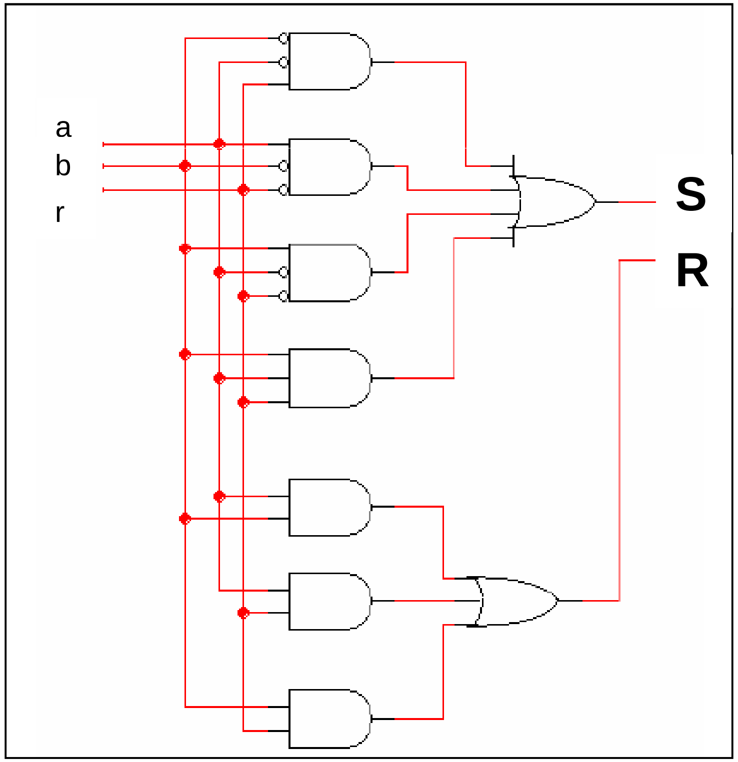
R

r \ ab	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

Full Adder (2/2)

$$S = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot r + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{r} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{r} + a \cdot b \cdot r$$

$$R = \overline{a} \cdot b \cdot r + a \cdot \overline{b} \cdot r + a \cdot b \cdot \overline{r} + a \cdot b \cdot r = a \cdot b + a \cdot r + b \cdot r$$



Addizionatore binario

- E' possibile isolare il fattore **(a ⊕ b)**

- Rielaborando le precedenti espressioni è possibile ottenere le seguenti espressioni per l'addizionatore completo:

$$S = (a \oplus b) \oplus r = P \oplus r$$

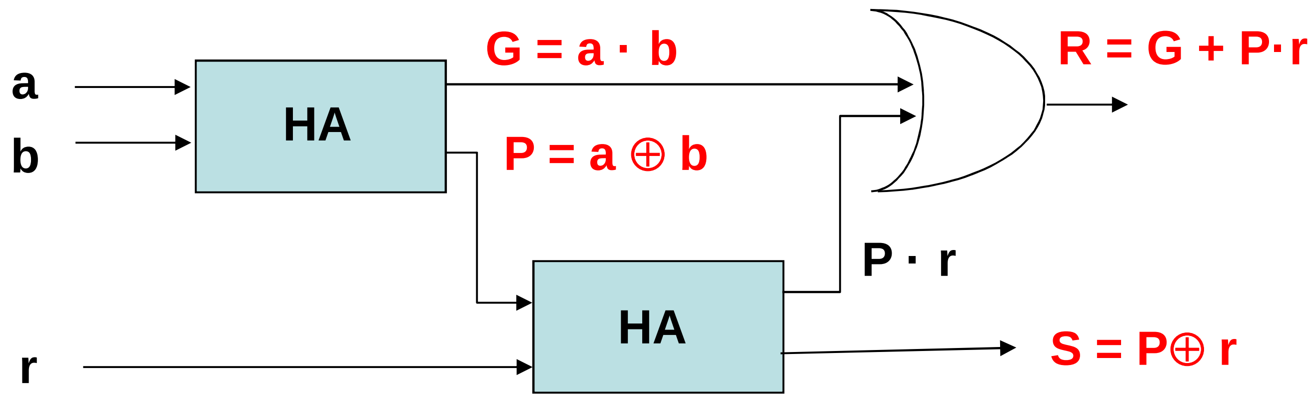
$$R = a \cdot b + r \cdot (a \oplus b) = G + r \cdot P$$

Addizionatore binario

- Pertanto, un addizionatore completo può essere ottenuto a partire da due semiaddizionatori:

$$S = (a \oplus b) \oplus r = P \oplus r$$

$$R = a \cdot b + r \cdot (a \oplus b) = G + r \cdot P$$



Addizionatore binario: riporto

- Le diverse componenti dell'espressione di R assumono un significato particolare:
  - **G = a·b** "**riporto generato**": indica la creazione di un riporto all'interno dell'addizionatore binario
  - **P = a⊕b** "**riporto propagato**": indica se, in presenza di un riporto in ingresso, lo stesso verrò propagato in uscita
  - Il riporto in uscita può quindi essere espresso come **R=G+P·r**

Addizionatori binari

$$n_i = \overline{r_i}$$

Non-riporto

Indica assenza di riporto in ingresso (r=0)

$$K_i = \overline{a_i} \cdot \overline{b_i}$$

Riporto “ucciso” (“killed”)

Indica che, indipendentemente dalla presenza di un riporto entrante, il riporto in uscita sarà comunque zero

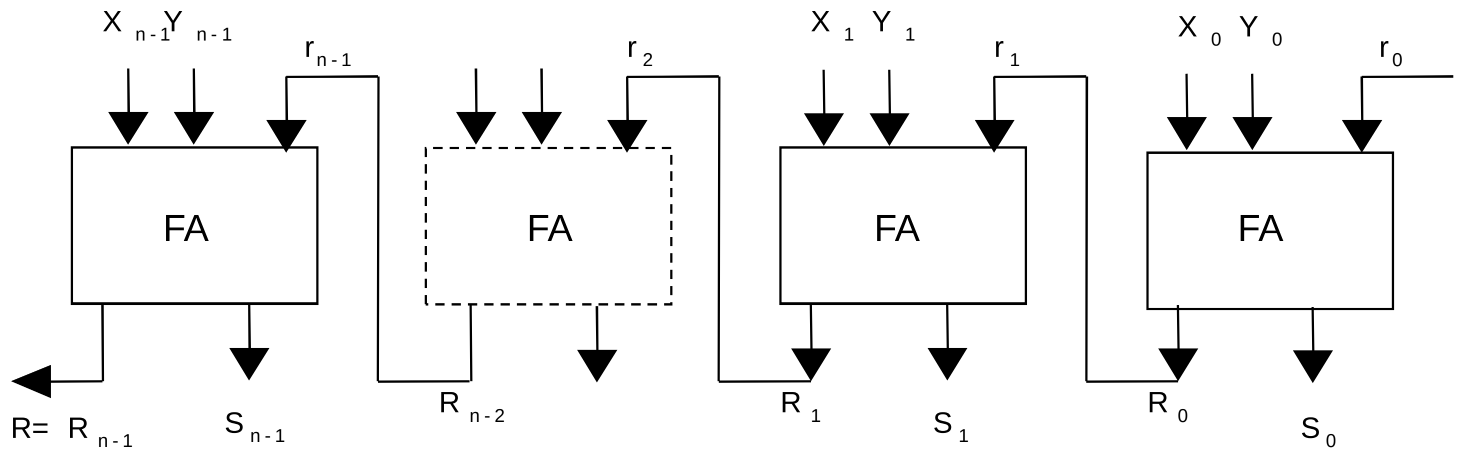
$$N_i = K_i + P_i \cdot n_i$$

Propagazione del non-riporto

Indica assenza di riporto in uscita (R=0)

Addizionatore binario parallelo

- Opera sulle cifre degli addendi in parallelo ma il riporto deve propagarsi attraverso l'intera struttura
- Tempo di risposta (nel caso peggiore) pari a $n \cdot \Delta$ dove Δ è il tempo di risposta di un singolo addizionatore
  - Il caso peggiore si ha quando è $P_i=1 \ \forall \ i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$



Addizionatore parallelo: tempo di risposta

- Gli addizionatori ottenuti collegando in cascata ***n*** addizionatori di cifra sono anche chiamati addizionatori a propagazione del riporto (*carry-ripple* o *carry-propagate*)
- ε = tempo di risposta di uno stadio
- Allo stadio i, il riporto uscente:

  o è **generato** o è **ucciso** o è **propagato**
- Tempo di ritardo complessivo: **Limite inferiore** ε (in tutti gli stadi il riporto è generato o ucciso)
- Tempo di ritardo complessivo: **Limite superiore** $\boldsymbol{n}\varepsilon$ (un riporto entrante nel primo stadio che è propagato in tutti gli stadi)
- Tempo di ritardo complessivo = $k\varepsilon$ ($k \leq n$), dove *k* è la più lunga catena di condizioni di propagazione.

Adder con anticipo del riporto

- Normalmente chiamati addizionatori *carry lookahead*
- Per ogni stadio *i*, dal *(k+1)*-esimo al *(k+j)*-esimo, r_i si ottiene direttamente dai bit degli addendi X ed Y e dal riporto entrante nella catena (invece che dal riporto uscente R_{i-1})

$$r_{k+1} = G_k + r_k P_k$$

$$r_{k+2} = G_{k+1} + G_k P_{k+1} + r_k P_k P_{k+1}$$

....

$$r_{k+j} = G_{k+j-1} + G_{k+j-2} P_{k+j-1} + \ldots + G_k P_{k+1} \ldots P_{k+j-1} + r_k P_k P_{k+1} \ldots P_{k+j-1}$$

Adder carry lookahead

$$r_{k+j} = G_{k+j-1} + G_{k+j-2}P_{k+j-1} + \ldots + G_k P_{k+1} \ldots P_{k+j-1} + r_k P_k P_{k+1} \ldots P_{k+j-1}$$

r_{k+j} è alto se è verificata la condizione di generazione nell'ultimo stadio

....

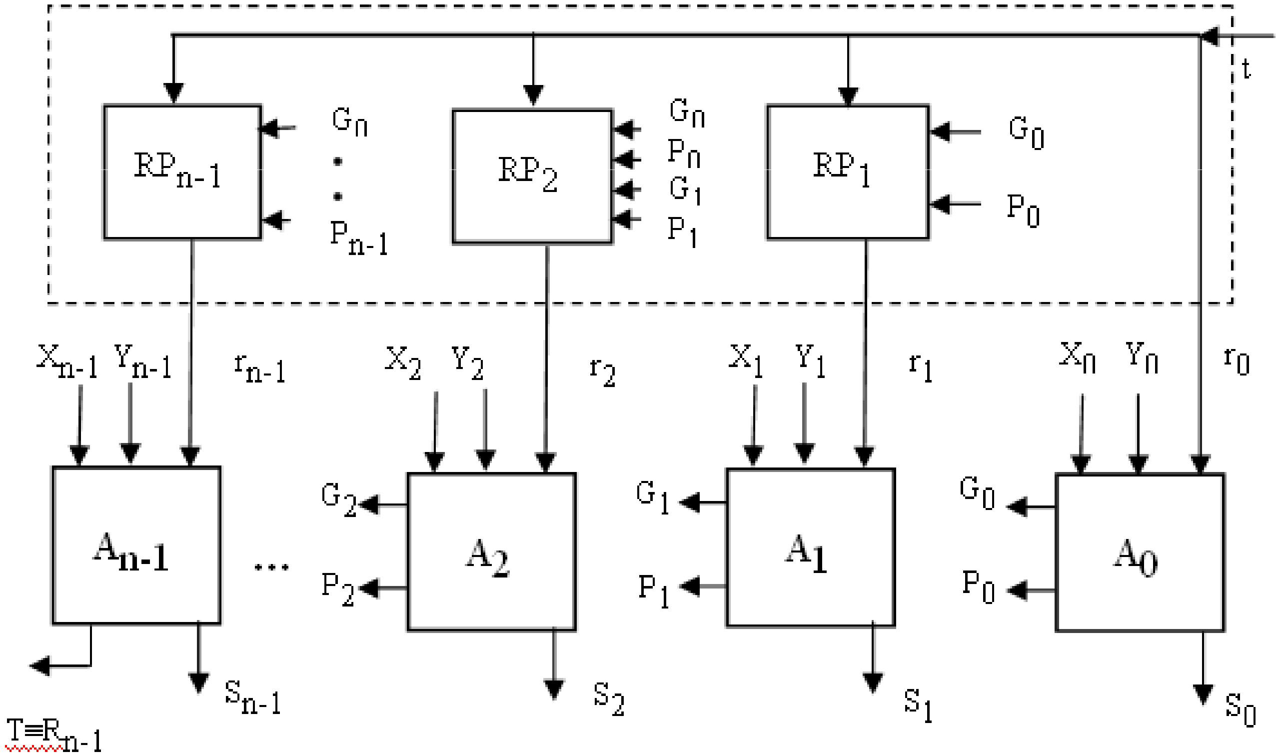
....

…oppure se è verificata la condizione di generazione G_k e se questa viene propagata dagli stadi dal (k+1)-esimo fino all'ultimo

…oppure è pari al riporto entrante r_k se questo viene propagato in tutti gli stadi

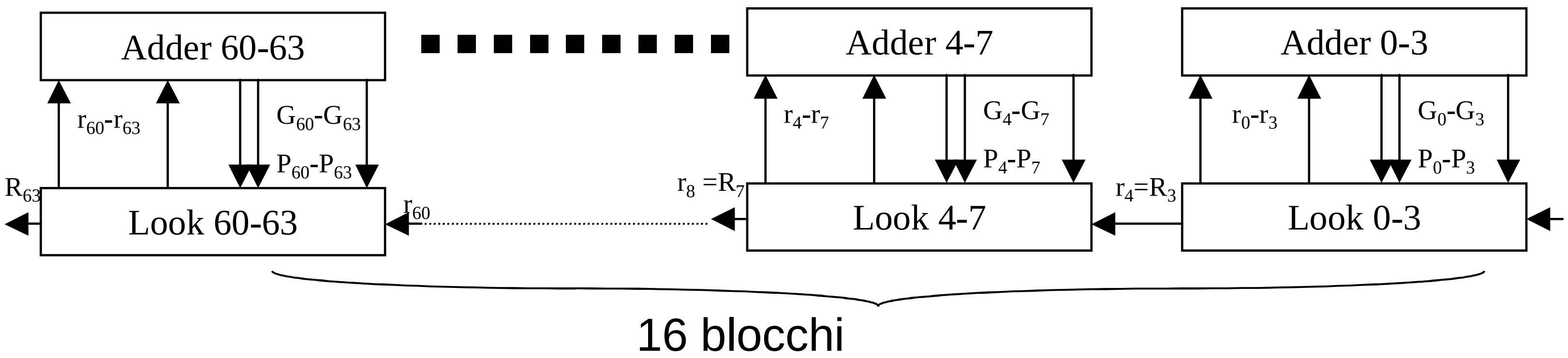
Addizionatori carry lookahead

- L'espressione precedente può essere realizzata nella maniera riportata in figura



Addizionatori carry lookahead

- L'idea di base negli addizionatori carry lookahead è quella di calcolare la relazione tra r_k ed r_{k+j} separatamente per ogni gruppo di cifre $k+1 \ldots k+j$
- Una rete a livello superiore valuta la propagazione del carry tra *gruppi* di cifre
- Ad esempio, per un adder a 64 bit suddiviso in blocchi di quattro cifre (bit), la parte lungo cui si propaga il riporto è lunga 64/4=16 stadi



Addizionatori carry lookahead