

# Corso di Calcolatori Elettronici I

## Algebra di Boole: minimizzazione di funzioni booleane

Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II

A.A. 2015-2016





Al fine di valutare la "complessità" di una rappresentazione algebrica di una funzione  $f$ , si definiscono le seguenti metriche:

- **Costo di letterali**  $C_L$ : somma dei letterali che compaiono nella rappresentazione
- **Costo di funzioni o di porte**  $C_P$ : numero di funzioni elementari (and, or, not) che compaiono nella espressione
  - per una realizzazione a porte discrete, equivale al numero complessivo di porte adoperate
- **Costo di ingressi**  $C_I$ : numero delle funzioni elementari che compaiono nella rappresentazione, ciascuna moltiplicata per le variabili (dipendenti o indipendenti) di cui è funzione
  - per una realizzazione a porte discrete, equivale al numero complessivo di porte adoperate, ciascuna pesata per il numero di ingressi (*fan-in*)



## Esempio 1

$$y_1 = \bar{b} \cdot (\bar{a} + c + d)$$

$$C_L = 4$$

$$C_P = 2$$

$$C_I = 5$$

## Esempio 2

$$y_2 = b \cdot c \cdot (a \cdot \bar{d} + \bar{b} + c) + \bar{c} \cdot (d + \bar{a}) \cdot (b + c)$$

$$C_L = 11$$

$$C_P = 7$$

$$C_I = 17$$



## Esempio 3

$$Y = A \cdot B + C \cdot (D + E)$$

$$C_L = 5$$

$$C_P = 4$$

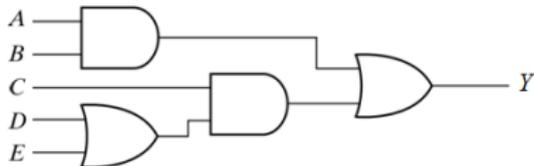
$$C_I = 8$$

$$Y = A \cdot B + C \cdot D + C \cdot E$$

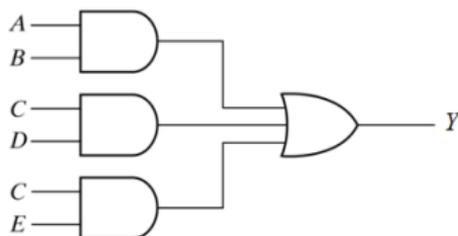
$$C_L = 6$$

$$C_P = 4$$

$$C_I = 9$$



(a)  $AB + C(D + E)$



(b)  $AB + CD + CE$



- Lo scopo della *minimizzazione* di una funzione booleana è quello di pervenire ad una rappresentazione algebrica che minimizzi i costi di letterali, porte ed ingressi
- Studieremo il problema della minimizzazione ristretto alla ricerca di espressioni algebriche a due livelli del tipo *somma di prodotti*
- Come punto di partenza assumiamo la forma normale di tipo P
- La minimizzazione consiste di due passi consecutivi:  
*espansione e copertura*
- La fase di **espansione** ha lo scopo di trasformare l'espressione algebrica in una somma di clausole con il minor numero di letterali
  - Ciò equivale alla determinazione di tutti i *primi implicanti* della funzione
- La fase di **copertura** consiste nella determinazione del più piccolo sottoinsieme di primi implicanti che sommati rappresentino la funzione
  - E' il cosiddetto problema di *copertura minima*



Una qualunque funzione booleana  $f$  può essere espressa come somma di soli primi implicanti (PI)

- in una forma somma-di-prodotti di  $f$ , un eventuale implicante non primo  $A_i$  può essere sempre eliminato osservando che si può aggiungere ad  $f$  un implicante primo  $A'_i$  a sua volta implicato da  $A_i$  senza alterare la  $f$
- se  $f = \sum A_j$  e  $A_i \rightarrow A'_i$  si ha che
$$f = (\sum A_j) + A'_i = (\sum_{j \neq i} A_j) + (A_i + A'_i) = (\sum_{j \neq i} A_j) + (A'_i)$$
  - ovvero è possibile sostituire  $A_i$  (*non primo*) con  $A'_i$  (*primo*)



Il procedimento di espansione consiste nella applicazione sistematica di due proprietà dell'algebra di Boole:

- Assorbimento

- $P_1 + P_2 = x \cdot P + \bar{x} \cdot P = (x + \bar{x}) \cdot P = 1 \cdot P = P$

- Idempotenza

- $P + P = P$

## Esempio

$$\begin{aligned}y &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} = \\&= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} = \\&= xy(z + \bar{z}) + (\bar{x} + x)y\bar{z} = \\&= xy + y\bar{z}\end{aligned}$$



# Espansione: procedimenti sistematici

- Il procedimento di espansione ha come risultato la determinazione di tutti i *primi implicanti* della funzione
- Sulle mappe di Karnaugh i primi implicanti corrispondono ai *sottocubi di area massima*
  - I sottocubi sono raggruppamenti di  $1 - 2 - 4 - 8 - \dots$  caselle adiacenti
  - Su una mappa di  $n$  variabili, un raggruppamento di  $2^\ell$  caselle adiacenti rappresenta una clausola di ordine  $n - \ell$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

$PI : xy, y\bar{z}$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0

$PI : \bar{x} \bar{y}, xz, \bar{y}z$

- Per  $n > 5$  variabili le mappe di Karnaugh non sono utilizzabili
  - L'espansione si effettua attraverso procedimenti tabellari come il metodo di Quine-McCluskey



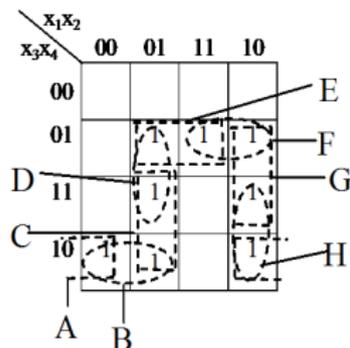
- Un primo implicante di una funzione  $f$  si dice *essenziale* se è l'unico ad essere implicato da un mintermine che compare nella forma normale di tipo P di  $f$
- Sulle mappe di Karnaugh, un *primo implicante essenziale* è un sottocubo di area massima che è l'unico a coprire un 1
- Il **nucleo**  $N$  è la somma di tutti i primi implicanti essenziali
- In generale, l'espressione somma-di-prodotti di costo minimo di  $f$  è esprimibile come

$$f = N + R$$

- La fase di copertura si articola in due sottofasi:
  - determinazione di  $N$
  - determinazione di  $R$



- Una funzione booleana  $f$  si dice **ciclica** se nessuno dei suoi primi implicanti è essenziale
  - Sulle mappe di Karnaugh, ogni 1 è coperto da due o più primi implicanti
  - $N = 0$

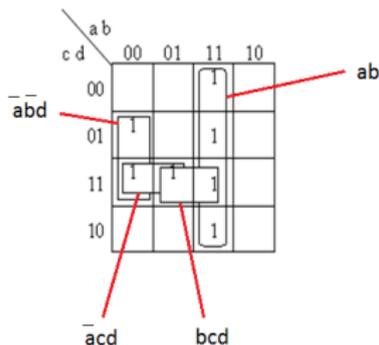




# Esempio

- Data la funzione  $f(a, b, c, d)$  la cui forma normale di tipo  $P$  è

$$f(a, b, c, d) = \sum(P_1, P_3, P_7, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15})$$



- PI:  $\{ab, \bar{a}\bar{b}d, \bar{a}cd, bcd\}$
- PI essenziali:  $N = ab + \bar{a}\bar{b}d$
- $R = \bar{a}cd$  oppure  $R = bcd$

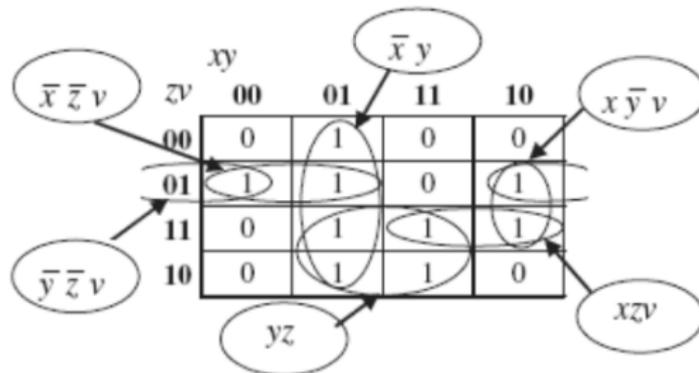
$$f = ab + \bar{a}\bar{b}d + \begin{cases} \bar{a}cd \\ bcd \end{cases}$$

# Esempio

- Data la funzione  $f(x, y, z, v)$  la cui forma normale di tipo  $P$  è

$$f(x, y, z, v) = \sum (P_1, P_4, P_5, P_6, P_7, P_9, P_{11}, P_{14}, P_{15})$$

- dalla mappa di Karnaugh si deduce che i PI di  $f$  sono quelli evidenziati sotto



- PI:  $\{\bar{x}y, yz, \bar{x}\bar{z}v, \bar{y}\bar{z}v, x\bar{y}v, xzv\}$
- PI essenziali:  $N = \bar{x}y + yz$
- per determinare  $R$  si utilizzerà la matrice di copertura