

Corso di Calcolatori Elettronici I

Algebra di Boole: mappe di Karnaugh

Prof. Roberto Canonico



Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Funzioni Equivalenza ed Implicazione

- Funzione equivalenza

$$a \Leftrightarrow b \text{ è vera s.s.e. è } 1: f(a,b) = ab + \overline{a}\overline{b} = (a \equiv b)$$

- Funzione implicazione

$$a \Rightarrow b \text{ è vera s.s.e. vale } 1: f(a,b) = \overline{a} + b = (a \rightarrow b)$$

- *Si dice che **x implica y** se e solo se dalla verità di x (antecedente) scaturisce necessariamente la verità di y (conseguente)*
- *In termini algebrici, essendo l'implicazione falsa se e solo se x è vera e y è falsa, applicando il Teorema di De Morgan, si ha*

$$\overline{x \rightarrow y} = x \cdot \overline{y}$$

$$x \rightarrow y = \overline{\overline{x \cdot \overline{y}}} = \overline{\overline{x}} + y$$

Implicazione come relazione d'ordine

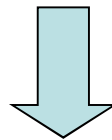
- Se $x \Rightarrow y$ è vera, allora $\bar{x} + y = 1$

$$\bar{x} + y = \bar{x} \cdot \bar{y} + y \quad (\text{ass.compl})$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} + xy + y \quad (P4)$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} + xy + yy \quad (P3)$$

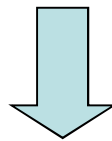
$$= \overline{(x + y)} \cdot \bar{y} + (x + y) \cdot y = 1 \quad (\text{DeMorgan})$$



per le proprietà dell'equivalenza

$$\boxed{ab + \bar{a}\bar{b}}$$

$$\boxed{x + y = y \Leftrightarrow x \leq y}$$

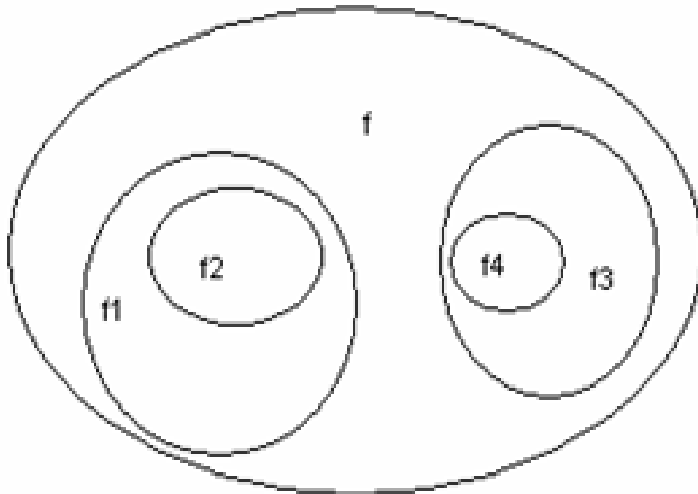


l'implicazione è la relazione d'ordine nell'algebra della logica

Implicanti di una funzione

- ◆ Un **implicante** di f è una funzione f_1 tale che

$$\overline{f_1} + f = 1 \quad \text{cioè} \quad f_1 \rightarrow f$$



- ◆ Esempio: implicanti di f

- ◆ $f_1 \rightarrow f$

- ◆ $f_2 \rightarrow f$

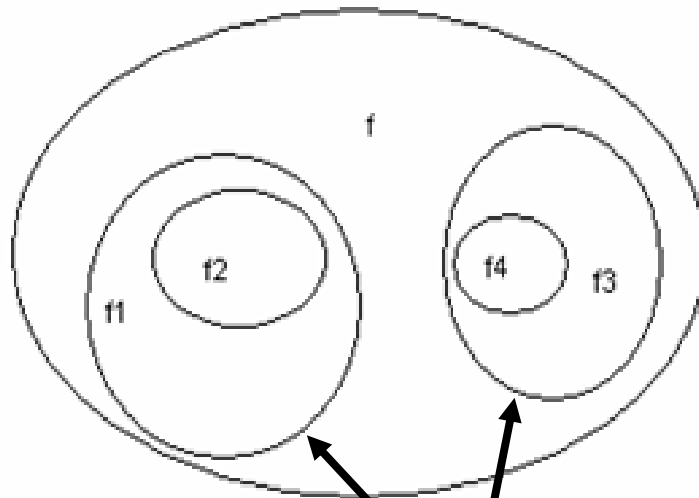
- ◆ $f_3 \rightarrow f$

- ◆ $f_4 \rightarrow f$

- ◆ ma anche: $f_2 \rightarrow f_1$ e $f_4 \rightarrow f_3$
-

Implicanti primi di una funzione

- Nell'insieme degli implicanti di f , definiamo **primi** quegli implicanti che a loro volta non implicano nessun altro implicante di f



Solo f_1 ed f_3 sono implicanti primi

Proprietà degli implicanti

1. La clausola di una funzione f in forma di tipo P è un suo implicante

$$f = \sum_{i=1}^n A_i \quad \overline{A_i} + f = \overline{A_i} + (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1$$

2. Una clausola B ne implica un'altra A se e solo se B contiene tutti i letterali di A
 3. La somma di due clausole di ordine n che contengono $n-1$ letterali uguali ed in cui un letterale dell'una sia il complemento di quello dell'altra è la clausola di ordine $n-1$ formata dai letterali comuni (detta **consenso**)
-

Proprietà degli implicanti (2)

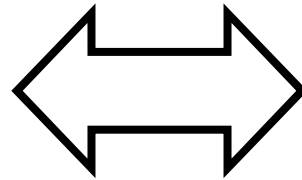
3. Ad una funzione può essere aggiunto un suo implicante senza alterarne il valore
4. A è un implicante di f se e solo se nella prima forma canonica di f sono presenti tutti i mintermini aventi A come fattore
 - Infatti, se A è un implicante, lo si può aggiungere ad f , per poi espanderlo in mintermini (facendo comparire anche le variabili assenti in A)
 - Se, viceversa, sono presenti tutti i mintermini aventi A come fattore, essi possono essere raccolti in modo da far apparire A come clausola di f .

$$f(x, y, z) = xy + yz, \text{ e quindi } xy \Rightarrow f \text{ e } yz \Rightarrow f$$

$$\text{si ha: } f = x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}z + \bar{x}yz$$

Mappe di Karnaugh

a	b	c	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0



		ab			
		00	01	11	10
c	0	1			1
	1		1		



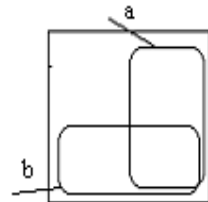
Mappe di Karnaugh

- Le mappe di Karnaugh sono una rappresentazione “tabellare” delle funzioni booleane, alternativa alla tabella di verità
- Consentono di individuare facilmente “consensi” nell’espressione algebrica
- Due celle adiacenti sulle MdK sono associate a mintermini che differiscono in un solo letterale
 - Rappresentano una clausola di ordine n-1

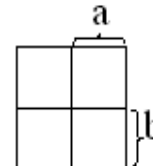
– Es:

$$\bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c = (\bar{a} + a)\bar{b}c = \bar{b}c$$

Mappe di Karnaugh

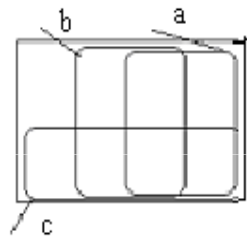


$\bar{a}\bar{b}$	$a\bar{b}$
$\bar{a}b$	ab

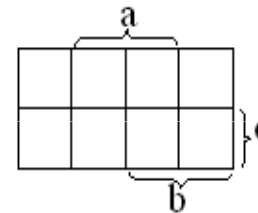


	a	0	1
b	0	P_0	P_2
	1	P_1	P_3

a) 2 variabili

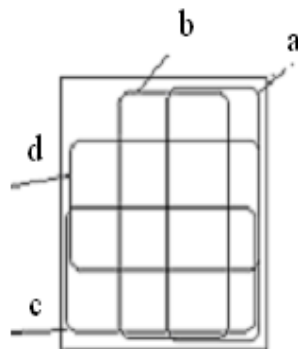


$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}b\bar{c}$	$ab\bar{c}$
$\bar{a}bc$	$a bc$	$\bar{a}bc$	abc

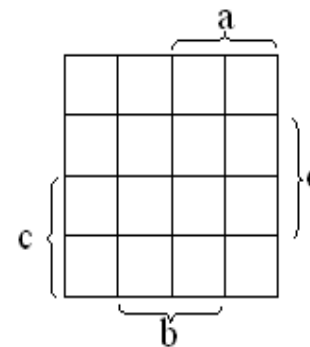


	ab	00	01	11	10
c	0	P_0	P_2	P_6	P_4
	1	P_1	P_3	P_7	P_5

b) 3 variabili



$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	$ab\bar{c}\bar{d}$
$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$	$a\bar{b}c\bar{d}$	$\bar{a}bc\bar{d}$	$abc\bar{d}$
$\bar{a}\bar{b}cd$	$a\bar{b}cd$	$\bar{a}bcd$	$abcd$
$\bar{a}bc\bar{d}$	$a bc\bar{d}$	$\bar{a}bc\bar{d}$	$abc\bar{d}$

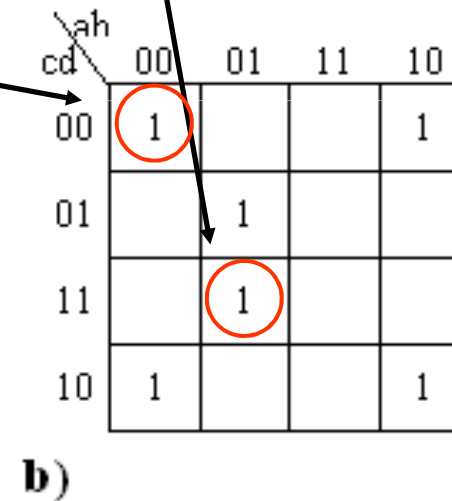
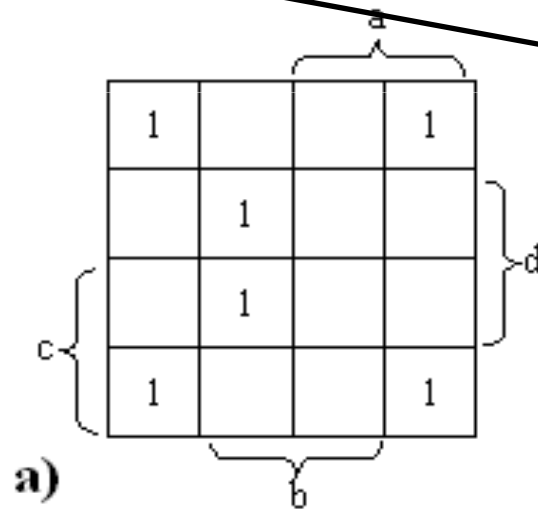


	ab	00	01	11	10
cd	00	P_0	P_4	P_{12}	P_8
	01	P_1	P_5	P_{13}	P_9
	11	P_3	P_7	P_{15}	P_{11}
	10	P_2	P_6	P_{14}	P_{10}

c) 4 variabili

Rappresentazione dei mintermini sulle Mappe di Karnaugh

$$y = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}\overline{b}c\overline{d} + \overline{a}\overline{b}cd + \overline{a}bc\overline{d}$$



Proprietà notevoli

- I mintermini che si oppongono in una sola variabile sono adiacenti e quindi le coppie di quadratini adiacenti rappresentano clausole di ordine $n-1$;
 - Le clausole di ordine $n-1$ ($n \geq 2$) che si oppongono in una sola variabile sono ancora adiacenti e quindi le “quadruple” rappresentano clausole di ordine $n-2$;
 - Le “ottuple” ($n \geq 3$) rappresentano clausole di ordine $n-3$.
 - Le clausole sono anche dette “cubi”, o “sottocubi”
 - Maggiore è la dimensione del sottocubo, minore l’ordine (numero di letterali) della clausola
 - **I sottocubi di area massima rappresentano gli implicanti primi della funzione**
-

Implicanti primi sulle mappe di Karnaugh

- Gli implicanti primi sono individuati graficamente come **sottocubi di area massima**

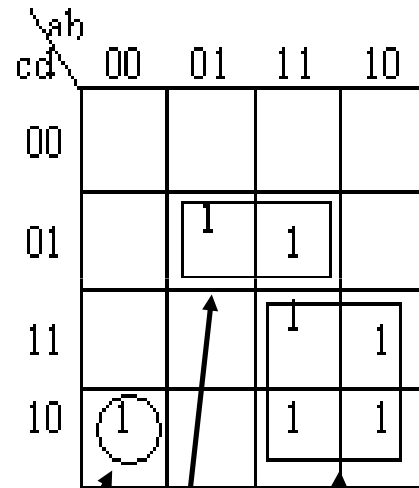
$$f = abcd + \bar{a}bcd + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}bc\bar{d} + ab\bar{c}\bar{d} + abc\bar{d} + ab\bar{c}d$$

		a b			
		00	01	11	10
c d	00			1	
	01	1		1	
	11	1	1	1	
	10			1	

Implicanti primi: $bcd, \bar{a}cd, \bar{a}\bar{b}d, ab$

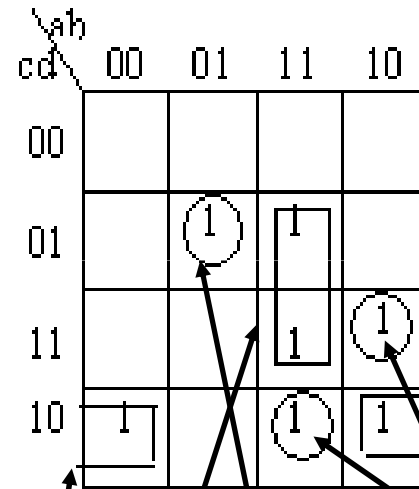
Mappe di Karnaugh

Due modi per rappresentare la stessa funzione:



a)

$$a) y_1 = \overline{a}\overline{b}c\overline{d} + \overline{b}c\overline{d} + ac$$



b)

$$b) y_2 = \overline{b}c\overline{d} + abd + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}b\overline{c}\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d$$

Mappe di Karnaugh

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1		

$$a) f(x, y, z) = \bar{y}\bar{z} + \bar{y}z + \bar{x}y$$

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1		

$$b) f(x, y, z) = \bar{x} + \bar{y}$$

Figura 3.10 - Esempio di due diverse coperture di una stessa funzione. La copertura di destra, essendo formata da sottocubi più ampi, fornisce la minima espressione SP.