Corso di Calcolatori Elettronici I

Rappresentazione dei numeri interi in un calcolatore

Prof. Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica e delle Tecnologie dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Rappresentazione dei numeri

- Così come per qualsiasi altro tipo di dato, anche i numeri, per essere immagazzinati nella memoria di un calcolatore, devono essere codificati, cioè tradotti in sequenze di simboli
- Nei calcolatori si usano strategie di codifica binaria (k=2)
- L'alfabeto sorgente è costituito dall'insieme dei numeri che si vogliono rappresentare

rappresentazione

numero

$$\boxed{X = r\,(x)}$$

legge di codifica

$$\boxed{x \in V}$$

$$\boxed{X \in W}$$

Rappresentazione

- Bisogna tener conto dei seguenti fattori:
  - L'insieme V dei *numeri da rappresentare*
  - L'insieme W dei *numeri rappresentanti*
  - Tra i due insiemi si stabilisce una corrispondenza che trasforma un elemento x di V in uno X di W
  - Si dice allora che **X è la rappresentazione di x**
  - La decomposizione in cifre del numero X
  - La codifica in bit delle cifre

Strategie di codifica in macchina

- **Codifica binaria a lunghezza fissa**
- Il numero di bit varia a seconda della cardinalità dell'insieme dei numeri che si desidera rappresentare
  - Nella pratica, resta comunque pari ad un multiplo di 8 bit (tipicamente 8, 16, 32, 64 bit)
- L'associazione di un numero alla parola codice viene
  - Realizzata differentemente a seconda della tipologia di numeri che si desidera rappresentare
    - naturali, relativi, razionali, ecc …
  - Influenzata da aspetti che mirano a preservare la facile manipolazione delle rappresentazioni da parte del calcolatore
    - operazioni aritmetiche, confronti logici, ecc …
- **Le operazioni aritmetiche vengono eseguite sulle rappresentazioni binarie dei numeri**

Somme e Sottrazioni in aritmetica binaria

- Si effettuano secondo le regole del sistema decimale, ossia sommando (sottraendo) le cifre di pari peso
- Come nelle usuali operazioni su numeri decimali, si può avere un riporto sul bit di peso immediatamente superiore (**carry**), o un prestito dal bit di peso immediatamente superiore (**borrow**)
- Le somme (differenze) bit a bit sono definite come segue:

0+0=0	0-0=0
0+1=1	1-0=1
1+0=1	1-1=0
1+1=0 (carry=1)	0-1=1 (borrow=1)

- Ulteriore caso elementare:

$$1 + 1 + 1 = 1 \text{ (carry=1)}$$

Moltiplicazione in aritmetica binaria

- La moltiplicazione bit a bit può essere definita come segue:

0x0=0
0x1=0
1x0=0
1x1=1

Rappresentazione di insiemi numerici infiniti

- Sia la dimensione che il numero dei registri in un calcolatore sono finiti
- La cardinalità degli insiemi numerici che occorre rappresentare è, invece, infinita
  - N = insieme dei numeri Naturali
  - Z = insieme dei numeri Relativi
  - Q = insieme dei numeri Razionali
  - R = insieme dei numeri Reali
- È inevitabile dunque che di un insieme di cardinalità infinita solo un sotto-insieme finito di elementi possa essere rappresentato

Overflow

- Gli operatori aritmetici, pur essendo talvolta chiusi rispetto all'intero insieme numerico su cui sono definiti, non lo sono rispetto ad un suo sottoinsieme di cardinalità finita
- Quando accade che, per effetto di operazioni, si tenta di rappresentare un numero non contenuto nel sottoinsieme si parla di *overflow*
- *Es.* sottoinsieme dei numeri naturali compresi tra 0 e 127 (rappresentabili con 7 bit):
  - La somma 100 +100 genera un overflow, essendo il numero 200 non rappresentabile nel sottoinsieme

Rappresentazione dei numeri naturali

- Rappresentare di un sottoinsieme dei numeri naturali attraverso stringhe di bit di lunghezza costante n
  - Il numero degli elementi rappresentabili è pari a 2^n
  - Tipicamente, volendo rappresentare sempre anche lo zero, si rappresentano i numeri compresi tra 0 e $2^n – 1$
- L’associazione tra ogni numero e la propria rappresentazione avviene, nei casi pratici, nella maniera più intuitiva
  - Ad ogni numero si associa la stringa di bit che lo rappresenta nel sistema di numerazione binario posizionale
- L’overflow avviene quando si tenta di rappresentare un numero esterno all’intervallo $[0, 2^n –1]$

Esempio

Rappresentazione dei numeri naturali su 4 bit

n=4

$V = [0,15] \cap N$

Codifica: X=x

x	X_2
15	1111
14	1110
13	1101
12	1100
11	1011
10	1010
9	1001
8	1000
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000

Operazioni sui numeri naturali

- Per realizzare le operazioni, il calcolatore può lavorare direttamente sulle rappresentazioni

- La correttezza dei calcoli è garantita dalle leggi dell'aritmetica binaria posizionale (analoghe a quelle della classica aritmetica decimale)

- L'overflow può essere facilmente rilevato attraverso la valutazione del riporto (o del prestito) sull'ultima cifra
    - <u>In tale aritmetica</u>, overflow = riporto uscente

Esempi

<table>
<tr>
<td>6+   0110+
8=   1000=
-----   -------
14 → 1110</td>
<td>11 -   1011-
5 =   0101=
------   ------
6 → 0110</td>
<td rowspan="2">0101 ×
0011 =

0101
0101=
0000==
0000===

0001111</td>
</tr>
<tr>
<td>14+   1110 +
3=   0011 =
-----   ---------
17 → 10001

overflow</td>
<td>9-   1001-
7=   0111=
------   ---------
2 → 0010</td>
</tr>
</table>

Rappresentazione dei numeri relativi

- Esistono diverse tecniche
- Segno e modulo
  - Corrispondente a quella comunemente utilizzata per i calcoli “a mano”
  - Poco utilizzata in macchina per le difficoltà di implementazione degli algoritmi, basati sul confronto dei valori assoluti degli operandi e gestione separata del segno
- Complementi
  - Complementi alla base
  - Complementi diminuiti
- Per eccessi

Rappresentazione in segno e modulo

- un singolo bit di X codifica il segno
  - Es. il più significativo, 0 se positivo, 1 se negativo
- i restanti n-1 bit di X rappresentano il modulo (numero naturale)
- La legge di codifica X=r(x) è: $X = |x| + 2^{n-1} * \text{sign}(x)$
  - $\text{sign}(x) = 0$ per $x \geq 0$, 1 per $x < 0$
- Si possono rappresentare i numeri relativi compresi nell'intervallo $[-(2^{n-1} - 1), 2^{n-1} - 1]$
- I numeri relativi rappresentati sono 2^n-1
- Lo zero ha 2 rappresentazioni 0positivo e 0negativo

Esempio

Rappresentazione in segno e modulo su 4 bit

n=4

$V = [-7,7] \cap Z$

Codifica:

$X = |x| + 8 * \mathrm{sign}(x)$

x	X_2	X_{10}
7	0111	7
6	0110	6
5	0101	5
4	0100	4
3	0011	3
2	0010	2
1	0001	1
0	0000;1000	0;8
-1	1001	9
-2	1010	10
-3	1011	11
-4	1100	12
-5	1101	13
-6	1110	14
-7	1111	15

Operazioni in segno e modulo

- Diversamente dalla rappresentazione dei numeri naturali, questa volta non è possibile lavorare direttamente sulle rappresentazioni dei numeri per realizzare le operazioni aritmetiche
- È necessario lavorare separatamente sul segno e sul modulo
- Quando, ad esempio, si sommano due numeri di segno discorde, bisogna determinare quello con modulo maggiore e sottrarre ad esso il modulo dell'altro. Il segno del risultato sarà quello dell'addendo maggiore in modulo.
- Tale caratteristica, insieme con il problema della doppia rappresentazione dello zero, rende i calcoli particolarmente laboriosi e, per questo motivo, non è molto utilizzata nella pratica.

Rappresentazione in complementi alla base

- Una seconda tecnica per la rappresentazione dei numeri relativi consiste nell'associare a ciascun numero il suo **resto modulo $M=2^n$**, definito come:

$$|x|_M = x - [x/M]*M$$

- Questo tipo di codifica, su n bit, è equivalente ad associare:
  - il numero stesso (cioè X=x), ai numeri positivi compresi tra 0 e $2^{n-1} - 1$;
  - il numero $X = 2^n - |x|$, ai numeri negativi compresi tra -2^{n-1} e -1;
- I numeri rappresentati sono quelli compresi nell'intervallo

$$[-2^{n-1}; 2^{n-1} - 1]$$

Funzione intero

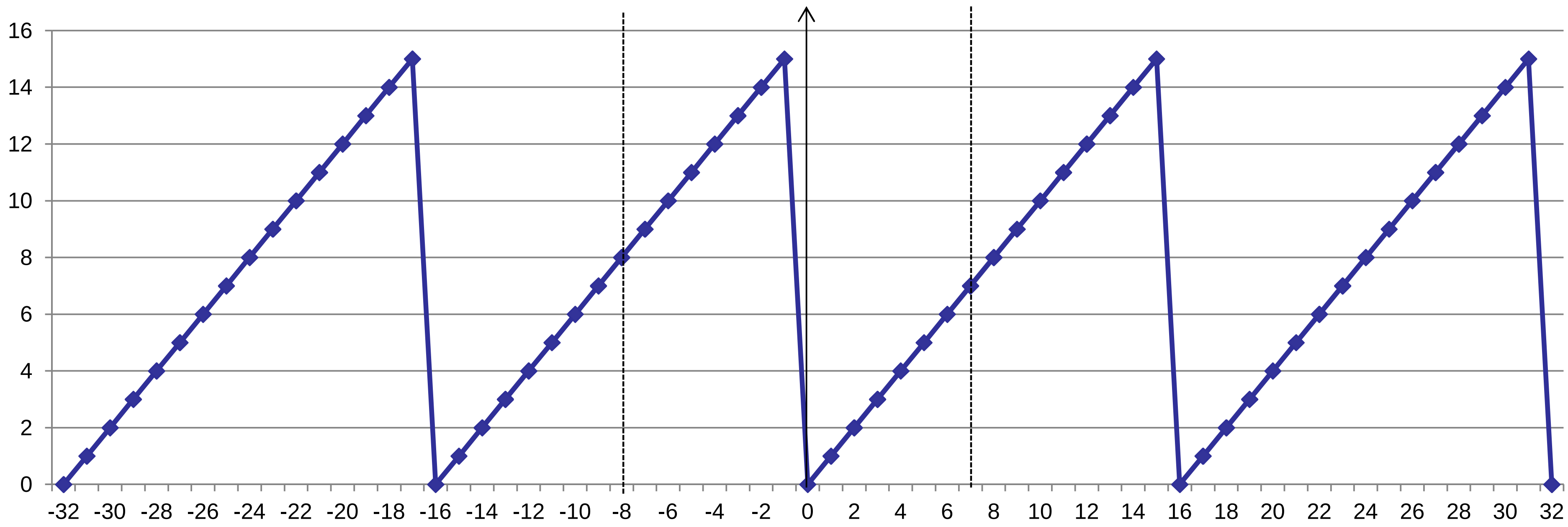
- Detto r un numero reale, si definisce intero di r il massimo intero $y \le r$

$$y = [\, r \,]$$

– confronto tra funzione intero [ ] e ceiling $\lceil \; \rceil$

r	7.9	7	-7	-7.9
[r]	7	7	-7	-8
$\lceil r \rceil$	8	7	-7	-7

Resto modulo M (M=16)



Esempio

Rappresentazione in complementi alla base su 4 bit

$n=4$

$V = [-8,7] \cap Z$

Codifica:

Per $0 \leq x \leq 7$: $X = x$

Per $-8 \leq x \leq -1$: $X = 2^n - |x|$

x	X_2	X_{10}
7	0111	7
6	0110	6
5	0101	5
4	0100	4
3	0011	3
2	0010	2
1	0001	1
0	0000	0
-1	1111	15
-2	1110	14
-3	1101	13
-4	1100	12
-5	1011	11
-6	1010	10
-7	1001	9
-8	1000	8

Complementi alla base: proprietà

- Questa rappresentazione ha il fondamentale vantaggio di permettere, nell'ambito di operazioni aritmetiche, di lavorare direttamente sulle rappresentazioni.
- La regola sulla quale questa affermazione si basa è la seguente:

  la rappresentazione della somma (algebrica) di x ed y si ottiene come somma (modulo-M) delle rappresentazioni di x e y; analoghe sono le proprietà della differenza e del prodotto.

$$\left|x+y\right|_M = \left|\left|x\right|_M + \left|y\right|_M\right|_M$$

- Questo tipo di codifica conserva, inoltre, la proprietà delle rappresentazioni di avere il primo bit 1 se (e solo se) il corrispondente numero è negativo (bit di segno)

Esempi di addizioni in complementi alla base

```
   2 +          0010 +
  -6 =          1010 =
 --------      --------
  -4     →      1100
```

```
  -2 +              1110 +
  -3 =       →      1101 =
 --------          --------
  -5               11011

      si ignora         somma
                        modulo-16
```

È possibile effettuare la somma direttamente tra le rappresentazioni modulo-M: il risultato ottenuto in questo modo, è proprio la rappresentazione (modulo-M) del risultato corretto

Complementi alla base: la complementazione

- In complementi alla base, a partire dalla rappresentazione di un numero, è anche particolarmente semplice ottenere la rappresentazione del suo opposto
- È infatti sufficiente *complementare tutti i bit a partire da sinistra, tranne l'uno più a destra ed eventuali zero successivi*
- Questa ulteriore caratteristica consente di realizzare le sottrazioni attraverso la composizione di una complementazione (nel senso sopra detto) ed un'addizione
- Nell'aritmetica in complementi alla base, di conseguenza, l'addizionatore e il complementatore rappresentano i componenti fondamentali per la realizzazione di tutte le operazioni

Esempi di complementazione su 4 bit

- La rappresentazione di 6_{10} su 4 bit è 0110_2.
- Complementando tutti i bit tranne l'uno più a destra e gli zero successivi si ottiene: 1010_2.
- 1010_2 è la rappresentazione di –6 in complementi alla base.

- La rappresentazione di 5_{10} su 4 bit è 0101_2.
- Complementando tutti i bit tranne l'uno più a destra e gli zero successivi si ottiene: 1011_2.
- 1011_2 è la rappresentazione di –5 in complementi alla base.

- La rappresentazione di 1_{10} su 4 bit è 0001_2.
- Complementando tutti i bit tranne l'uno più a destra e gli zero successivi si ottiene: 1111_2.
- 1111_2 è la rappresentazione di –1 in complementi alla base.

Complementi alla base: esempio di moltiplicazione

```
      2 *                 0010 ×
    - 3 =                 1101 =
 --------            -----------
    - 6                   0010
                         0000=
                        0010==
                       0010===
                   -------------
                       0011010

        si ignora          prodotto
```

Estensione del segno

- Problema:
  - Sia dato un intero N, rappresentato in complemento mediante n bit
  - Rappresentare N usando n+q bit (q>0)
- Soluzione:
  - Fare q copie di MSB

- Dimostrazione (banale per N positivo)
  - Sia N<0 (N=1bb…b , dove b è una cifra binaria)
  - Per induzione: Sia N_q la stringa con estensione di q bit
    - q=1: Poiché $-2^{n-1}=-2^n+2^{n-1}$, allora $V(N)=V(N_1)$.
    - q>1: estendere di un bit la stringa ottenuta da N con estensione di q-1 bit $\rightarrow V(N_q)=V(N_{q-1})$
- Esempio
  - $-6 \rightarrow (1010)_2$ con 4 bit diventa $(\mathbf{1111}1010)_2$ su 8 bit
- Nota: questa operazione viene eseguita quando si fa in C un typecast da tipo short int ad int

Complementi diminuiti

- La rappresentazione in complementi diminuiti costituisce un'ulteriore alternativa per la codifica dei numeri relativi
- Concettualmente è analoga alla rappresentazione in complementi alla base
- La differenza rispetto ad essa è che la legge di codifica dei numeri negativi è leggermente differente:
  - $X=2^n - |x|$; (complementi alla base)
  - $X=2^n - 1 - |x|$; (complementi diminuiti)
- I numeri rappresentabili, se si utilizzano n bit, sono quelli compresi nell'intervallo $[-(2^{n-1} - 1), 2^{n-1} - 1]$.
- I numeri rappresentabili sono $2^n - 1$
- lo zero ha una doppia rappresentazione

Esempio

Rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit

n=4

V = [– 7,7] ∩ Z

Codifica:

Per $0 \le x \le 7$: $X = x$

per $-7 \le x \le -1$: $X = 2^n - 1 - |x|$

x	X_2	X_{10}
7	0111	7
6	0110	6
5	0101	5
4	0100	4
3	0011	3
2	0010	2
1	0001	1
0	0000;1111	0;15
-1	1110	14
-2	1101	13
-3	1100	12
-4	1011	11
-5	1010	10
-6	1001	9
-7	1000	8

Complementi diminuiti: perché?

- Maggiore semplicità con cui è possibile calcolare la rappresentazione dell'opposto di un numero, a partire dalla rappresentazione del numero stesso: basta semplicemente complementare tutti i bit della rappresentazione indistintamente
- Esempi:
  - la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di 4 è 0100;
    - complementando tutti i bit si ottiene 1011;
    - 1011 è la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di –4
  - la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di – 6 è 1001;
    - complementando tutti i bit si ottiene 0110;
    - 0110 è la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di 6

Aritmetica in complementi diminuiti

- Componenti:
  - Ancora l'addizionatore modulo-2^n (e non 2^n-1)
    - L'addizionatore modulo-2^n è più semplice da realizzare
  - Un complementatore
- Il risultato però deve essere opportunamente "corretto" per renderlo compatibile con l'aritmetica in modulo 2^{n-1}
- In particolare deve essere aggiunta un'unità al risultato nei seguenti casi:
  - se entrambi gli addendi sono negativi
  - se un addendo è positivo, l'altro negativo e la somma è positiva
- Nei casi suddetti l'aritmetica degli interi positivi (quella sulle rappresentazioni) da overflow
  - L'overflow (carry) quindi può essere interpretato come la necessità di effettuare la correzione

Esempi di somme in complementi diminuiti

```
– 2 +
– 3 =
-----
– 5
```

```
 1101 +
 1100 =
-------
11001 +
    1 =
-------
 1010
```

Somma di due numeri negativi.
Si è generato overflow tra le rappresentazioni.
Necessita correzione.

```
  5 +
– 2 =
-----
  3
```

```
 0101 +
 1101 =
-------
10010 +
    1 =
--------
 0011
```

Somma di un numero positivo e un numero negativo.
Il risultato è positivo.
Si è generato overflow tra le rappresentazioni.
Necessita correzione.

```
  3 +
– 4 =
-----
– 1
```

```
0011 +
1011 =
------
1110
```

Somma di un numero positivo e un numero negativo.
Il risultato è negativo.
Non si è generato overflow tra le rappresentazioni.
Non necessita alcuna correzione.

Rappresentazione eccesso-k

- La rappresentazione in eccesso-k costituisce un metodo diverso da quello dei resti in modulo per ricondurre i numeri negativi a positivi
- In particolare, tutti i numeri sono traslati “verso l’alto” di k, che viene scelto maggiore o uguale al numero più piccolo da rappresentare

$$X = x + k$$

Rappresentazione eccesso-k: proprietà

- Analogamente al caso dei complementi diminuiti, la somma va corretta aggiungendo o sottraendo la costante k, e quindi in maniera sufficientemente semplice
- Moltiplicazioni e divisioni risultano invece più complesse
- Il vantaggio di tale codifica è che viene conservata la proprietà della disuguaglianza sulle rappresentazioni:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow X_1 > X_2$$

- Questa rappresentazione, perciò, è utilizzata soltanto laddove siano richieste fondamentalmente somme algebriche e confronti logici fra gli operandi
- Tipicamente si utilizza per rappresentare gli esponenti nella rappresentazione in virgola mobile (prossima lezione)

Esempio

Rappresentazione in eccesso-8 su 4 bit

n=4

V = [–8,7] $\cap$ Z

Codifica:

X = x + k

x	X_2	X_{10}
7	1111	15
6	1110	14
5	1101	13
4	1100	12
3	1011	11
2	1010	10
1	1001	9
0	1000	8
-1	0111	7
-2	0110	6
-3	0101	5
-4	0100	4
-5	0011	3
-6	0010	2
-7	0001	1
-8	0000	0