Corso di Calcolatori Elettronici I

Algebra di Boole: minimizzazione di funzioni booleane

Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II

A.A. 2019-2020

Al fine di valutare la "complessità" di una rappresentazione algebrica di una funzione f, si definiscono le seguenti metriche:

- **Costo di letterali** C_L: somma dei letterali che compaiono nella rappresentazione
- **Costo di funzioni o di porte** C_P: numero di funzioni elementari (and, or, not) che compaiono nella espressione
  - per una realizzazione a porte discrete, equivale al numero complessivo di porte adoperate
- **Costo di ingressi** C_I: numero delle funzioni elementari che compaiono nella rappresentazione, ciascuna moltiplicata per le variabili (dipendenti o indipendenti) di cui è funzione
  - per una realizzazione a porte discrete, equivale al numero complessivo di porte adoperate, ciascuna pesata per il numero di ingressi (*fan-in*)

Metriche di costo: esempi

Esempio 1

$$y_1 = \overline{b} \cdot (\overline{a} + c + d)$$

$C_L = 4$
$C_P = 2$
$C_I = 5$

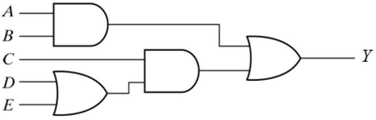
Esempio 2

$$y_2 = b \cdot c \cdot (a \cdot \overline{d} + \overline{b} + c) + \overline{c} \cdot (d + \overline{a}) \cdot (b + c)$$

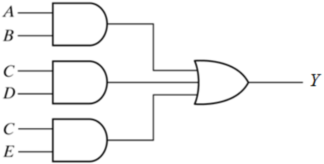
$C_L = 11$
$C_P = 7$
$C_I = 17$

Esempio 3

$Y = A \cdot B + C \cdot (D + E)$	$Y = A \cdot B + C \cdot D + C \cdot E$
$C_L = 5$	$C_L = 6$
$C_P = 4$	$C_P = 4$
$C_I = 8$	$C_I = 9$



(a) $AB + C(D + E)$



(b) $AB + CD + CE$

- Lo scopo della *minimizzazione* di una funzione booleana è quello di pervenire ad una rappresentazione algebrica che minimizzi i costi di letterali, porte ed ingressi
- Studieremo il problema della minimizzazione ristretto alla ricerca di espressioni algebriche a due livelli del tipo *somma di prodotti*
- Come punto di partenza assumiamo la forma normale di tipo P
- La minimizzazione consiste di due passi consecutivi: *espansione* e *copertura*
- La fase di **espansione** ha lo scopo di trasformare l'espressione algebrica in una somma di clausole con il minor numero di letterali
  - Ciò equivale alla determinazione di <u>tutti</u> i *primi implicanti* della funzione
- La fase di **copertura** consiste nella determinazione del più piccolo sottoinsieme di primi implicanti che sommati rappresentino la funzione
  - E' il cosiddetto problema di *copertura minima*

Importanza degli implicanti primi

Una qualunque funzione booleana f può essere espressa come somma di soli primi implicanti (PI)

- in una forma somma-di-prodotti di f, un eventuale implicante non primo A_i può essere sempre eliminato osservando che si può aggiungere ad f un implicante primo A_i' a sua volta implicato da A_i senza alterare la f
- se $f = \sum A_j$ e $A_i \rightarrow A_i'$ si ha che $f = (\sum A_j) + A_i' = (\sum_{j \neq i} A_j) + (A_i + A_i') = (\sum_{j \neq i} A_j) + (A_i')$
  - ovvero è possibile sostituire A_i (*non primo*) con A_i' (*primo*)

Il procedimento di espansione consiste nella applicazione sistematica di due proprietà dell'algebra di Boole:

- Assorbimento
  - $P_1 + P_2 = x \cdot P + \overline{x} \cdot P = (x + \overline{x}) \cdot P = 1 \cdot P = P$
- Idempotenza
  - $P + P = P$

Esempio

$$
\begin{aligned}
y &= xyz + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} = \\
&= xyz + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + xy\overline{z} = \\
&= xy(z + \overline{z}) + (\overline{x} + x)y\overline{z} = \\
&= xy + y\overline{z}
\end{aligned}
$$

Espansione: procedimenti sistematici

- Il procedimento di espansione ha come risultato la determinazione di <u>tutti</u> i *primi implicanti* della funzione
- Sulle mappe di Karnaugh i primi implicanti corrispondono ai *sottocubi di area massima*
  - I sottocubi sono raggruppamenti di $1-2-4-8-\ldots$ caselle adiacenti
  - Su una mappa di n variabili, un raggruppamento di 2^{ℓ} caselle adiacenti rappresenta una clausola di ordine $n-\ell$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

$PI: xy, y\overline{z}$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0

$PI: \overline{x}\,\overline{y}, xz, \overline{y}z$

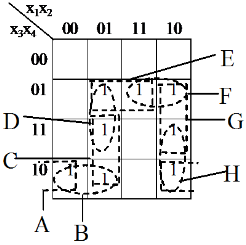
- Per $n > 5$ variabili le mappe di Karnaugh non sono utilizzabili
  - L'espansione si effettua attraverso procedimenti tabellari come il metodo di Quine-McCluskey

Primi implicanti essenziali

- Un primo implicante di una funzione f si dice *essenziale* se è l'unico ad essere implicato da un mintermine che compare nella forma normale di tipo P di f
- Sulle mappe di Karnaugh, un *primo implicante essenziale* è un sottocubo di area massima che è l'unico a coprire un 1
- Il **nucleo** N è la somma di tutti i primi implicanti essenziali
- In generale, l'espressione somma-di-prodotti di costo minimo di f è esprimibile come
$$f = N + R$$
- La fase di copertura si articola in due sottofasi:
  - determinazione di N
  - determinazione di R

Funzioni cicliche

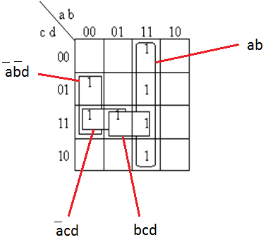
- Una funzione booleana f si dice **ciclica** se nessuno dei suoi primi implicanti è essenziale
  - Sulle mappe di Karnaugh, ogni 1 è coperto da due o più primi implicanti
  - $N = 0$



Esempio

- Data la funzione $f(a, b, c, d)$ la cui forma normale di tipo P è

$$f(a, b, c, d) = \sum(P_1, P_3, P_7, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15})$$



- PI: $\left\{ab, \bar{a}\bar{b}d, \bar{a}cd, bcd\right\}$
- PI essenziali: $N = ab + \bar{a}\bar{b}d$
- $R = \bar{a}cd$ oppure $R = bcd$

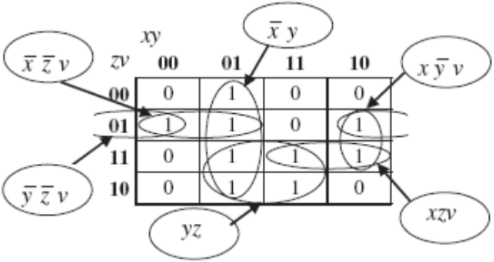
$$f = ab + \bar{a}\bar{b}d + \begin{cases} \bar{a}cd \\ bcd \end{cases}$$

Esempio

- Data la funzione $f(x, y, z, v)$ la cui forma normale di tipo P è

$$f(x, y, z, v) = \sum(P_1, P_4, P_5, P_6, P_7, P_9, P_{11}, P_{14}, P_{15})$$

- dalla mappa di Karnaugh si deduce che i PI di f sono quelli evidenziati sotto



- PI: $\{\bar{x}y, yz, \bar{x}\bar{z}v, \bar{y}\bar{z}v, x\bar{y}v, xzv\}$
- PI essenziali: $N = \bar{x}y + yz$
- per determinare R si utilizzerà la matrice di copertura