Corso di Calcolatori Elettronici I

Rappresentazione dei numeri naturali

Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II

A.A. 2020-2021

- La rappresentazione di un numero è un problema di *codifica*
  - Difficoltà: gli insiemi numerici comunemente utilizzati in Matematica hanno cardinalità infinita
- **Sistema di rappresentazione posizionale**
- Gli elementi dell'insieme A *(alfabeto codice)* si chiamano *cifre*
- La cardinalità b di A si chiama *base* del sistema di numerazione
- La stringa $X = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0.a_{-1}a_{-2}...a_{-k}$ di $n+k$ cifre rappresenta il numero

$$x = \sum_{i=-k}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

$b = 2, n = 3, k = 2, X = 101.01,$
$x = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 1 + 0.25 = 5.25$

$b = 10, n = 3, k = 2, X = 101.01,$
$x = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} = 100 + 1 + 0.01 = 101.01$

- Insiemi delle cifre per i valori di base comunemente usati

Codice	Base	Alfabeto
Binario	2	A=$\{0,1\}$
Ottale	8	A=$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$
Decimale	10	A=$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
Esadecimale	16	A=$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$

Sistemi di rappresentazione posizionale

- Qualunque sia la base,la cifra più a sinistra moltiplica la potenza di esponente massimo e viene detta *cifra più significativa* della rappresentazione
  - Se $b = 2$, si parla di *bit più significativo* (*most significant bit*)
- Con riferimento alla stringa $a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0.a_{-1}a_{-2}...a_{-k}$
  - le cifre a sinistra del punto moltiplicano potenze di b di esponente positivo e costituiscono la *parte intera* del numero

$$a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$$

  - le cifre a destra del punto moltiplicano potenze di b di esponente negativo e costituiscono la *parte frazionaria* del numero

$$.a_{-1}a_{-2}...a_{-k}$$

- Assumiamo noti gli algoritmi di conversione della rappresentazione di un numero tra basi diverse

Relazione tra rappresentazioni in base b e b^k

- Supponiamo di avere la rappresentazione di un numero in base b^k
  - La rappresentazione dello stesso numero x in base b si ottiene sostituendo a ciascuna cifra della rappresentazione X in base b^k la rispettiva rappresentazione in base b su k cifre

$b = 2$ e $k = 4$

$$X_{16} = 3A2C_{16} \longrightarrow X_2 = 0011101000101100$$

- Supponiamo di avere la rappresentazione di un numero in base b
  - La rappresentazione dello stesso numero x in base b^k si ottiene raggruppando a k a k le cifre della rappresentazione X in base b e sostituendole con la cifra che le rappresenta in base b^k

$b = 2$ e $k = 4$

$$X_2 = 0011101000101100 \longrightarrow X_{16} = 3A2C_{16}$$

Sistema posizionale: proprietà notevoli

- Rappresentazione di $b^k - 1$
  - Le prime k cifre meno significative sono $(b-1)$, le rimanenti $n-k$ cifre (più a sinistra) sono 0

$$b = 10, n = 8, x = 999 = 10^3 - 1 \longrightarrow X = 00000999$$
$$b = 2, n = 8, x = 31 = 2^5 - 1 \longrightarrow X = 00011111$$

- Rappresentazione di $b^k/2$
  - La cifra di peso $(k-1)$ è uguale a $b/2$, tutte le altre cifre sono 0

$$b = 10, n = 5, k = 3, x = 10^3/2 \longrightarrow X = 00500$$
$$b = 2, n = 5, k = 3, x = 2^3/2 \longrightarrow X = 00100$$

Sistema posizionale binario: proprietà notevoli

- Rappresentazione di 2^k
  - Il $(k+1)$-esimo bit da destra è 1, gli altri k bit sono 0

$$b = 2, n = 8, x = 4 = 2^2 \longrightarrow X = 00000100$$
$$b = 2, n = 8, x = 32 = 2^5 \longrightarrow X = 00100000$$

- Rappresentazione di $x \cdot 2^k$ (e di $x/2^k$)
  - La rappresentazione di x scorre a sinistra (a destra) di k posizioni

$$b = 2, n = 8, x = 24 = 3 \cdot 2^3 \longrightarrow X = 00011000$$
$$b = 2, n = 8, x = 3 = 24/2^3 \longrightarrow X = 00000011$$
$$b = 2, n = 8, x = 96 = 24 \cdot 2^2 \longrightarrow X = 01100000$$

- Fissata la base b ed il numero di cifre n, attraverso il sistema di rappresentazione posizionale si possono rappresentare con stringhe di n cifre tutti i numeri naturali compresi tra 0 e $b^n - 1$
- Dato un numero $x \in [0, b^n - 1]$ lo si rappresenta con la stringa $X = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$ tale che:

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

- Le operazioni aritmetiche non sono *chiuse* nell'intervallo $[0, b^n - 1]$
  - Esempio:
    $b = 10, n = 3$, il risultato della addizione $381 + 722$ *non è rappresentabile* in $[0, 10^3 - 1]$
  - L'operazione di addizione produce ***overflow***
    - cioè il risultato non è rappresentabile

Rappresentazione di numeri naturali: esempio

- rappresentazione posizionale con $b = 2$ ed $n = 4$ dei numeri naturali compresi tra 0 e $15 = 2^4 - 1$

x	X
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

Aritmetica binaria

- Gli algoritmi che abbiamo imparato a scuola per le operazioni aritmetiche valgono per qualunque sistema di rappresentazione posizionale
- Per $b = 2$ la tabella della addizione di cifre è:
  - $0 + 0 = 0$
  - $0 + 1 = 1$
  - $1 + 0 = 1$
  - $1 + 1 = 0$ con riporto 1
- Per $b = 2$ la tabella della sottrazione di cifre è:
  - $0 - 0 = 0$
  - $0 - 1 = 1$ con prestito 1
  - $1 - 0 = 1$
  - $1 - 1 = 0$
- Per $b = 2$ la tabella della moltiplicazione di cifre è:
  - $0 \cdot 0 = 0$
  - $0 \cdot 1 = 0$
  - $1 \cdot 0 = 0$
  - $1 \cdot 1 = 1$

- Si usa l'algoritmo di addizione "in colonna"
  ricordando la tabella della addizione di cifre binarie
- Il riporto prodotto dalle cifre più significative indica overflow

$$\begin{array}{r} 6 \\ +\ 8 \\ \hline 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0110 \\ +\ 1000 \\ \hline 1110 \end{array}$$

NO OVERFLOW

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 12 \\ \hline 17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0101 \\ +\ 1100 \\ \hline (1)0001 \end{array}$$

OVERFLOW