

# Corso di Calcolatori Elettronici I

---

## Rappresentazione dei numeri interi in un calcolatore

**Prof. Roberto Canonico**



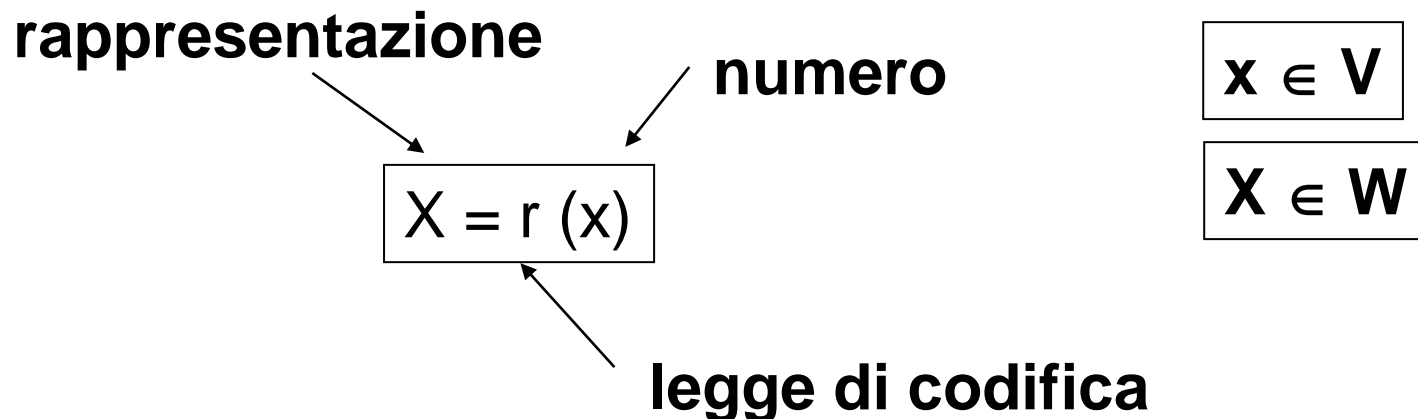
Università degli Studi di Napoli Federico II  
Dipartimento di Ingegneria Elettrica e  
delle Tecnologie dell'Informazione  
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

---

# Rappresentazione dei numeri

---

- Così come per qualsiasi altro tipo di dato, anche i numeri, per essere immagazzinati nella memoria di un calcolatore, devono essere codificati, cioè tradotti in sequenze di simboli
- Nei calcolatori si usano strategie di codifica binaria ( $k=2$ )
- L'alfabeto sorgente è costituito dall'insieme dei numeri che si vogliono rappresentare



# Rappresentazione

---

- Bisogna tener conto dei seguenti fattori:
    - L'insieme  $V$  dei *numeri da rappresentare*
    - L'insieme  $W$  dei *numeri rappresentanti*
    - Tra i due insiemi si stabilisce una corrispondenza che trasforma un elemento  $x$  di  $V$  in uno  $X$  di  $W$
    - Si dice allora che  **$X$  è la rappresentazione di  $x$**
    - La decomposizione in cifre del numero  $X$
    - La codifica in bit delle cifre
-

# Strategie di codifica in macchina

---

- **Codifica binaria a lunghezza fissa**
  - Il numero di bit varia a seconda della cardinalità dell'insieme dei numeri che si desidera rappresentare
    - Nella pratica, resta comunque pari ad un multiplo di 8 bit (tipicamente 8, 16, 32, 64 bit)
  - L'associazione di un numero alla parola codice viene
    - Realizzata differentemente a seconda della tipologia di numeri che si desidera rappresentare
      - naturali, relativi, razionali, ecc ...
    - Influenzata da aspetti che mirano a preservare la facile manipolazione delle rappresentazioni da parte del calcolatore
      - operazioni aritmetiche, confronti logici, ecc ...
  - **Le operazioni aritmetiche vengono eseguite sulle rappresentazioni binarie dei numeri**
-

# Somme e Sottrazioni in aritmetica binaria

---

- Si effettuano secondo le regole del sistema decimale, ossia sommando (sottraendo) le cifre di pari peso
  - Come nelle usuali operazioni su numeri decimali, si può avere un riporto sul bit di peso immediatamente superiore (**carry**), o un prestito dal bit di peso immediatamente superiore (**borrow**)
  - Le somme (differenze) bit a bit sono definite come segue:

$0+0=0$	$0-0=0$
$0+1=1$	$1-0=1$
$1+0=1$	$1-1=0$
$1+1=0$ (carry=1)	$0-1=1$ (borrow=1)
  - Ulteriore caso elementare:
$$1 + 1 + 1 = 1 \text{ (carry=1)}$$
-

# Moltiplicazione in aritmetica binaria

---

- La moltiplicazione bit a bit può essere definita come segue:

$$0 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 0$$

$$1 \times 0 = 0$$

$$1 \times 1 = 1$$

---

# Rappresentazione di insiemi numerici infiniti

---

- Sia la dimensione che il numero dei registri in un calcolatore sono finiti
  - La cardinalità degli insiemi numerici che occorre rappresentare è, invece, infinita
    - $N$  = insieme dei numeri Naturali
    - $Z$  = insieme dei numeri Relativi
    - $Q$  = insieme dei numeri Razionali
    - $R$  = insieme dei numeri Reali
  - È inevitabile dunque che di un insieme di cardinalità infinita solo un sotto-insieme finito di elementi possa essere rappresentato
-

# Overflow

---

- Gli operatori aritmetici, pur essendo talvolta chiusi rispetto all'intero insieme numerico su cui sono definiti, non lo sono rispetto ad un suo sottoinsieme di cardinalità finita
  - Quando accade che, per effetto di operazioni, si tenta di rappresentare un numero non contenuto nel sottoinsieme si parla di *overflow*
  - *Es.* sottoinsieme dei numeri naturali compresi tra 0 e 127 (rappresentabili con 7 bit):
    - La somma  $100 + 100$  genera un overflow, essendo il numero 200 non rappresentabile nel sottoinsieme
-



# Rappresentazione dei numeri naturali

---

- Rappresentare di un sottoinsieme dei numeri naturali attraverso stringhe di bit di lunghezza costante  $n$ 
    - Il numero degli elementi rappresentabili è pari a  $2^n$
    - Tipicamente, volendo rappresentare sempre anche lo zero, si rappresentano i numeri compresi tra  $0$  e  $2^n - 1$
  - L'associazione tra ogni numero e la propria rappresentazione avviene, nei casi pratici, nella maniera più intuitiva
    - Ad ogni numero si associa la stringa di bit che lo rappresenta nel sistema di numerazione binario posizionale
  - L'overflow avviene quando si tenta di rappresentare un numero esterno all'intervallo  $[0, 2^n - 1]$
-

# Esempio

---

Rappresentazione dei  
numeri naturali su 4 bit

$$n=4$$

$$V = [0, 15] \cap \mathbb{N}$$

Codifica:  $X=x$

<b>x</b>	<b>X<sub>2</sub></b>
15	1111
14	1110
13	1101
12	1100
11	1011
10	1010
9	1001
8	1000
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000

---

# Operazioni sui numeri naturali

---

- Per realizzare le operazioni, il calcolatore può lavorare direttamente sulle rappresentazioni
  - La correttezza dei calcoli è garantita dalle leggi dell'aritmetica binaria posizionale (analoghe a quelle della classica aritmetica decimale)
  - L'overflow può essere facilmente rilevato attraverso la valutazione del riporto (o del prestito) sull'ultima cifra
    - In tale aritmetica, overflow = riporto uscente
-

# Esempi

$\begin{array}{r} 6+ \quad 0110+ \\ 8= \quad 1000= \\ \hline 14 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 1110 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 - \quad 1011- \\ 5 = \quad 0101= \\ \hline 6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 0110 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0101 \times \\ 0011 = \\ \hline 0101 \\ 0101= \\ 0000== \\ 0000=== \\ \hline 0001111 \end{array}$
$\begin{array}{r} 14+ \quad 1110 + \\ 3= \quad 0011 = \\ \hline 17 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 10001 \end{array}$ <p>overflow</p>	$\begin{array}{r} 9- \quad 1001- \\ 7= \quad 0111= \\ \hline 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 0010 \end{array}$	

# Rappresentazione dei numeri relativi

---

- Esistono diverse tecniche
  - Segno e modulo
    - Corrispondente a quella comunemente utilizzata per i calcoli “a mano”
    - Poco utilizzata in macchina per le difficoltà di implementazione degli algoritmi, basati sul confronto dei valori assoluti degli operandi e gestione separata del segno
  - Complementi
    - Complementi alla base
    - Complementi diminuiti
  - Per eccessi
-

# Rappresentazione in segno e modulo

---

- un singolo bit di  $X$  codifica il segno
    - Es. il più significativo, 0 se positivo, 1 se negativo
  - i restanti  $n-1$  bit di  $X$  rappresentano il modulo (numero naturale)
  - La legge di codifica  $X=r(x)$  è:  $X = |x| + 2^{n-1} * \text{sign}(x)$ 
    - $\text{sign}(x) = 0$  per  $x \geq 0$ , 1 per  $x < 0$
  - Si possono rappresentare i numeri relativi compresi nell'intervallo  $[-(2^{n-1} - 1), 2^{n-1} - 1]$
  - I numeri relativi rappresentati sono  $2^n - 1$
  - Lo zero ha 2 rappresentazioni 0 positivo e 0 negativo
-

# Esempio

Rappresentazione in  
segno e modulo su 4 bit

$$n=4$$

$$V = [-7, 7] \cap \mathbb{Z}$$

Codifica:

$$X = |x| + 8 * \text{sign}(x)$$

x	X <sub>2</sub>	X <sub>10</sub>
7	0111	7
6	0110	6
5	0101	5
4	0100	4
3	0011	3
2	0010	2
1	0001	1
0	0000;1000	0;8
-1	1001	9
-2	1010	10
-3	1011	11
-4	1100	12
-5	1101	13
-6	1110	14
-7	1111	15

# Operazioni in segno e modulo

---

- Diversamente dalla rappresentazione dei numeri naturali, questa volta non è possibile lavorare direttamente sulle rappresentazioni dei numeri per realizzare le operazioni aritmetiche
  - È necessario lavorare separatamente sul segno e sul modulo
  - Quando, ad esempio, si sommano due numeri di segno discorde, bisogna determinare quello con modulo maggiore e sottrarre ad esso il modulo dell'altro. Il segno del risultato sarà quello dell'addendo maggiore in modulo.
  - Tale caratteristica, insieme con il problema della doppia rappresentazione dello zero, rende i calcoli particolarmente laboriosi e, per questo motivo, non è molto utilizzata nella pratica.
-



# Rappresentazione in complementi alla base

---

- Una seconda tecnica per la rappresentazione dei numeri relativi consiste nell'associare a ciascun numero il suo **resto modulo  $M=2^n$** , definito come:

$$|x|_M = x - [x/M] * M$$

- Questo tipo di codifica, su n bit, è equivalente ad associare:
  - il numero stesso (cioè  $X=x$ ), ai numeri positivi compresi tra 0 e  $2^{n-1} - 1$ ;
  - il numero  $X = 2^n - |x|$ , ai numeri negativi compresi tra  $-2^{n-1}$  e  $-1$ ;
- I numeri rappresentati sono quelli compresi nell'intervallo

$$[-2^{n-1}; 2^{n-1} - 1]$$

---

# Funzione intero

---

- Detto  $r$  un numero reale, si definisce intero di  $r$  il massimo intero  $y \leq r$

$$y = [r]$$

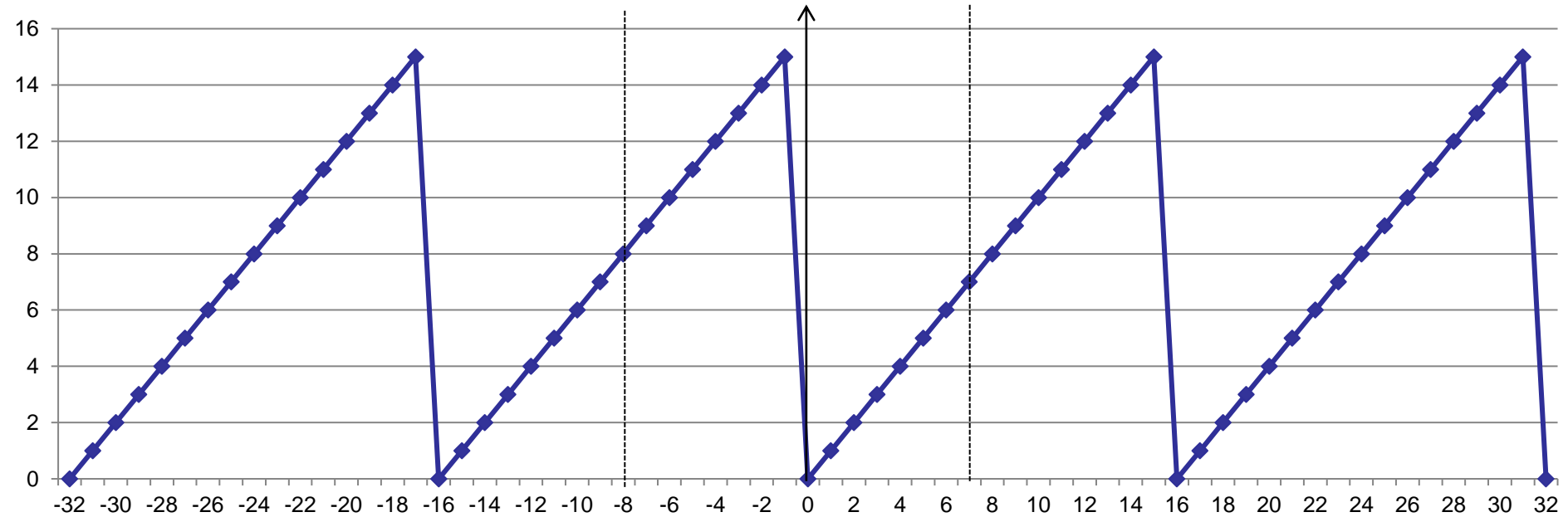
- confronto tra funzione intero  $[ ]$  e ceiling  $\lceil \rceil$

$r$	7.9	7	-7	-7.9
$[r]$	7	7	-7	-8
$\lceil r \rceil$	8	7	-7	-7

# Resto modulo M (M=16)

---

---



## Esempio

Rappresentazione in  
complementi alla base  
su 4 bit

$$n=4$$

$$V = [-8, 7] \cap \mathbb{Z}$$

Codifica:

$$\text{Per } 0 \leq x \leq 7: \quad X = x$$

$$\text{Per } -8 \leq x \leq -1: \quad X = 2^n - |x|$$

x	$X_2$	$X_{10}$
7	0111	7
6	0110	6
5	0101	5
4	0100	4
3	0011	3
2	0010	2
1	0001	1
0	0000	0
-1	1111	15
-2	1110	14
-3	1101	13
-4	1100	12
-5	1011	11
-6	1010	10
-7	1001	9
-8	1000	8

# Complementi alla base: proprietà

---

- Questa rappresentazione ha il fondamentale vantaggio di permettere, nell'ambito di operazioni aritmetiche, di lavorare direttamente sulle rappresentazioni.
- La regola sulla quale questa affermazione si basa è la seguente:

*la rappresentazione della somma (algebrica) di  $x$  ed  $y$  si ottiene come somma (modulo- $M$ ) delle rappresentazioni di  $x$  e  $y$ ; analoghe sono le proprietà della differenza e del prodotto.*

$$|x + y|_M = \left| |x|_M + |y|_M \right|_M$$

- Questo tipo di codifica conserva, inoltre, la proprietà delle rappresentazioni di avere il primo bit 1 se (e solo se) il corrispondente numero è negativo (bit di segno)
-

# Esempi di addizioni in complementi alla base

$\begin{array}{r} 2 + \\ -6 = \\ \hline -4 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 0010 + \\ 1010 = \\ \hline 1100 \end{array}$	$\begin{array}{r} -2 + \\ -3 = \\ \hline -5 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 1110 + \\ 1101 = \\ \hline 11011 \\ \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \text{somma} \\ \text{modulo-16} \end{array}$ <p>si ignora</p>
--	--

**È possibile effettuare la somma direttamente tra le rappresentazioni modulo-M: il risultato ottenuto in questo modo, è proprio la rappresentazione (modulo-M) del risultato corretto**

# Complementi alla base: la complementazione

---

- In complementi alla base, a partire dalla rappresentazione di un numero, è anche particolarmente semplice ottenere la rappresentazione del suo opposto
  - È infatti sufficiente *complementare tutti i bit a partire da sinistra, tranne l'uno più a destra ed eventuali zero successivi*
  - Questa ulteriore caratteristica consente di realizzare le sottrazioni attraverso la composizione di una complementazione (nel senso sopra detto) ed un'addizione
  - Nell'aritmetica in complementi alla base, di conseguenza, l'addizionatore e il complementatore rappresentano i componenti fondamentali per la realizzazione di tutte le operazioni
-

## Esempi di complementazione su 4 bit

---

- La rappresentazione di  $6_{10}$  su 4 bit è  $0110_2$ .
  - Complementando tutti i bit tranne l'uno più a destra e gli zero successivi si ottiene:  $1010_2$ .
  - $1010_2$  è la rappresentazione di  $-6$  in complementi alla base.
  
  - La rappresentazione di  $5_{10}$  su 4 bit è  $0101_2$ .
  - Complementando tutti i bit tranne l'uno più a destra e gli zero successivi si ottiene:  $1011_2$ .
  - $1011_2$  è la rappresentazione di  $-5$  in complementi alla base.
  
  - La rappresentazione di  $1_{10}$  su 4 bit è  $0001_2$ .
  - Complementando tutti i bit tranne l'uno più a destra e gli zero successivi si ottiene:  $1111_2$ .
  - $1111_2$  è la rappresentazione di  $-1$  in complementi alla base.
-



# Complementi alla base: esempio di moltiplicazione

---

---

$$\begin{array}{r} 2 * \\ - 3 = \\ \hline - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0010 \times \\ 1101 = \\ \hline 0010 \\ 0000= \\ 0010== \\ 0010=== \\ \hline 0011010 \end{array}$$

si ignora      prodotto

# Estensione del segno

---

- Problema:
    - Sia dato un intero  $N$ , rappresentato in complemento mediante  $n$  bit
    - Rappresentare  $N$  usando  $n+q$  bit ( $q>0$ )
  - Soluzione:
    - Fare  $q$  copie di MSB
  - Dimostrazione (banale per  $N$  positivo)
    - Sia  $N<0$  ( $N=1bb\dots b$ , dove  $b$  è una cifra binaria)
    - Per induzione: Sia  $N_q$  la stringa con estensione di  $q$  bit
      - $q=1$ : Poiché  $-2^{n-1} = -2^n + 2^{n-1}$ , allora  $V(N) = V(N_1)$ .
      - $q>1$ : estendere di un bit la stringa ottenuta da  $N$  con estensione di  $q-1$  bit  
 $\rightarrow V(N_q) = V(N_{q-1})$
  - Esempio
    - $-6 \rightarrow (1010)_2$  con 4 bit diventa **(11111010)**<sub>2</sub> su 8 bit
  - Nota: questa operazione viene eseguita quando si fa in C un typecast da tipo short int ad int
-

# Complementi diminuiti

---

- La rappresentazione in complementi diminuiti costituisce un'ulteriore alternativa per la codifica dei numeri relativi
  - Concettualmente è analoga alla rappresentazione in complementi alla base
  - La differenza rispetto ad essa è che la legge di codifica dei numeri negativi è leggermente differente:
    - $X=2^n - |x|$ ; (complementi alla base)
    - $X=2^n - 1 - |x|$ ; (complementi diminuiti)
  - I numeri rappresentabili, se si utilizzano  $n$  bit, sono quelli compresi nell'intervallo  $[-(2^{n-1} - 1), 2^{n-1} - 1]$ .
  - I numeri rappresentabili sono  $2^n - 1$
  - lo zero ha una doppia rappresentazione
-

# Esempio

Rappresentazione in  
complementi diminuiti su 4 bit

$$n=4$$

$$V = [-7, 7] \cap \mathbb{Z}$$

Codifica:

$$\text{Per } 0 \leq x \leq 7: \quad X = x$$

$$\text{per } -7 \leq x \leq -1: \quad X = 2^n - 1 - |x|$$

x	X <sub>2</sub>	X <sub>10</sub>
7	0111	7
6	0110	6
5	0101	5
4	0100	4
3	0011	3
2	0010	2
1	0001	1
0	0000;1111	0;15
-1	1110	14
-2	1101	13
-3	1100	12
-4	1011	11
-5	1010	10
-6	1001	9
-7	1000	8

# Complementi diminuiti: perché?

---

- Maggiore semplicità con cui è possibile calcolare la rappresentazione dell'opposto di un numero, a partire dalla rappresentazione del numero stesso: basta semplicemente complementare tutti i bit della rappresentazione indistintamente
  - Esempi:
    - la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di 4 è 0100;
      - complementando tutti i bit si ottiene 1011;
      - 1011 è la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di  $-4$
    - la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di  $-6$  è 1001;
      - complementando tutti i bit si ottiene 0110;
      - 0110 è la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di 6
-

# Aritmetica in complementi diminuiti

---

- Componenti:
    - Ancora l'addizionatore modulo- $2^n$  (e non  $2^n-1$ )
      - L'addizionatore modulo- $2^n$  è più semplice da realizzare
    - Un complementatore
  - Il risultato però deve essere opportunamente “corretto” per renderlo compatibile con l'aritmetica in modulo  $2^n-1$
  - In particolare deve essere aggiunta un'unità al risultato nei seguenti casi:
    - se entrambi gli addendi sono negativi
    - se un addendo è positivo, l'altro negativo e la somma è positiva
  - Nei casi suddetti l'aritmetica degli interi positivi (quella sulle rappresentazioni) dà overflow
    - Il riporto delle cifre più significative (carry) quindi può essere interpretato come la necessità di effettuare la correzione
-

# Esempi di somme in complementi diminuiti

---

$$\begin{array}{r} - 2 + \quad 1101 + \\ - 3 = \quad 1100 = \\ \hline - 5 \quad \longrightarrow \quad \hline \quad 11001 + \\ \quad \quad 1 = \\ \quad \quad \hline \quad 1010 \end{array}$$

Somma di due numeri negativi.  
Si è generato overflow tra le rappresentazioni.  
Necessita correzione.

---

$$\begin{array}{r} 5 + \quad 0101 + \\ - 2 = \quad 1101 = \\ \hline 3 \quad \longrightarrow \quad \hline \quad 10010 + \\ \quad \quad 1 = \\ \quad \quad \hline \quad 0011 \end{array}$$

Somma di un numero positivo e un numero negativo.  
Il risultato è positivo.  
Si è generato overflow tra le rappresentazioni.  
Necessita correzione.

---

$$\begin{array}{r} 3 + \quad 0011 + \\ - 4 = \quad 1011 = \\ \hline - 1 \quad \longrightarrow \quad \hline \quad 1110 \end{array}$$

Somma di un numero positivo e un numero negativo.  
Il risultato è negativo.  
Non si è generato overflow tra le rappresentazioni.  
Non necessita alcuna correzione.

---

# Rappresentazione eccesso-k

---

- La rappresentazione in eccesso-k costituisce un metodo diverso da quello dei resti in modulo per ricondurre i numeri negativi a positivi
- In particolare, tutti i numeri sono traslati “verso l’alto” di  $k$ , che viene scelto maggiore o uguale al numero più piccolo da rappresentare

$$X = x + k$$

---



# Rappresentazione eccesso-k: proprietà

---

- Analogamente al caso dei complementi diminuiti, la somma va corretta aggiungendo o sottraendo la costante k, e quindi in maniera sufficientemente semplice
- Moltiplicazioni e divisioni risultano invece più complesse
- Il vantaggio di tale codifica è che viene conservata la proprietà della disuguaglianza sulle rappresentazioni:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow X_1 > X_2$$

- Questa rappresentazione, perciò, è utilizzata soltanto laddove siano richieste fondamentalmente somme algebriche e confronti logici fra gli operandi
  - Tipicamente si utilizza per rappresentare gli esponenti nella rappresentazione in virgola mobile (prossima lezione)
-

# Esempio

Rappresentazione in  
eccesso-8 su 4 bit

$$n=4$$

$$V = [-8, 7] \cap \mathbb{Z}$$

Codifica:

$$X = x + k$$

x	X <sub>2</sub>	X <sub>10</sub>
7	1111	15
6	1110	14
5	1101	13
4	1100	12
3	1011	11
2	1010	10
1	1001	9
0	1000	8
-1	0111	7
-2	0110	6
-3	0101	5
-4	0100	4
-5	0011	3
-6	0010	2
-7	0001	1
-8	0000	0