

Corso di Calcolatori Elettronici I

Algebra di Boole:
definizione e proprietà

Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II

A.A. 2020-2021



- L'algebra di Boole fu introdotta nel 1854 come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica
- George Boole (1815-1864)
 - *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* (1854)
- Il suo uso per descrivere reti binarie di commutazione si deve a Claude Shannon
 - *A symbolic analysis of relay and switching circuits* (1938)





Si dice *Algebra di Boole* una *struttura algebrica* $\langle K, +, \cdot, \neg, 0, 1 \rangle$

- K è un insieme (detto **supporto**)
- 0 e 1 sono due elementi speciali del supporto K
- $+$, \cdot e \neg sono tre operazioni

somma $+$: $K \times K \rightarrow K$

prodotto \cdot : $K \times K \rightarrow K$

complementazione \neg : $K \rightarrow K$

- ... che godono delle seguenti proprietà ($\forall a, b, c \in K$)

- 1 Commutativa:

$$a + b = b + a \quad (\text{P1})$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{P1}')$$



- 2 Esistenza di elemento neutro rispetto a +
e di elemento neutro rispetto a ·:

$$a + 0 = a \quad (\text{P2})$$

$$a \cdot 1 = a \quad (\text{P2}')$$

- 3 Distributiva:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{P3})$$

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad (\text{P3}')$$

- 4 Esistenza del complemento:

$$a + (\neg a) = 1 \quad (\text{P4})$$

$$a \cdot (\neg a) = 0 \quad (\text{P4}')$$



Algebra di Boole a due valori

Se $K = \{0, 1\}$ e le operazioni $+$, \cdot , \neg si definiscono come segue:

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	$\neg a$
0	1
1	0

la sestupla $\langle K, +, \cdot, \neg, 0, 1 \rangle$ è **un'algebra** di Boole.

- ... ovvero sono soddisfatte le 8 proprietà $(P1), (P1'), (P2), (P2'), (P3), (P3'), (P4), (P4')$
- Le operazioni $+$, \cdot e \neg sono comunemente chiamate *OR*, *AND* e *NOT* (per motivi che saranno chiari nelle slide seguenti)



- In un'algebra di Boole, qualunque proprietà si ottenga per derivazione dagli assiomi (P1),(P1'),(P2),(P2'),(P3),(P3'),(P4),(P4') rimane valida se si scambia $+$ con \cdot e viceversa, e l'elemento 0 con 1 e viceversa.



Date tre *variabili booleane* $x, y, z \in K$, si possono far scaturire dagli 8 assiomi definitori (P1),(P1'),...,(P4),(P4') le seguenti proprietà

- Associativa:

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad (1)$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (2)$$

- Idempotenza:

$$a + a = a \quad (3)$$

$$a \cdot a = a \quad (4)$$

- Assorbimento:

$$a + (a \cdot b) = a \quad (5)$$

$$a \cdot (a + b) = a \quad (6)$$



- Massimo e minimo assoluti in K :

$$x + 1 = 1 \quad (7)$$

$$x \cdot 0 = 0 \quad (8)$$

- Unicità del complemento:

il complemento di x , indicato con $\neg x$, è unico (9)

- Convoluzione:

$$\neg(\neg x) = x \quad (10)$$

- Semplificazione:

$$a + (\neg a \cdot b) = a + b \quad (11)$$

$$a \cdot (\neg a + b) = a \cdot b \quad (12)$$



- Per l'assioma (P4),(P4') e per la proprietà (9), dato un elemento $x \in K$, esiste ed è unico l'elemento $\neg x \in K$ tale che:

$$x + (\neg x) = 1$$

$$x \cdot (\neg x) = 0$$

- L'elemento $\neg x$ si denota anche con i simboli \bar{x} o x' , e si chiama il **complemento** di x
- Le relazioni precedenti si possono dunque anche scrivere

$$x + \bar{x} = 1$$

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

$$x + x' = 1$$

$$x \cdot x' = 0$$

- Nel seguito si utilizzerà prevalentemente la notazione \bar{x}



- Legge di De Morgan:

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad (13)$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y} \quad (14)$$



- In virtù della proprietà associativa si dà significato alle operazioni di somma e prodotto tra tre o più termini:

$$x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$



Algebra di Boole della logica

Se $K = \{F, T\}$ e le operazioni $+$, \cdot , \neg si definiscono come segue:

a	b	$a + b = a$ OR b
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

a	b	$a \cdot b = a$ AND b
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

a	$\neg a =$ NOT a
F	T
T	F

la sestupla $\langle K, +, \cdot, \neg, 0, 1 \rangle$ è un'algebra di Boole con $F = 0$, $T = 1$

- ... ovvero sono soddisfatte le 8 proprietà (P1),(P1'),...,(P4),(P4')
- F sta per *false*, T per *true*
 - rappresentano il contenuto di verità di una proposizione
- **AND** operazione logica di *congiunzione*
- **OR** operazione logica di *disgiunzione*
- **NOT** operazione logica di *negazione*



Algebra di Boole degli insiemi

Dato un insieme T , sia K l'*insieme dei sottoinsiemi* di T .

- 0 è l'insieme vuoto ϕ
- 1 è l'insieme T

La sestupla $\langle K, +, \cdot, \neg, 0, 1 \rangle$ è un'algebra di Boole se

- $+$ operazione insiemistica di *unione*
- \cdot operazione insiemistica di *intersezione*
- \neg operazione insiemistica di *complemento a T*

Teorema di Stone

Ogni algebra di Boole è rappresentabile su un'algebra di insiemi.

- Utilizzeremo i diagrammi di Venn per verificare proprietà di una qualsiasi algebra di Boole



Esempio di proprietà interpretabile tramite gli insiemi

La proprietà di assorbimento (5), nelle sue due formulazioni:

$$a + (a \cdot b) = a$$

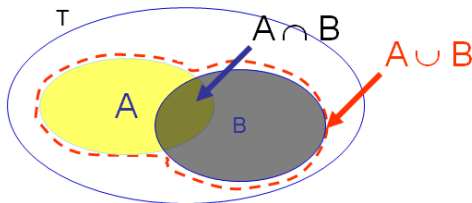
$$a \cdot (a + b) = a$$

corrisponde, nell'algebra degli insiemi, alle relazioni:

$$a \cup (a \cap b) = a$$

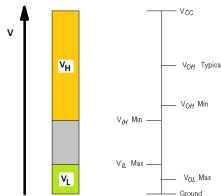
$$a \cap (a \cup b) = a$$

che trovano una giustificazione semplice ed intuitiva.





- Nei *circuiti elettronici digitali*, si consente ad una grandezza fisica rappresentativa dello "stato" del circuito di assumere valori solo all'interno di intervalli limitati e disgiunti
- Ad esempio, la tensione elettrica tra un morsetto di uscita di un circuito e massa può assumere valori o in $[V_{Lmin}, V_{Lmax}]$ o in $[V_{Hmin}, V_{Hmax}]$ con $V_{Lmax} < V_{Hmin}$
 - Nel primo caso, si dice per convenzione che il *livello logico* sul morsetto di uscita è LOW (*L*)
 - Nel secondo caso, si dice per convenzione che il *livello logico* sul morsetto di uscita è HIGH (*H*)





Se $K = \{L, H\}$ e le operazioni $+$, \cdot , \neg si definiscono come segue:

a	b	$a + b = a$ OR b
L	L	L
L	H	H
H	L	H
H	H	H

a	b	$a \cdot b = a$ AND b
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

a	$\neg a =$ NOT a
L	H
H	L

la sestupla $\langle K, +, \cdot, \neg, 0, 1 \rangle$ è un'algebra di Boole con $L = 0, H = 1$

- ... ovvero sono soddisfatte le 8 proprietà (P1),(P1'),...,(P4),(P4')
- I circuiti elettronici che operano secondo le relazioni fondamentali dell'algebra di Boole dei circuiti sono detti *gate* o *porte logiche*



AND gate



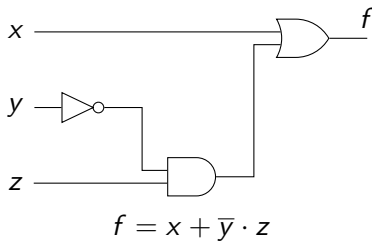
OR gate



NOT gate



- Nel circuito rappresentato in figura il livello logico presente sul morsetto di uscita f è *funzione* dei livelli logici applicati sugli ingressi
- Il legame funzionale tra il valore di f e quello degli ingressi x , y e z può essere rappresentato mediante una *tabella di verità*
- Per ogni possibile combinazione delle variabili x , y e z si indica in tabella il corrispondente valore di f



x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1