Corso di Calcolatori Elettronici I

Relazione d'ordine in un'algebra di Boole ed implicanti di una funzione

Prof. Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica e
delle Tecnologie dell'Informazione

Relazione d'ordine su un insieme K

- *Dato un insieme K, una relazione d'ordine parziale* $\leq$ *su K è una relazione binaria (cioè tra coppie di elementi di K) che gode delle tre proprietà:*
  - *Riflessiva* $x \leq x \quad \forall x \in K$
  - *Antisimmetrica* $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
  - *Transitiva* $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

- In un'algebra di Boole la relazione

$$x + y = y$$

- è una relazione d'ordine parziale
- DIMOSTRAZIONE:
  1. $x + x = x \quad \forall x \in K$ per la proprietà di idempotenza
  2. Se $x + y = y$ e $y + x = x = x + y$ (per la p. commutativa) si ha: $x = y$
  3. Se $x + y = y$ e $y + z = z$

     sommando membro a membro, si ha:

     $x + \cancel{y} + y + z = y + z$

     cioè $x + z = z$ ovvero: $x \leq z$

Relazione d'ordine in un'algebra di Boole (1)

- In un'algebra di Boole la relazione

$$x + y = y$$

  è una relazione d'ordine parziale

- DIMOSTRAZIONE:

  1. $x + x = x \quad \forall x \in K$ per la proprietà di idempotenza
  2. Se $x + y = y$ e $y + x = x = x + y$ (per la p. commutativa) si ha: $x = y$
  3. Se $x + y = y$ e $y + z = z$

     sommando membro a membro, si ha:

     $x + \cancel{y} + y + z = y + z$

     cioè: $x + z = z$ ovvero: $x \leq z$

Relazione d'ordine in un'algebra di Boole (2)

- In un'algebra di Boole la relazione

$$x \cdot y = x$$

  è una relazione d'ordine parziale equivalente a:

$$x + y = y$$

- DIMOSTRAZIONE $\Rightarrow$:
  Siano x ed y tali che: $x \cdot y = x$
  Sommando y a primo e secondo membro:

$$x \cdot y + y = x + y$$

  Per la proprietà dell'assorbimento: $y = x + y$
- DIMOSTRAZIONE $\Leftarrow$:
  Siano x ed y tali che: $x + y = y$
  Moltiplicando x a primo e secondo membro:

$$x \cdot (x + y) = x \cdot y$$

  Per la proprietà dell'assorbimento: $x = x \cdot y$

Interpretazione delle proprietà del massimo e del minimo

- Sono state già presentate le seguenti due proprietà valide in un'algebra di Boole, $\forall x \in K$:

  $x + 1 = 1$

  $x \cdot 0 = 0$

- Le due proprietà, interpretate alla luce della relazione d'ordine $x \leq y$ definita dalle condizioni: $x + y = y$ ovvero: $x \cdot y = x$ si possono riscrivere come:

  $x \leq 1, \forall x \in K$

  $0 \leq y, \forall y \in K$

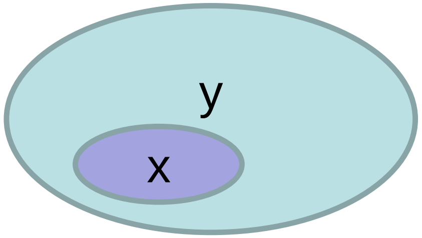
- da cui il nome di «esistenza del minimo e massimo assoluti» dato alle proprietà sopra indicate

Relazione d'ordine nell'algebra degli insiemi

- Nell'algebra di Boole degli insiemi la relazione d'ordine $x + y = y$ (*) equivalente a $x \cdot y = x$ (**) corrisponde alla relazione d'inclusione insiemistica
- Quindi: $x \leq y$ equivale a: $x \subseteq y$
- L'interpretazione insiemistica di (*) è:

$$x \cup y = y$$

- L'interpretazione insiemistica di (**) è:



$$x \cap y = x$$

Relazione d'ordine nell'algebra delle proposizioni

- Nell'algebra delle proposizioni, in cui K={F, T}, la relazione d'ordine $x + y = y$ equivale alla relazione di implicazione logica:

$$x \Rightarrow y$$

che sussiste nei tre casi:

1) x = F ed y = F, 2) x = F ed y = T, 3) x = T ed y = T

- In forma algebrica, $x \Rightarrow y$

significa che: $\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y + x \cdot y = 1$

ovvero: $\bar{x} + x \cdot y = 1$

cioè: $\bar{x} + y = 1$

Implicazione come relazione d'ordine

- Se $x \Rightarrow y$ è vera, allora $\bar{x} + y = 1$

$$\bar{x} + y = \bar{x} \cdot \bar{y} + y \qquad (ass.compl)$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} + xy + y \qquad (P4)$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} + xy + yy \qquad (P3)$$

$$= \overline{(x + y)} \cdot \bar{y} + (x + y) \cdot y = 1 \qquad (DeMorgan)$$

$\Downarrow$ per le proprietà dell'equivalenza

$$\boxed{ab + \bar{a}\bar{b}}$$

$$\boxed{x + y = y \Leftrightarrow x \leq y}$$

$\Downarrow$

l'implicazione è la relazione d'ordine nell'algebra della logica

Funzioni Equivalenza ed Implicazione

- Funzione implicazione

$$a \Rightarrow b \text{ è vera ss.e. vale 1: } f(a,b) = \bar{a} + b = (a \rightarrow b)$$

- Funzione equivalenza

$$a \Leftrightarrow b \text{ è vera ss.e. è 1: } f(a,b) = ab + \bar{a}\bar{b} = (a \equiv b)$$

- *Si dice che* ***x implica y*** *se e solo se dalla verità di x (antecedente) scaturisce necessariamente la verità di y (conseguente)*
- *In termini algebrici, essendo l'implicazione falsa se e solo se x è vera e y è falsa, applicando il Teorema di De Morgan, si ha*

$$\overline{x \rightarrow y} = x \cdot \bar{y}$$

$$x \rightarrow y = \overline{x \cdot \bar{y}} = \bar{x} + y$$

Clausole e fattori elementari

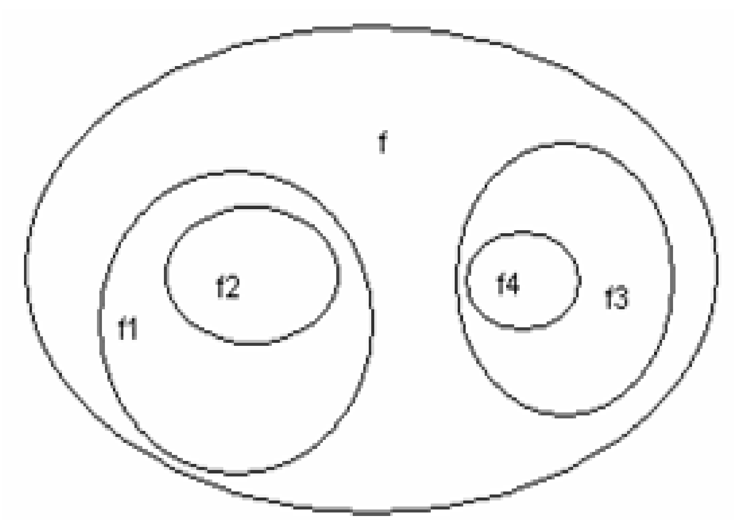
- Si chiamano **clausole** le funzioni booleane che si esprimono come prodotto di letterali
  - Esempio: $a \cdot \bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$ sono clausole
- Si chiamano **fattori elementari** le funzioni booleane che si esprimono come somma di letterali
  - Esempio: $a + \bar{b}$, $\bar{a} + \bar{b} + c$ sono fattori elementari
- Il **grado di una clausola** o **di un fattore elementare** è il numero di letterali che in essa compaiono
- Nel contesto delle funzioni booleane di *n* variabili, i mintermini sono clausole di ordine *n*
- Nel contesto delle funzioni booleane di *n* variabili, i maxtermini sono fattori elementari di ordine *n*

Implicanti di una funzione

- Un **implicante** di f è una funzione f_1 tale che

$$\overline{f_1} + f = 1 \qquad \textit{cioè} \qquad f_1 \rightarrow f$$

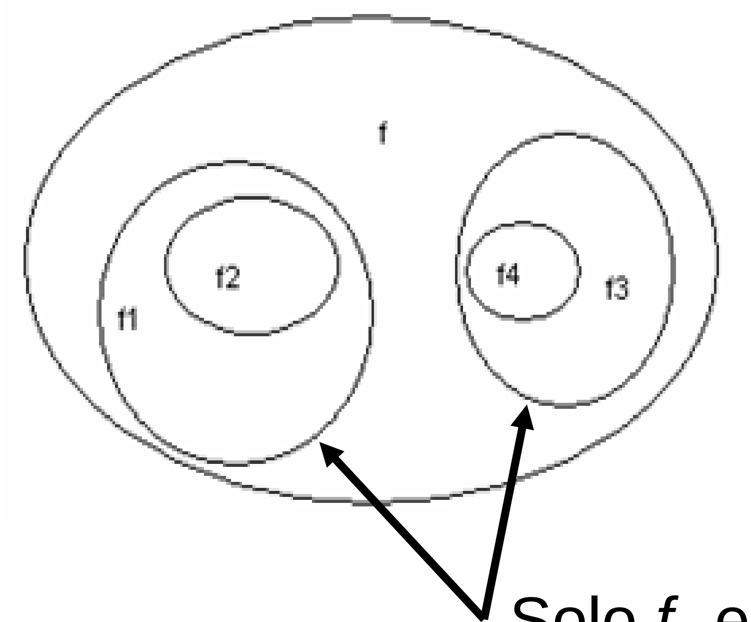
- In particolare, considerereremo come implicanti di una funzione le *clausole implicanti*



- Esempio: implicanti di f
  - $f_1 \rightarrow f$
  - $f_2 \rightarrow f$
  - $f_3 \rightarrow f$
  - $f_4 \rightarrow f$
- ma anche: $f_2 \rightarrow f_1$ e $f_4 \rightarrow f_3$

Implicanti primi di una funzione

- Nell'insieme degli implicanti di *f*, definiamo **primi** quegli implicanti che a loro volta non implicano nessun altro implicante di *f*



Solo f_1 ed f_3 sono implicanti primi

Proprietà degli implicanti (1)

1. Data una funzione *f* in forma elementare di tipo *P* ciascuna clausola è un suo implicante

$$f = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad \overline{A_i} + f = \overline{A_i} + (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$$

   – Esempio: $f(a,b,c) = a \cdot \overline{b} + b \cdot c$
     le funzioni $(a \cdot \overline{b})$ e $(b \cdot c)$ sono clausole implicanti di f

2. Una clausola B ne implica un'altra A se e solo se B contiene tutti i letterali di A
   – Esempio: $a \cdot \overline{b} \cdot c \Rightarrow a \cdot \overline{b}$

Proprietà degli implicanti (2)

3. La somma di due clausole di ordine *n* che contengono *n-1* letterali uguali ed in cui un letterale dell'una sia il complemento di quello dell'altra è la clausola di ordine *n-1* formata dai letterali comuni (detta ***consenso***)

$$A \cdot x + A \cdot \bar{x} = A \cdot (x + \bar{x}) = A$$

– Esempio: $a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot \bar{c} = a \cdot \left(\bar{b} + b\right) \cdot \bar{c} = a \cdot \bar{c}$

Proprietà degli implicanti (3)

4. Ad una funzione può essere aggiunto un suo implicante senza alterarne il valore
5. *A* è un implicante di *f* se e solo se nella forma normale di tipo P di *f* sono presenti tutti i mintermini aventi *A* come fattore
   - Infatti, se *A* è un implicante, lo si può aggiungere ad *f*, per poi espanderlo in mintermini (facendo comparire anche le variabili assenti in *A*)
   - Se, viceversa, sono presenti tutti i mintermini aventi *A* come fattore, essi possono essere raccolti in modo da far apparire *A* come clausola di *f*
   - Esempio: $f(a,b,c) = a \cdot \bar{b} + b \cdot c$

     si ha: $a \cdot \bar{b} \Rightarrow f$ e: $b \cdot c \Rightarrow f$

     e quindi: $f = a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}bc + abc$