

Corso di Calcolatori Elettronici I

Algebra di Boole: forme NAND e NOR

Prof. Roberto Canonico



Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell'Informazione

Funzioni NAND e NOR

NAND $x \uparrow y = \overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$

NOR $x \downarrow y = \overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

De Morgan

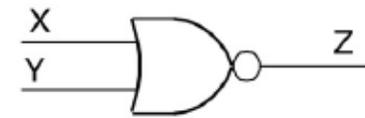
$$x_1 \uparrow x_2 \uparrow \dots \uparrow x_n = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n$$

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow \dots \downarrow x_n = \overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \dots \cdot \bar{x}_n$$

Porte NAND e NOR



x	y	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Figura 3.14 - Simboli delle porte NAND e NOR e relative tabelle di verità.

Non associatività di NAND e NOR

- NAND e NOR **non** godono della proprietà associativa

$$\text{NAND} \quad (x_1 \uparrow x_2) \uparrow x_3 \neq x_1 \uparrow (x_2 \uparrow x_3) \neq x_1 \uparrow x_2 \uparrow x_3$$

$$\text{NOR} \quad (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \neq x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \neq x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3$$

AND, OR e NOT da NAND e NOR

- E' possibile ottenere una AND e una OR tramite NAND e NOR

$$x \cdot y = \overline{x \uparrow y} = \overline{\bar{x} \downarrow \bar{y}}$$

$$x + y = \overline{x \downarrow y} = \overline{\bar{x} \uparrow \bar{y}}$$

- E' possibile ottenere una NOT tramite NAND e NOR

$$\text{NAND} \quad x \uparrow 1 = \overline{x \cdot 1} = \bar{x}$$

$$\text{NOR} \quad x \downarrow 0 = \overline{x + 0} = \bar{x}$$

AND, OR e NOT da NAND e NOR

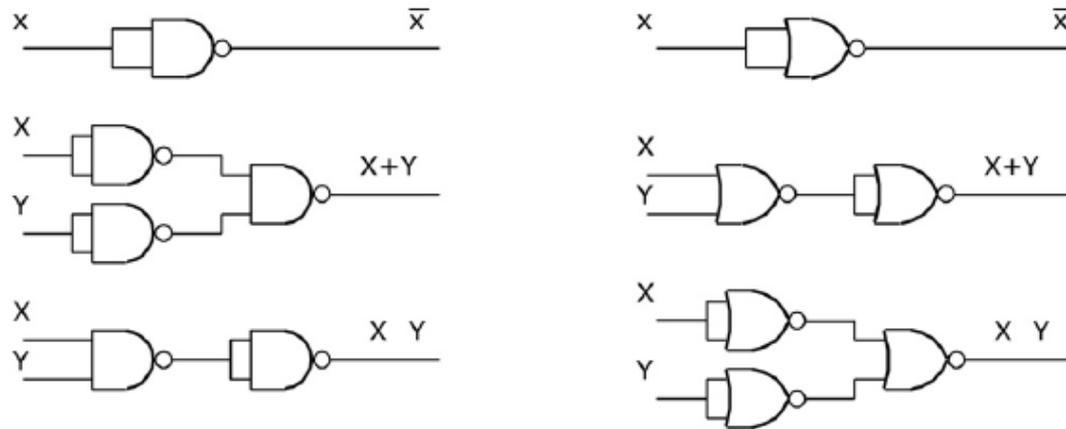


Figura 3.15 - Costruzione delle operazioni di NOT, OR e AND dalle porte NAND e NOR.

Funzioni NAND e NOR

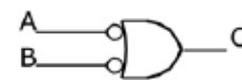
- Riassumendo, le NAND permettono di ottenere una NOT, una AND ed una OR
- Similmente per la NOR
- Ricordiamo che $\{AND, OR, NOT\}$ è un insieme funzionalmente completo, quindi \rightarrow

$\{NAND\}$ e $\{NOR\}$ sono due insiemi funzionalmente completi

NAND e NOR: proprietà



NAND



NOR

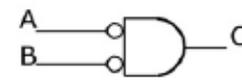


Figura 3.17 - Simboli equivalenti per le porte NAND e NOR.

Proprietà di NAND e NOR

- Una NAND di prodotti è uguale alla NAND delle variabili indipendenti.
(**Duale**) Una NOR di somme è uguale alla NOR delle variabili indipendenti

$$(ab) \uparrow (cd) = \overline{(ab) \cdot (cd)} = a \uparrow b \uparrow c \uparrow d$$

$$(a+b) \downarrow (c+d) = \overline{(a+b) + (c+d)} = a \downarrow b \downarrow c \downarrow d$$

- Una OR di NAND è uguale alla NAND delle variabili indipendenti.
(**Duale**) Una AND di NOR è uguale alla NOR delle variabili indipendenti

$$(a \uparrow b) + (c \uparrow d) = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = a \uparrow b \uparrow c \uparrow d$$

$$(a \downarrow b) \cdot (c \downarrow d) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} = a \downarrow b \downarrow c \downarrow d$$

- Una AND è uguale ad una NOR di NAND.
(**Duale**) Una OR è uguale ad una NAND di NOR

$$(a \uparrow b) \downarrow (c \uparrow d) = abcd$$

$$(a \downarrow b) \uparrow (c \downarrow d) = a + b + c + d$$

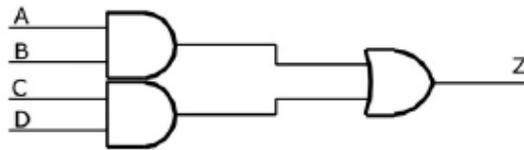
Forme NAND e NOR di una funzione

- Una forma elementare di tipo P si trasforma in una forma NAND a due livelli operando come segue:
 - tutti gli operatori si trasformano in NAND, rispettando le priorità;
 - le clausole costituite da un solo letterale vengono negate.

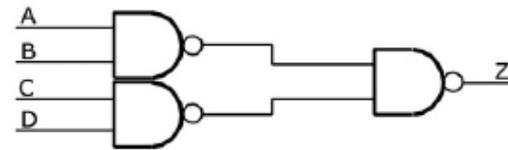
$$f = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \overline{\overline{\gamma_1} \cdot \overline{\gamma_2} \cdot \dots \cdot \overline{\gamma_n}} = \overline{\gamma_1} \uparrow \overline{\gamma_2} \uparrow \dots \uparrow \overline{\gamma_n}$$

- Dualmente per la forma di tipo S
-

Da rete AND-OR a rete NAND

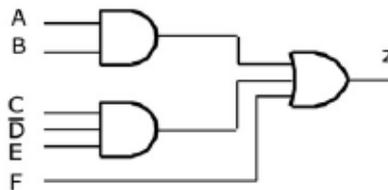


a) Rete di partenza

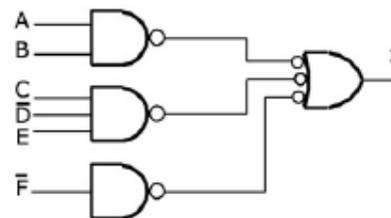


b) Rete equivalente

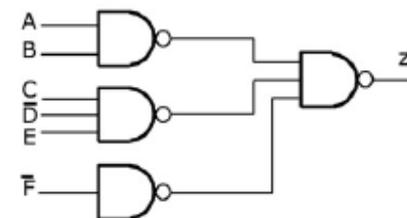
Figura 3.16 - Passaggio da rete SP a rete NAND. In questo caso, il passaggio richiede solo la sostituzione di porte AND e OR con porte NAND.



a) Rete di partenza



b) Inserimento negatori



c) Rete di NAND equivalente

Figura 3.18 - Passaggio da rete SP a rete di NAND.

Generalizzando...

- Se le γ_n sono funzioni invece che letterali, la proprietà precedente può essere generalizzata
 - Una forma con operatori AND e OR a n livelli che abbia come ultimo livello una OR (*AND*) si trasforma in una forma **NAND** (*NOR*), operando come segue:
 - tutti gli operatori si trasformano in NAND (*NOR*) rispettando le priorità;
 - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano.
-

Forme NAND e NOR di una funzione

- Una forma con operatori AND e OR a n livelli che abbia come ultimo livello una OR (AND) si trasforma in una forma **NOR** (NAND) ad $n+1$ livelli, operando come segue:
 - si aggiunge una NOR (NAND) finale che complementa le uscite;
 - tutti gli operatori si trasformano in NOR (NAND) rispettando le priorità;
 - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano.

$$f = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n) \cdot 1 = (\gamma_1 \downarrow \gamma_2 \downarrow \dots \downarrow \gamma_n) \downarrow 0$$

Esempio 1

Dalla funzione a 2 livelli in forma P:

$$f = ab + \bar{a}\bar{b} + c$$

si ottiene la forma NAND

$$f = (a \uparrow b) \uparrow (\bar{a} \uparrow \bar{b}) \uparrow \bar{c}$$

ove \bar{c} è negato perché singolo letterale (livello complementare 1) oppure quella NOR

$$f = ((\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow (a \downarrow b) \downarrow c) \downarrow 0$$

ove a, b sono negate in entrambe le clausole perché diventate di livello 3 e c non lo è più perché di livello 2.

Esempio 2

Dualmente dalla funzione in forma S

$$f = (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) \cdot c$$

si ottiene la forma NOR

$$f = (a \downarrow b) \downarrow (\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow \bar{c}$$

oppure quella NAND

$$f = ((\bar{a} \uparrow \bar{b}) \uparrow (a \uparrow b) \uparrow c) \uparrow 1$$

Esempio 3

La funzione a 4 livelli

$$f = b \cdot (c + \bar{c} \cdot (\bar{a} + d))$$

si trasforma nella forma NOR ancora a 4 livelli

$$f = \bar{b} \downarrow (c \downarrow (c \downarrow (\bar{a} \downarrow d)))$$

dove b e \bar{c} sono negate rispettivamente ai livelli complementari 1 e 3, oppure nella forma NAND a 5 livelli

$$f = (b \uparrow (\bar{c} \uparrow (\bar{c} \uparrow (a \uparrow \bar{d})))) \uparrow 1$$

ove \bar{c} al livello 3 e \bar{a}, d al livello 5 sono negati.
