

# Corso di Calcolatori Elettronici

## Rappresentazione dei numeri naturali

Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II

A.A. 2021-2022





# Numeri: rappresentazione posizionale

- La rappresentazione di un numero è un problema di *codifica*
  - Difficoltà: gli insiemi numerici comunemente utilizzati in Matematica hanno cardinalità infinita
- **Sistema di rappresentazione posizionale**
- Gli elementi dell'insieme  $A$  (*alfabeto codice*) si chiamano *cifre*
- La cardinalità  $b$  di  $A$  si chiama *base* del sistema di numerazione
- La stringa  $X = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\dots a_{-k}$  di  $n + k$  cifre rappresenta il numero

$$x = \sum_{i=-k}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

$$b = 2, n = 3, k = 2, X = 101.01,$$

$$x = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 1 + 0.25 = 5.25$$

$$b = 10, n = 3, k = 2, X = 101.01,$$

$$x = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} = 100 + 1 + 0.01 = 101.01$$



- Insiemi delle cifre per i valori di base comunemente usati

Codice	Base	Alfabeto
Binario	2	$A=\{0,1\}$
Ottale	8	$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$
Decimale	10	$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
Esadecimale	16	$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$



- Qualunque sia la base, la cifra più a sinistra moltiplica la potenza di esponente massimo e viene detta *cifra più significativa* della rappresentazione

- Se  $b = 2$ , si parla di *bit più significativo* (*most significant bit*)

- Con riferimento alla stringa  $a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\dots a_{-k}$

- le cifre a sinistra del punto moltiplicano potenze di  $b$  di esponente positivo e costituiscono la *parte intera* del numero

$$a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$$

- le cifre a destra del punto moltiplicano potenze di  $b$  di esponente negativo e costituiscono la *parte frazionaria* del numero

$$.a_{-1}a_{-2}\dots a_{-k}$$

- Assumiamo noti gli algoritmi di conversione della rappresentazione di un numero tra basi diverse



- Supponiamo di avere la rappresentazione di un numero in base  $b^k$ 
  - La rappresentazione dello stesso numero  $x$  in base  $b$  si ottiene sostituendo a ciascuna cifra della rappresentazione  $X$  in base  $b^k$  la rispettiva rappresentazione in base  $b$  su  $k$  cifre

$$b = 2 \text{ e } k = 4$$

$$X_{16} = 3A2C_{16} \longrightarrow X_2 = 0011101000101100$$

- Supponiamo di avere la rappresentazione di un numero in base  $b$ 
  - La rappresentazione dello stesso numero  $x$  in base  $b^k$  si ottiene raggruppando a  $k$  a  $k$  le cifre della rappresentazione  $X$  in base  $b$  e sostituendole con la cifra che le rappresenta in base  $b^k$

$$b = 2 \text{ e } k = 4$$

$$X_2 = 0011101000101100 \longrightarrow X_{16} = 3A2C_{16}$$



- Rappresentazione di  $b^k - 1$ 
  - Le prime  $k$  cifre meno significative sono  $(b - 1)$ , le rimanenti  $n - k$  cifre (più a sinistra) sono 0

$$b = 10, n = 8, x = 999 = 10^3 - 1 \quad \longrightarrow X = 00000999$$

$$b = 2, n = 8, x = 31 = 2^5 - 1 \quad \longrightarrow X = 00011111$$

- Rappresentazione di  $b^k/2$ 
  - La cifra di peso  $(k - 1)$  è uguale a  $b/2$ , tutte le altre cifre sono 0

$$b = 10, n = 5, k = 3, x = 10^3/2 \quad \longrightarrow X = 00500$$

$$b = 2, n = 5, k = 3, x = 2^3/2 \quad \longrightarrow X = 00100$$



- Rappresentazione di  $2^k$ 
  - Il  $(k + 1)$ -esimo bit da destra è 1, gli altri  $k$  bit sono 0

$$b = 2, n = 8, x = 4 = 2^2 \quad \longrightarrow X = 00000100$$

$$b = 2, n = 8, x = 32 = 2^5 \quad \longrightarrow X = 00100000$$

- Rappresentazione di  $x \cdot 2^k$  (e di  $x/2^k$ )
  - La rappresentazione di  $x$  scorre a sinistra (a destra) di  $k$  posizioni

$$b = 2, n = 8, x = 24 = 3 \cdot 2^3 \quad \longrightarrow X = 00011000$$

$$b = 2, n = 8, x = 3 = 24/2^3 \quad \longrightarrow X = 00000011$$

$$b = 2, n = 8, x = 96 = 24 \cdot 2^2 \quad \longrightarrow X = 01100000$$



- Fissata la base  $b$  ed il numero di cifre  $n$ , attraverso il sistema di rappresentazione posizionale si possono rappresentare con stringhe di  $n$  cifre tutti i numeri naturali compresi tra  $0$  e  $b^n - 1$
- Dato un numero  $x \in [0, b^n - 1]$  lo si rappresenta con la stringa  $X = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$  tale che:

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

- Le operazioni aritmetiche non sono *chiuse* nell'intervallo  $[0, b^n - 1]$ 
  - Esempio:  
 $b = 10, n = 3$ , il risultato della addizione  $381 + 722$  *non è rappresentabile* in  $[0, 10^3 - 1]$
  - L'operazione di addizione produce **overflow**
    - cioè il risultato non è rappresentabile





# Rappresentazione di numeri naturali: esempio

- rappresentazione posizionale con  $b = 2$  ed  $n = 4$  dei numeri naturali compresi tra  $0$  e  $15 = 2^4 - 1$

$x$	$X$
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111



- Gli algoritmi che abbiamo imparato a scuola per le operazioni aritmetiche valgono per qualunque sistema di rappresentazione posizionale
- Per  $b = 2$  la tabella della addizione di cifre è:
  - $0 + 0 = 0$
  - $0 + 1 = 1$
  - $1 + 0 = 1$
  - $1 + 1 = 0$  con riporto 1
- Per  $b = 2$  la tabella della sottrazione di cifre è:
  - $0 - 0 = 0$
  - $0 - 1 = 1$  con prestito 1
  - $1 - 0 = 1$
  - $1 - 1 = 0$
- Per  $b = 2$  la tabella della moltiplicazione di cifre è:
  - $0 \cdot 0 = 0$
  - $0 \cdot 1 = 0$
  - $1 \cdot 0 = 0$
  - $1 \cdot 1 = 1$



- Si usa l'algoritmo di addizione "in colonna" ricordando la tabella della addizione di cifre binarie
- Il riporto prodotto dalle cifre più significative indica overflow

$$\begin{array}{r} 6 \\ + 8 \\ \hline 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0110 \\ + 1000 \\ \hline 1110 \end{array}$$

**NO OVERFLOW**

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 12 \\ \hline 17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0101 \\ + 1100 \\ \hline (1)0001 \end{array}$$

**OVERFLOW**