

Corso di Calcolatori Elettronici I

Algebra di Boole: minimizzazione di funzioni booleane

Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II

A.A. 2020-2021





Al fine di valutare la "complessità" di una rappresentazione algebrica di una funzione f , si definiscono le seguenti metriche:

- **Costo di letterali** C_L : somma dei letterali che compaiono nella rappresentazione
- **Costo di funzioni o di porte** C_P : numero di funzioni elementari (and, or, not) che compaiono nella espressione
 - per una realizzazione a porte discrete, equivale al numero complessivo di porte adoperate
- **Costo di ingressi** C_I : numero delle funzioni elementari che compaiono nella rappresentazione, ciascuna moltiplicata per le variabili (dipendenti o indipendenti) di cui è funzione
 - per una realizzazione a porte discrete, equivale al numero complessivo di porte adoperate, ciascuna pesata per il numero di ingressi (*fan-in*)



Esempio 1

$$y_1 = \bar{b} \cdot (\bar{a} + c + d)$$

$$C_L = 4$$

$$C_P = 2$$

$$C_I = 5$$

Esempio 2

$$y_2 = b \cdot c \cdot (a \cdot \bar{d} + \bar{b} + c) + \bar{c} \cdot (d + \bar{a}) \cdot (b + c)$$

$$C_L = 11$$

$$C_P = 7$$

$$C_I = 17$$

Esempio 3

$$Y = A \cdot B + C \cdot (D + E) \quad Y = A \cdot B + C \cdot D + C \cdot E$$

$$C_L = 5$$

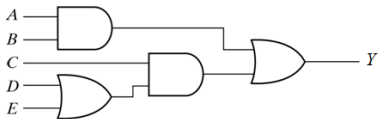
$$C_L = 6$$

$$C_P = 4$$

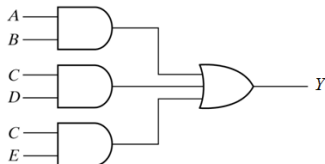
$$C_P = 4$$

$$C_I = 8$$

$$C_I = 9$$



(a) $AB + C(D + E)$



(b) $AB + CD + CE$



- Lo scopo della *minimizzazione* di una funzione booleana è quello di pervenire ad una rappresentazione algebrica che minimizzi i costi di letterali, porte ed ingressi
- Studieremo il problema della minimizzazione ristretto alla ricerca di espressioni algebriche a due livelli del tipo *somma di prodotti*
- Come punto di partenza assumiamo la forma normale di tipo P
- La minimizzazione consiste di due passi consecutivi:
espansione e copertura
- La fase di **espansione** ha lo scopo di trasformare l'espressione algebrica in una somma di clausole con il minor numero di letterali
 - Ciò equivale alla determinazione di tutti i *primi implicanti* della funzione
- La fase di **copertura** consiste nella determinazione del più piccolo sottoinsieme di primi implicanti che sommati rappresentino la funzione
 - E' il cosiddetto problema di *copertura minima*



Una qualunque funzione booleana f può essere espressa come somma di soli primi implicanti (PI)

- in una forma somma-di-prodotti di f , un eventuale implicante non primo A_i può essere sempre eliminato osservando che si può aggiungere ad f un implicante primo A'_i a sua volta implicato da A_i senza alterare la f
- se $f = \sum A_j$ e $A_i \rightarrow A'_i$ si ha che
$$f = (\sum A_j) + A'_i = (\sum_{j \neq i} A_j) + (A_i + A'_i) = (\sum_{j \neq i} A_j) + (A'_i)$$
 - ovvero è possibile sostituire A_i (*non primo*) con A'_i (*primo*)



Il procedimento di espansione consiste nella applicazione sistematica di due proprietà dell'algebra di Boole:

- Consenso tra clausole che si oppongono in un solo letterale
 - $P_1 + P_2 = x \cdot P + \bar{x} \cdot P = (x + \bar{x}) \cdot P = 1 \cdot P = P$
- Idempotenza
 - $P + P = P$

Esempio

$$\begin{aligned} f &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} = \\ &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} = \\ &= xy(z + \bar{z}) + (\bar{x} + x)y\bar{z} = \\ &= xy + y\bar{z} \end{aligned}$$



Espansione: procedimenti sistematici

- Il procedimento di espansione ha come risultato la determinazione di tutti i *primi implicanti* della funzione
- Sulle mappe di Karnaugh i primi implicanti corrispondono ai *sottocubi di area massima*
 - I sottocubi sono raggruppamenti di $1 - 2 - 4 - 8 - \dots$ caselle adiacenti
 - Su una mappa di n variabili, un raggruppamento di 2^ℓ caselle adiacenti rappresenta una clausola di ordine $n - \ell$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

$$PI : xy, y\bar{z}$$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0

$$PI : \bar{x} \bar{y}, xz, \bar{y}z$$

- Per $n > 5$ variabili le mappe di Karnaugh non sono utilizzabili
 - L'espansione si effettua attraverso procedimenti tabellari come il metodo di Quine-McCluskey



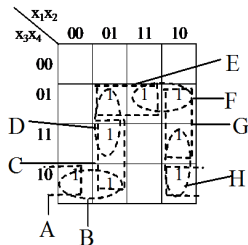
- Un primo implicante di una funzione f si dice *essenziale* se è l'unico ad essere implicato da un mintermine che compare nella forma normale di tipo P di f
- Sulle mappe di Karnaugh, un *primo implicante essenziale* è un sottocubo di area massima che è l'unico a coprire un 1
- Il **nucleo** N è la somma di tutti i primi implicanti essenziali
- In generale, l'espressione somma-di-prodotti di costo minimo di f è esprimibile come

$$f = N + R$$

- La fase di copertura si articola in due sottofasi:
 - determinazione di N
 - determinazione di R



- Una funzione booleana f si dice **ciclica** se nessuno dei suoi primi implicanti è essenziale
 - Sulle mappe di Karnaugh, ogni 1 è coperto da due o più primi implicanti
 - $N = 0$

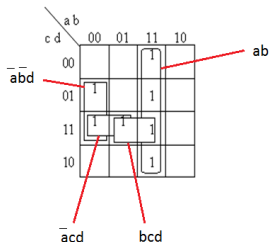




Esempio

- Data la funzione $f(a, b, c, d)$ la cui forma normale di tipo P è

$$f(a, b, c, d) = \sum(P_1, P_3, P_7, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15})$$



- PI: $\{ab, \bar{a}\bar{b}d, \bar{a}cd, bcd\}$
- PI essenziali: $N = ab + \bar{a}\bar{b}d$
- $R = \bar{a}cd$ oppure $R = bcd$

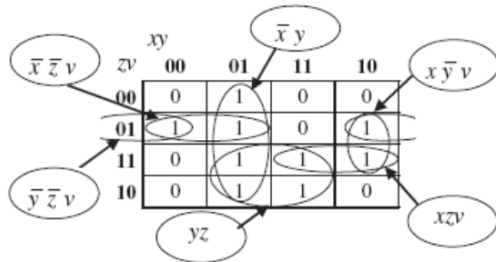
$$f = ab + \bar{a}\bar{b}d + \begin{cases} \bar{a}cd \\ bcd \end{cases}$$

Esempio

- Data la funzione $f(x, y, z, v)$ la cui forma normale di tipo P è

$$f(x, y, z, v) = \sum (P_1, P_4, P_5, P_6, P_7, P_9, P_{11}, P_{14}, P_{15})$$

- dalla mappa di Karnaugh si deduce che i PI di f sono quelli evidenziati sotto



- PI: $\{\bar{x}y, yz, \bar{x}\bar{z}v, \bar{y}\bar{z}v, x\bar{y}v, xzv\}$
- PI essenziali: $N = \bar{x}y + yz$
- per determinare R si utilizzerà la matrice di copertura