Corso di Calcolatori Elettronici

Algebra di Boole: funzioni e forme normali di tipo P ed S

Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II

A.A. 2022-2023

Variabili e funzioni booleane

- Elementi del sostegno dell'algebra K $\rightarrow$ **valori booleani**
- Variabili che possono assumere valori booleani $\rightarrow$ **variabili booleane**
- Funzioni di variabili booleane in K $\rightarrow$ **funzioni booleane**

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

- Le variabili possono essere a loro volta funzioni booleane
- Un insieme F di funzioni sul sostegno di un'algebra si dice **funzionalmente completo** se qualsiasi funzione dell'algebra può essere ottenuta come composizione di funzioni appartenenti ad F

Tabella di verità

- Se il supporto K dell'algebra ha cardinalità finita k, qualsiasi funzione $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ può essere rappresentata mediante una tabella, chiamata **tabella di verità**
- La tabella rappresenta su ogni riga il valore di f in un punto del dominio $(x_1, x_2, ..., x_n)$
- La tabella ha $N = k^n$ righe
  - quante sono le disposizioni con ripetizione di k simboli su n posti
- In ogni punto del dominio, una funzione può assumere uno tra k distinti valori
- Esistono $M = k^N = k^{(k^n)}$ distinte funzioni di n variabili
  - Le funzioni dell'algebra di Boole a due valori ($k = 2$) di $n = 2$ variabili sono $M = 2^{(2^2)} = 2^{(4)} = 16$
- Da ora in avanti considereremo l'algebra di Boole a due valori

a	b	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Un esempio di funzione di 3 variabili

a	b	c	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Rappresentazioni algebriche: forme elementari

- Data una funzione $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ci si pone il problema di trovarne una rappresentazione *algebrica*
- In una rappresentazione algebrica di una funzione $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, diremo *letterali* i simboli che rappresentano il valore di una variabile indipendente x_i od il suo complemento $\overline{x_i}$
  - Esempio: in $y = \overline{a} \cdot b + \overline{b} \cdot c$, $\overline{a}$, b, $\overline{b}$ e c sono letterali
- Una espressione nella forma $y = \sum \gamma_i$ con γ_i prodotto di letterali (o letterale singolo) si dice una *somma di prodotti*
  - Esempio: $y = \overline{a} \cdot b + \overline{b} \cdot c + \overline{c}$
- Una espressione nella forma $y = \prod \sigma_i$ con σ_i somma di letterali (o letterale singolo) si dice un *prodotto di somme*
  - Esempio: in $y = (\overline{a} + \overline{b}) \cdot (b + \overline{c}) \cdot a$
- Le rappresentazioni algebriche del tipo *somma di prodotti* e *prodotto di somme* si dicono *forme elementari*

Mintermini e maxtermini

Nel contesto delle funzioni di n variabili booleane $x_1, x_2, ..., x_n$, diremo:

- **mintermini**: le funzioni che si esprimono come prodotto dei letterali di TUTTE le variabili indipendenti
- **maxtermini**: le funzioni che si esprimono come somma dei letterali di TUTTE le variabili indipendenti
- Esempio: nel contesto delle funzioni di 4 variabili a, b, c e d
  - $a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d$ è un mintermine, mentre $a \cdot \overline{b} \cdot d$ *non* lo è
  - $a + \overline{b} + c + \overline{d}$ è un maxtermine, mentre $a + \overline{b} + \overline{d}$ *non* lo è
- Un mintermine vale 1 se e solo se tutti i letterali che in esso compaiono valgono 1
  - Un mintermine di n variabili ha una tabella di verità con un solo 1 e $2^n - 1$ zero
- Un maxtermine vale 0 se e solo se tutti i letterali che in esso compaiono valgono 0
  - Un maxtermine di n variabili ha una tabella di verità con un solo 0 e $2^n - 1$ uno

Notazione compatta per mintermini

Nel contesto delle funzioni di n variabili booleane $x_1, x_2, ..., x_n$ (avendo stabilito per convenzione un ordine con il quale sono elencate le variabili)

- identificheremo un mintermine con la lettera P e pedice intero corrispondente al numero intero la cui rappresentazione binaria si ottiene costruendo una stringa con 1 al posto delle variabili che compaiono affermate nel mintermine, e 0 per le variabili negate
- Esempio: per 3 variabili (a, b, c)

$$P_0 = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$$
$$P_1 = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c$$
$$P_2 = \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c}$$
$$...$$
$$P_7 = a \cdot b \cdot c$$

Notazione compatta per maxtermini

Nel contesto delle funzioni di n variabili booleane $x_1, x_2, ..., x_n$ (avendo stabilito per convenzione un ordine con il quale sono elencate le variabili)

- identificheremo un maxtermine con la lettera S e pedice intero corrispondente al numero intero la cui rappresentazione binaria si ottiene costruendo una stringa con 0 al posto delle variabili che compaiono affermate nel maxtermine, e 1 per le variabili negate
- Esempio: per 3 variabili (a, b, c)

$$S_0 = a + b + c$$
$$S_1 = a + b + \overline{c}$$
$$S_2 = a + \overline{b} + c$$
$$...$$
$$S_7 = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$$

Proprietà di mintermini e maxtermini

- $P_i = \overline{S_i}, \forall i$
- $S_i = \overline{P_i}, \forall i$
- $P_i \cdot P_j = 0, \forall i \neq j$
- $S_i + S_j = 1, \forall i \neq j$
- $\sum_{i=0}^{2^n-1} P_i = 1$
- $\prod_{i=0}^{2^n-1} S_i = 0$

Forma normale di tipo P

- Premessa: la somma di ℓ mintermini è una funzione la cui tabella di verità ha ℓ uno e $2^n - \ell$ zero
- Assegnata una funzione f di n variabili booleane $x_1, x_2, ..., x_n$, dalla tabella di verità è possibile derivare una particolare espressione algebrica nella forma *somma di prodotti*
  - ciascun 1 della tabella di verità corrisponde ad un mintermine
  - la funzione f si può esprimere come somma dei mintermini corrispondenti ai singoli punti del dominio in cui f vale 1
- L'espressione algebrica che si ottiene in questo modo viene detta *la forma normale di tipo P* o *prima forma canonica* di f

Forma normale di tipo P: procedimento di espansione

- Ci poniamo nel contesto dell'algebra di Boole a due valori: $K = \{0, 1\}$
- Assegnata una funzione f di n variabili booleane $x_1, x_2, ..., x_n$, dalla tabella di verità si ricava il valore α_i di f in ciascun punto del dominio

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = f(0, 0, ..., 0, 0)\\
&\alpha_1 = f(0, 0, ..., 0, 1)\\
&\alpha_2 = f(0, 0, ..., 1, 0)\\
&\alpha_3 = f(0, 0, ..., 1, 1)\\
&...\\
&\alpha_{2^n-1} = f(1, 1, ..., 1, 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n) &= \overline{x_1} \cdot f(0, x_2, ..., x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2, ..., x_n) =\\
&= \overline{x_1} \cdot [\overline{x_2} \cdot f(0, 0, x_3, ..., x_n) + x_2 \cdot f(0, 1, x_3, ..., x_n)] +\\
&+ x_1 \cdot [\overline{x_2} \cdot f(1, 0, x_3, ..., x_n) + x_2 \cdot f(1, 1, x_3, ..., x_n)] = ... =\\
&= f(0, 0, ..., 0) \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot ... \cdot \overline{x_n} + ... + f(1, 1, ..., 1) \cdot x_1 x_2 ... x_n =\\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \cdot P_i
\end{aligned}
$$

Esempio: forma normale di tipo P di una funzione

a	b	c	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$y = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c =$$
$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_7$$

Forma normale di tipo S

- Premessa: il prodotto di ℓ maxtermini è una funzione la cui tabella di verità ha ℓ zero e $2^n - \ell$ uno
- Assegnata una funzione f di n variabili booleane $x_1, x_2, ..., x_n$, dalla tabella di verità è possibile derivare una particolare espressione algebrica nella forma *prodotto di somme*
  - ciascuno 0 della tabella di verità corrisponde ad un maxtermine
  - la funzione f si può esprimere come prodotto dei maxtermini corrispondenti ai singoli punti del dominio in cui f vale 0
- L'espressione algebrica che si ottiene in questo modo viene detta *la forma normale di tipo S* o *seconda forma canonica* di f

Esempio: forma normale di tipo S di una funzione

a	b	c	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$y = (\overline{a} + b + c) \cdot (\overline{a} + b + \overline{c}) \cdot (\overline{a} + \overline{b} + c) = S_4 \cdot S_5 \cdot S_6$$