Corso di Calcolatori Elettronici I

Minimizzazione di funzioni booleane: problema di copertura

Prof. Roberto Canonico

Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
e delle Tecnologie dell'Informazione

Minimizzazione di funzioni booleane

Ci riferiamo al problema di determinare un'espressione algebrica del tipo somma-di-prodotti (forma elementare di tipo P) che rappresenti una data funzione booleana f e minimizzi i costi di porte.

Il procedimento per la soluzione del problema si articola in due fasi:

1) **Espansione**: consiste nella ricerca di tutti gli implicanti primi
   – sulle mappe di Karnaugh gli implicanti primi sono i sottocubi di area massima
2) **Copertura**: consiste nel determinare il sottoinsieme minimo di implicanti primi della funzione in grado di coprire tutti i suoi mintermini
   – questo problema può essere risolto «ad occhio» sulle mappe di Karnaugh
   – oppure può essere risolto con l'ausilio di una matrice di copertura
   – fra gli implicanti primi è possibile estrarre un set di **implicanti primi essenziali**, necessari alla copertura poiché sono gli unici a coprire qualche "uno" della funzione; la copertura ottima conterrà dunque tali implicanti essenziali più un sottoinsieme degli implicanti primi rimanenti, scelti secondo un criterio di costo

Il metodo delle Mappe di Karnaugh - fase di espansione

I mintermini semplificabili sono rappresentati da celle adiacenti sulle mappe: l’ operazione di espansione viene effettuata a partire da ogni mintermine in tutte le direzioni per raggrupparne un numero equivalente a una potenza di 2. Ciascun mintermine può appartenere a più raggruppamenti.

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

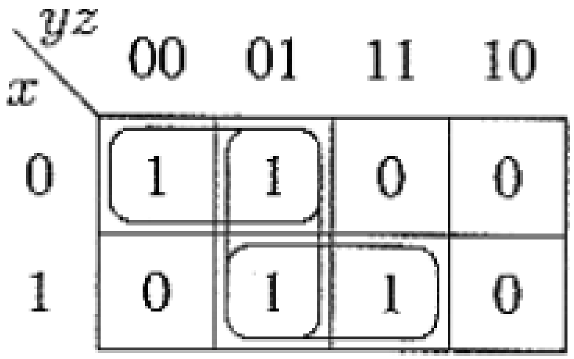
(a)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

(b)

Mappa di Karnaugh della funzione $f(x, y, z) = xyz + xyz' + x'yz'$

Il metodo delle Mappe di Karnaugh- Esempio 1



Considerando tutti gli implicanti primi individuati si ottiene l’espressione:

f(x,y,z)= x’y’+ y’z+ xz

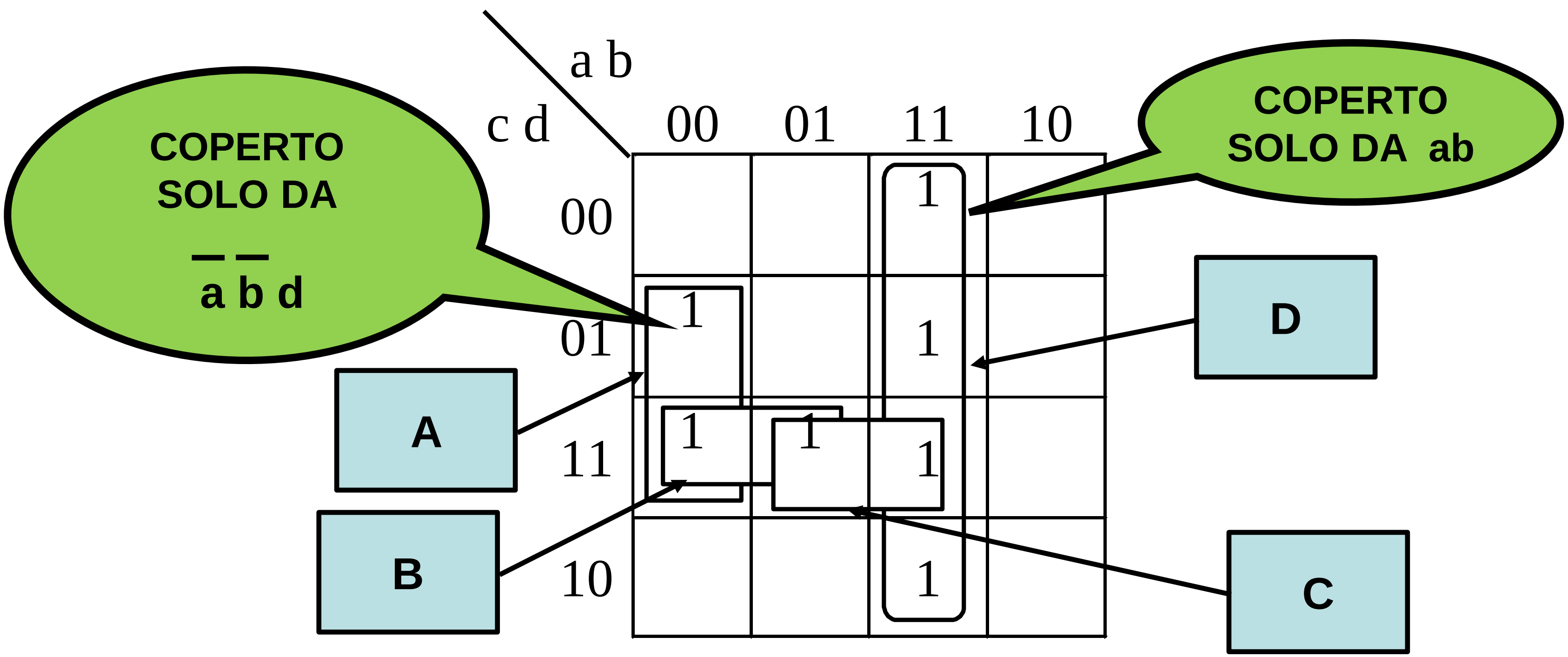
che non risulta minima

Esaminando la mappa si nota che gli implicanti x’y’ e xz sono sufficienti a coprire tutti gli 1 della funzione, mentre l’implicante y’z può essere trascurato. In definitiva quindi:

f(x,y,z)= x’y’+ xz

Il metodo delle Mappe di Karnaugh- Esempio 2

- Sono essenziali gli implicanti primi che **<u>da soli</u>** ricoprono un "1"
- Nell’esempio in figura sono essenziali (a’b’d) ed (ab)
- La somma di questi due PI essenziali non è sufficiente per rappresentare la funzione: occorre aggiungere un altro PI a scelta tra (a’cd) e (bcd)



Matrice di copertura

- La matrice di copertura è una matrice Aij che ha:
  - sulle colonne i mintermini P_j che compaiono nella forma normale di tipo P
  - sulle righe gli implicanti primi PI_i (determinati con la procedura di espansione)
- L'elemento Aij vale 1 s.s.e. $P_j \rightarrow PI_i$, 0 altrimenti
- Si dice che la riga i-esima copre la colonna j-esima se Aij = 1
- Risolvere il problema di copertura rappresentato dalla matrice Aij significa selezionare il minor numero di righe che coprano tutte le colonne della matrice

	abcd	0001	0011	1100	0111	1101	1110	1111
A	00-1	1	1					
B	0-11		1		1			
C	-111				1			1
D	11--			1		1	1	1

Copertura minima

- Un modo generale per definire il problema della copertura è il seguente:
  - data una matrice di N righe e M colonne, i cui elementi siano $a_{ij} = 1$ oppure $a_{ij} = 0$, si dice che una riga i *copre* una colonna j se $a_{ij} = 1$
  - Si selezioni il numero minimo di righe che coprono tutte le colonne
- Il problema della copertura è di interesse generale in molti settori differenti
  - ad esempio, in problemi di testing

Individuazione del nucleo sulla matrice di copertura

- Sulla matrice di copertura sono essenziali i PI che corrispondono alle righe che coprono le colonne con un unico ‘1’
- Nell’esempio N = A + D

		abcd	0001	0011	1100	0111	1101	1110	1111
ESSENZIALE	A	00-1	1	1					
	B	0-11		1		1			
	C	-111				1			1
ESSENZIALE	D	11--			1		1	1	1

Metodi di copertura minima

- Trovare la copertura minima vuol dire trovare la forma minima di R, cioè quegli implicanti che, pur non essendo essenziali, devono essere eventualmente aggiunti al nucleo per trovare una forma che "copra" tutti i mintermini
- Per funzioni di poche variabili, la scelta dei PI di R da aggiungere a quelli essenziali di N può essere fatta direttamente sulla mappe di Karnaugh, valutando ad occhio le varie (poche) alternative possibili
- Un metodo tabellare: righe/colonne dominanti

Righe/Colonne dominanti

- Chiamiamo “***linea***” indifferentemente una riga o una colonna
- Una linea *L* domina la linea *K* se la “include”, ovvero se contiene tutti i suoi 1

La colonna di destra domina quella di sinistra

1	1	0	1	0
0	1	0	1	0

La riga in alto domina l’altra

Righe/Colonne dominanti

- Se si eliminano le **righe dominate** e le colonne **dominanti**, da una matrice di copertura, se ne trae una equivalente
  - che rappresenta, cioè, il medesimo problema di copertura

Matrice di copertura: criteri di dominanza

- La ***riga i domina la riga j*** se l'implicante Pi copre tutti i mintermini che copre l'implicante Pj più almeno uno
  - ✓ i mintermini coperti dall'implicante dominato sono un sottoinsieme dei mintermini coperti dall'implicante dominante: scegliendo di eliminare l'implicante dominato e mantere il dominante avremmo la certezza di coprire un insieme maggiore di mintermini, con un costo totale di copertura di sicuro non maggiore di quello che si avrebbe facendo la scelta opposta
- La ***colonna i domina la colonna j*** se il mintermine mj è coperto da un sottoinsieme degli implicanti che coprono mi
  - ✓ qualsiasi implicante copra mj copre anche mi: scegliendo di eliminare il mintermine mi e mantenere mj avremmo la certezza che gli implicanti selezionati per coprire quest'ultimo coprono anche il primo, con un costo totale di copertura non maggiore di quello che si avrebbe facendo la scelta opposta

Metodo per la determinazione della copertura minima

- Il metodo tabellare per righe/colonne dominanti si siluppa nei seguenti passi:

  1. Si ricercano gli implicanti primi (*PI*) e si individuano quelli essenziali;
  2. Si includono nella forma minima i *PI* essenziali, eliminandoli dalla matrice, unitamente con i mintermini ricoperti;
  3. Si eliminano le righe dominate e le colonne dominanti;
  4. Si individuano i *PI* essenziali “secondari” della matrice così ridotta;
  5. Si ripetono i passi 2, 3, 4 finché è possibile.

Esempio (1/6)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,1,2,8,9,15,17,21,24,25,27,28,31) =$$

$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} + \ldots\ldots$$

Esempio (2/6)

Implicanti	Mintermini coperti
A = -100-	8,9,24,25
B = --001	1,9,17,25
C = 0-00-	0,1,8,9
D = 11-11	27,31
E = -1111	15,31
F = 110-1	25,27
G = 10-01	17,21
H = 11-00	24,28
J = 000-0	0,2

Esempio (3/6)

	P_0	P_1	P_2	P_8	P_9	P_{15}	P_{17}	P_{21}	P_{24}	P_{25}	P_{27}	P_{28}	P_{31}
A				1	1				1	1			
B		1			1		1			1			
C	1	1		1	1								
D											1		1
E						1							1
F										1	1		
G							1	1					
H									1			1	
J	1		1										

Primi implicanti essenziali: N (nucleo) = J, E, G, H

Esempio (4/6)

	P_0	P_1	P_2	P_8	P_9	P_{15}	P_{17}	P_{21}	P_{24}	P_{25}	P_{27}	P_{28}	P_{31}
A				1	1				1	1			
B		1			1		1			1			
C	1	1		1	1								
D											1		1
E						1							1
F										1	1		
G							1	1					
H									1			1	
J	1		1										

Gli implicanti primi essenziali J,E,G,H
coprono i mintermini: 0, 2, 15, 17, 21, 24, 28, 31

Esempio (5/6)

	P_1	P_8	P_9	P_{25}	P_{27}
A		1	1	1	
B	1		1	1	
C	1	1	1		
D					1
F				1	1

	P_1	P_8	P_{25}	P_{27}
A		1	1	
B	1		1	
C	1	1		
F			1	1

	P_1	P_8
A		1
B	1	
C	1	1

riga D dominata dalla F

Colonna P_9 dominante

F implicante primo essenziale secondario: copre P_{25} e P_{27}

Righe A e B dominate dalla **C**

Esempio (6/6)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,1,2,8,9,15,17,21,24,25,27,28,31) =$$

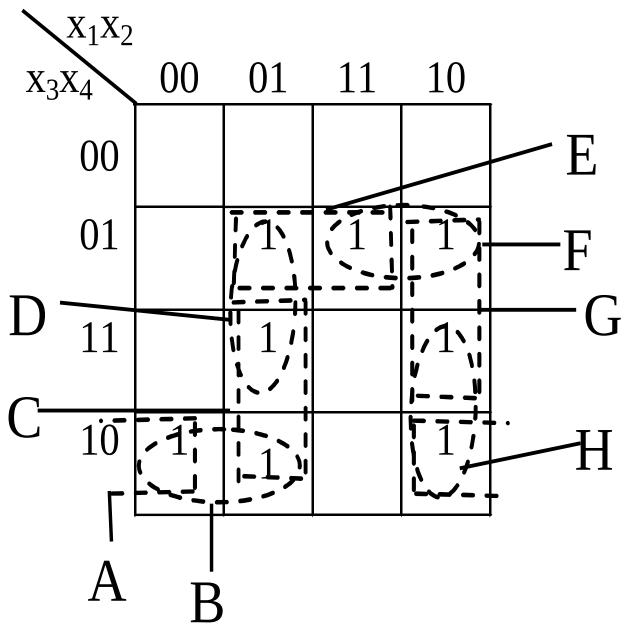
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} + \ldots\ldots =$$

$$= E + G + H + J + F + C =$$

$$= x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4} x_5 + x_1 x_2 \overline{x_4}\,\overline{x_5} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_5}$$

$$+ x_1 x_2 \overline{x_3} x_5 + \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$$

Un altro esempio: funzione ciclica



	P_3	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{13}	P_{14}
A				**1**		**1**		
B				**1**	**1**			
C					**1**		**1**	
D	**1**						**1**	
E	**1**		**1**					
F		**1**	**1**					
G		**1**						**1**
H						**1**		**1**

- Il metodo delle righe e colonne dominanti non aiuta
- Si sceglie a caso un PI e gli altri vengono scelti di conseguenza
- Due coperture equivalenti: A+C+E+G oppure B+D+F+H

Matrice di copertura: ESEMPIO (1/2)

	m1	m4	m5	m6	m7	m9	m11	m14	m15
A	X		X						
B	X					X			
C						X	X		
D							X		X
E		X	X	X	X				
F				X	X			X	X

Il mintermine m4 risulta coperto solo da E e il mintermine m14 solo da F:

E ed F pertanto sono implicanti essenziali e possono essere cancellati dalla tabella insieme a tutti i mintermini che coprono.

C(F)= {E,F}

Matrice di copertura: ESEMPIO (2/2)

	m1	m9	m11
~~A~~	~~X~~		
B	X	X	
C		X	X
~~D~~			~~X~~

Nella tabella risultante ogni mintermine è coperto almeno da due implicanti: non ci sono più implicanti essenziali e si può procedere col metodo della dominanza:

La riga C domina la riga D e la B domina la A: cancello le righe A e D.

	m1	m9	m11
B	X	X	
C		X	X

A questo punto B e C coprono mintermini non coperti da altri implicanti: essi sono allora etichettati come **implicanti essenziali *secondari*** e aggiunti alla **copertura minima di f**:

C(F)= {E,F,B,C}