

# Calcolo delle Probabilità

(aa 2001/2002)

## 1. Fondamenti

Cenni storici. Cenni alle passeggiate aleatorie. Lancio di una moneta equa: il problema del ritorno all'origine. Esperimenti casuali. Spazio campione  $\Omega$ . Algebra di eventi. Frequenza empirica e probabilità. Probabilità a priori. Probabilità soggettiva. Interpretazione geometrica della probabilità. Spazio campione di Bernoulli. Algebre e  $\sigma$ -algebre su  $\Omega$ . Spazio di probabilità. Teoria assiomatica della probabilità. Teoremi principali. Indipendenza di eventi. Probabilità condizionata. Teorema delle alternative. Formula di inclusione-esclusione. Successioni di eventi. Limiti di successioni di eventi. Teorema di equivalenza. Teorema di Bayes. Lemma di Borel-Cantelli. Legge 0-1. Modelli di occupazione: statistiche di Fermi-Dirac, Bose-Einstein, Maxwell-Boltzmann.

## 2. Variabili casuali in $\mathbb{R}_1$

Definizione di variabile casuale. Funzione di distribuzione e relativi teoremi. Variabili casuali discrete. Distribuzione di probabilità. Variabili casuali assolutamente continue. Densità di probabilità. Funzione di variabile casuale. Calcolo della funzione di distribuzione e della densità di probabilità per funzioni di variabile casuale. Valore medie di variabili casuali e di funzioni di variabili casuali. Momenti intorno all'origine. Momenti centrali. Relazione tra momenti centrali e momenti intorno all'origine. Mediana. Varianza e sua interpretazione. Variabili casuali standardizzate. Disuguaglianza di Chebyshev. Variabili casuali discrete: uniforme, di Bernoulli, binomiale, di Pascal, geometrica, binomiale negativa, ipergeometrica, di Poisson. Distribuzione di Poisson come limite della distribuzione binomiale. Variabili casuali assolutamente continue: uniforme, normale, gamma, esponenziale, chi-quadrato, di Cauchy. Distribuzione normale come limite della distribuzione binomiale. Funzione generatrice di probabilità e sua applicazione al processo di Poisson. Funzione generatrice dei momenti.

## 3. Variabili casuali in $\mathbb{R}_n$

Funzioni di distribuzione e densità di probabilità multidimensionali. Distribuzioni e densità di probabilità marginali. Distribuzione multinomiale. Momenti di variabili casuali  $n$ -dimensionali. Momenti prodotto. Indipendenza di variabili casuali. Covarianza e correlazione. Coefficiente di correlazione e relative proprietà. Disuguaglianza di Schwarz. Legge della varianza. Densità di probabilità di variabili casuali somma, differenza, prodotto e rapporto.

## 4. Funzione caratteristica

Definizione e principali proprietà. Relazione con i momenti di variabili casuali. Cenni alle formule di inversione. Funzione caratteristica della somma di variabili casuali indipendenti.

## 5. Condizionamento nel continuo

Funzioni di distribuzione e densità di probabilità condizionate. Momenti condizionati. Media della somma di un numero aleatorio di variabili.

### **6. Convergenza di variabili casuali**

Teorema di Bernoulli. Convergenze in probabilità e in distribuzione. Legge debole dei grandi numeri. Teorema centrale del limite e sue applicazioni.

### **7. Generalità sui processi stocastici**

Definizione di processo stocastico. Spazio degli stati. Classificazione dei processi stocastici. Il problema della descrizione di un processo stocastico. Processi di Markov. Densità di probabilità di transizione. Equazione di Smolukowski. Momenti infinitesimali. Sviluppi forward e backward dell'equazione di Smolukowski. Teorema di Pawula.

### **8. Passeggiate aleatorie**

Passeggiata aleatoria semplice. Calcolo delle probabilità di transizione per passeggiate libere. Comportamento asintotico di passeggiate aleatorie. Passeggiate aleatorie in presenza di coppie di barriere assorbenti. Caso di un'unica barriera assorbente.

### **9. Processi stocastici di diffusione**

Cenni alla scoperta del moto browniano. Generalità sui processi di diffusione. Il processo di Wiener. Il processo di Wiener con drift. Il processo di Ornstein-Uhlenbeck. Calcolo delle densità di transizione per i processi di Wiener e di Ornstein-Uhlenbeck.

**N.B. La prova d'esame include prioritariamente la verifica della capacità di risoluzione di esercizi.**

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI (ad esclusivo titolo indicativo)

1. Gnedenko B. (1979) Teoria della Probabilità. Editori Riuniti.
2. Baclawski K., Cerasoli M. e Rota G.-C. (1990) Introduzione alla Probabilità. Unione Matematica Italiana, II Edizione.
3. Ricciardi L.M. Appunti dalle lezioni.
4. Ricciardi L.M. e Rinaldi S. (1994) Esercizi di Calcolo delle Probabilità. Liguori Editore.