

Calcolo delle Probabilità
(Anno Accademico 1999-2000)
Prof. L.M. Ricciardi

1. Fondamenti

Cenni storici. Cenni alle passeggiate aleatorie. Lancio di una moneta equa: il problema del ritorno all'origine. Esperimenti casuali. Spazio campione Ω . Algebra di eventi. Frequenza empirica e probabilità. Probabilità a priori. Interpretazione geometrica della probabilità. Spazio campione di Bernoulli. Algebre e σ -algebre su Ω . Spazio di probabilità. Teoria assiomatica della probabilità. Teoremi principali. Indipendenza di eventi. Probabilità condizionata. Teorema delle alternative. Formula di inclusione-esclusione. Successioni di eventi. Limiti di successioni di eventi. Teorema di equivalenza. Teorema di Bayes. Lemma di Borel-Cantelli. Legge 0-1. Modelli di occupazione: statistiche di Fermi-Dirac, Bose-Einstein, Maxwell-Boltzmann. Test dei run e calcolo della relativa distribuzione.

2. Variabili casuali in \mathbf{R}^1

Definizione di variabile casuale. Funzione di distribuzione e relativi teoremi. Variabili casuali discrete. Distribuzione di probabilità. Variabili casuali assolutamente continue. Densità di probabilità. Funzione di variabile casuale. Calcolo della funzione di distribuzione e della densità di probabilità per funzioni di variabile casuale. Aspettazione di una variabile casuale. Aspettazione di funzione di variabile casuale. Momenti intorno all'origine. Momenti centrali. Relazione tra momenti centrali e momenti intorno all'origine. Moda e mediana. Varianza e sua interpretazione. Variabili casuali standard. Disuguaglianza di Chebyshev. Variabili casuali discrete: uniforme, di Bernoulli, binomiale, di Pascal, geometrica, binomiale negativa, ipergeometrica, di Poisson. Distribuzione di Poisson come limite della distribuzione binomiale. Variabili casuali assolutamente continue: uniforme, normale, gamma, esponenziale, chi-quadrato, di Cauchy. Distribuzione normale come limite della distribuzione binomiale. Dimostrazione probabilistica della formula di Stirling. Funzione generatrice di probabilità e sua applicazione al processo di Poisson. Funzione generatrice dei momenti.

3. Variabili casuali in \mathbf{R}^n

Funzioni di distribuzione e densità di probabilità multidimensionali. Distribuzioni e densità di probabilità marginali. Distribuzioni multinomiale e ipergeometrica. Momenti di variabili casuali n -dimensionali. Momenti prodotto. Indipendenza di variabili casuali. Covarianza e correlazione. Coefficiente di correlazione e relative proprietà. Disuguaglianza di Schwarz. Legge della varianza. Densità di probabilità di variabili casuali somma, differenza, prodotto e rapporto.

4. Funzione caratteristica

Definizione di funzione caratteristica. Funzione caratteristica e momenti. Cenno alle formule di inversione. Funzione caratteristica della somma di variabili casuali indipendenti.

(continua)

5. Variabili casuali condizionate

Funzioni di distribuzione e densità di probabilità condizionate. Momenti condizionati.

6. Convergenza di variabili casuali

Teorema di Bernoulli. Convergenze in probabilità e in distribuzione. Legge debole dei grandi numeri. Teorema centrale del limite e sue applicazioni.

7. Generalità sui processi stocastici

Definizione di processo stocastico. Spazio degli stati. Classificazione dei processi stocastici. Il problema della descrizione di un processo stocastico. Processi di Markov. Densità di probabilità di transizione. Equazione di Smolukowski. Momenti infinitesimali. Sviluppi forward e backward dell'equazione di Smolukowski. Teorema di Pawula.

8. Passeggiate aleatorie

Passeggiata aleatoria semplice. Calcolo delle probabilità di transizione per passeggiate libere. Comportamento asintotico di passeggiate aleatorie.

9. Processi di diffusione

Generalità. Il processo di Wiener senza drift. Il processo di Wiener con drift. Il processo di Ornstein-Uhlenbeck. Calcolo delle densità di transizione per i processi di Wiener e di Ornstein-Uhlenbeck.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI (ad esclusivo titolo indicativo)

1. Appunti dalle lezioni.
2. Ricciardi L.M. e Rinaldi S. (1994) *Esercizi di Calcolo delle Probabilità*. Liguori Editore.