
University of Naples Federico II - Italy

Department of Structural Engineering

Geometria della Deformazione

Giovanni Romano

June 11, 2012

Contenuti

1	Geometria della Deformazione	1
1.1	Premessa	1
1.2	Cinematica e deformazione	3
1.3	Tensore metrico e matrice di Gram	7
1.4	Spinta inversa del tensore metrico	10
1.5	Tensore di deformazione	10
1.6	Tensore velocità di distorsione	11
1.6.1	Matrici rappresentative	14
1.6.2	Velocità di espansione volumetrica	15

Capitolo 1

Geometria della Deformazione

1.1 Premessa

La *Meccanica del Continuo* è la scienza che studia il moto di un corpo continuo nello spazio ambiente affine tridimensionale, detto di **EUKLIDES** di **ALEXANDRIA**, e la descrizione delle proprietà meccaniche del materiale costituente.

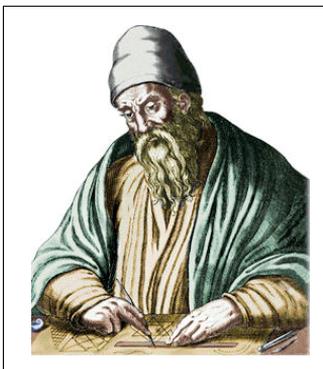


Figure 1.1: Euklides di Alexandria (circa 300 AC)

Alla base dello studio vi è la nozione di campo di *deformazione* (o *distorsione*) e la relativa modellazione matematica.

Gli elementi geometrici che intervengono nell'indagine sono gli spazi tangenti nei punti della varietà costituente il piazzamento del corpo in un dato istante, ed i *simplessi* ed i *parallelepipedi* disegnati in tali spazi lineari nonché i *tensori* definiti su di essi.

La varietà è mono, bi o tridimensionale nei modelli strutturali di *filo*, *membrana*, *palla*. L'indagine geometrica si estende naturalmente ad uno *spazio ambiente* affine di dimensione m ed a corpi continui modellati da varietà di dimensione $n \leq m$ immersi nello spazio ambiente.

Un *simpletso* in uno spazio lineare tangente di dimensione n è l'inviluppo convesso di $n+1$ punti dello spazio. Gli spigoli sono $C_{n+1,2} = (n+1)n/2$, pari al numero di combinazioni di vertici, a due a due. In termini di vettori tangenti un *simpletso* non-degenere, cioè avente volume non nullo, è generato da una base di vettori dello spazio tangente e dalle differenze di coppie non ordinate di vettori della base.

Per $n = 1$ un simpletso è un segmento, per $n = 2$ un triangolo e per $n = 3$ un tetraedro.

Un *tensore covariante* (COV) di ordine k è una funzione a valori reali definita su k -uple ordinate di vettori dello spazio *tangente* n -dimensionale, separatamente lineare in ciascun argomento.

Un tensore covariante di ordine 1 è detto un *covettore* e lo spazio dei covettori definiti su uno spazio tangente è detto spazio *cotangente*.

Un tensore di ordine 1 sullo spazio cotangente può essere identificato con un vettore.

Un tensore di ordine k sullo spazio cotangente è detto *controvariante* (CON).

Un *k-covettore* è un tensore covariante di ordine k che è una funzione alterante dei suoi argomenti, e cioè tale che ogni scambio tra vettori della k -upla trasforma il valore del tensore nell'opposto.

Lo spazio lineare dei k -covettori ha dimensione pari al numero di combinazioni $C_{n,k} = n!/((n-k)!k!)$ di n elementi su k posti.

In uno spazio lineare di dimensione n i covettori di ordine $(n+1)$ sono identicamente nulli ed i covettori di ordine massimo (n) costituiscono uno spazio monodimensionale.

Il volume (con segno) di un parallelepipedo orientato è il valore del covettore di ordine massimo assunto quale misura di volume, calcolato sulla base ordinata generatrice del parallelepipedo.

Un tensore due volte covariante può essere identificato con un operatore lineare dallo spazio tangente a quello cotangente. Se il tensore due volte covariante è non degenere il corrispondente operatore lineare è invertibile ed instaura pertanto un isomorfismo tra gli spazi tangente e cotangente.

Un tensore due volte controvariante può essere identificato con un operatore lineare dallo spazio cotangente a quello tangente.

Un tensore misto (una volta covariante ed una volta controvariante) può essere identificato con un operatore lineare dallo spazio tangente in se stesso.

1.2 Cinematica e deformazione

La seguente definizione geometrica, formulata in termini globali, ben si presta a descrivere il fenomeno fisico della deformazione, indipendentemente dalla dimensione del modello di corpo continuo considerato.

Definizione 1.2.1 (Spostamenti isometrici) *Si considerino due piazzamenti di un corpo continuo nello spazio ambiente. Se la lunghezza di una qualsiasi linea tracciata nel corpo rimane invariata, a seguito dello spostamento da un piazzamento all'altro, si dice che il corpo non si è deformato, ovvero che ha subito uno spostamento isometrico.*

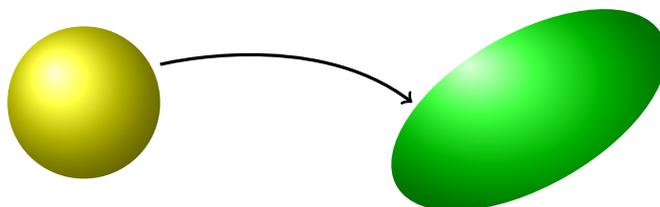


Figure 1.2: Spostamento con distorsione.

Tale definizione si adatta perfettamente a fornire un criterio teorico per stabilire se lo spostamento di un corpo continuo mono, bi, tridimensionale, o di dimensione $n \leq m$, sia o meno isometrico.

E' proprio la peculiare applicabilità di tale definizione ad un qualsiasi modello continuo, mono, bi o tridimensionale che la rende preferibile alla classica definizione espressa dall'invarianza della distanza tra due punti qualsiasi a seguito dello spostamento, definizione questa valida solo per continui tridimensionali.

Si prendano infatti in considerazione corpi continui mono e bi-dimensionali, modelli meccanici di un filo ed di una membrana. Allora un filo può essere avvolto attorno ad un rocchetto senza subire deformazione. Analogamente una membrana piatta, che viene arrotolata attorno ad un cilindro, non subisce deformazione. In entrambi i casi le distanze tra punti distinti possono cambiare notevolmente ed anche annullarsi.

Il criterio, così come formulato nella definizione, richiede però un insieme sovrabbondante di controlli di misure di lunghezza e risulta impraticabile nelle applicazioni.

E' pertanto conveniente sostituire il criterio della invarianza della lunghezza di una qualsiasi linea tracciata nel corpo con quello nel quale viene richiesto solo il controllo, punto per punto, delle lunghezze degli spigoli di un simpleso non degenere disegnato nello spazio tangente al corpo nel punto considerato.

Il fatto poi che la conoscenza delle lunghezze degli spigoli di un particolare simpleso comporti la conoscenza della lunghezza di ogni vettore tangente, è conseguenza della validità della regola del parallelogramma, generalizzazione questa del teorema di **PYTHAGORAS** di **SAMOS**.

La dimostrazione di questo notevole risultato, fornito dal Teorema 1.2.1, è dovuto a matematici e fisici teorici illustri quali **MAURICE FRÈCHET**, **JOHN VON NEUMANN**, **PASCUAL JORDAN**.

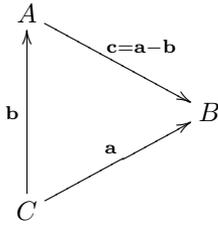
Esso consente di introdurre, in uno spazio lineare, a partire dagli assiomi definatori della norma di un vettore tangente e sotto la condizione della validità della regola del parallelogramma, la nozione di tensore metrico, caratterizzato dall'essere un tensore due volte covariante, simmetrico e con forma quadratica associata definita positiva.

In altri termini il teorema stabilisce che uno spazio lineare normato, in cui la norma (o lunghezza) soddisfi la regola del parallelogramma, è uno spazio pre-**HILBERT**, cioè uno spazio lineare dotato di tensore metrico.

Se lo spazio è di dimensione finita, esso sarà anche completo (cioè il limite di ogni successione di **CAUCHY** converge ad vettore dello spazio) e pertanto è uno spazio di **DAVID HILBERT**.

Ma il risultato è di fondamentale importanza nelle applicazioni e nelle sperimentazioni in quanto consente di valutare la deformazione puntuale, descritta in modo completo e conveniente dal tensore di deformazione, a partire da semplici misure di lunghezze o di dilatazioni relative agli spigoli di un simpleso non degenere. Dal Teorema segue peraltro anche la basilare conclusione che la determinazione del tensore di deformazione è invariante al mutare del simpleso di cui si misurano le lunghezze gli spigoli.

Teorema 1.2.1 (Norma e tensore metrico) Sia V uno spazio lineare con norma $\|\cdot\| : V \mapsto \mathcal{R}$, caratterizzata, per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, dalle proprietà



$$\|\mathbf{a}\| \geq 0,$$

$$\|\mathbf{a}\| = 0 \implies \mathbf{a} = 0,$$

$$\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{c}\|, \quad \text{diseguaglianza triangolare,}$$

$$\|\alpha \mathbf{a}\| = |\alpha| \|\mathbf{a}\|.$$

Allora la funzione $\mathbf{g} : V \times V \mapsto \mathcal{R}$ definita dalla formula di polarizzazione:

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{1}{4} [\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2],$$

è bilineare, e cioè tale che, per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ ed ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{h} \in V$:

$$\mathbf{g}(\alpha \mathbf{a}, \beta \mathbf{b}) = \alpha \beta \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

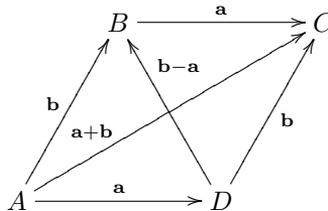
$$\mathbf{g}(\mathbf{a} + \mathbf{h}, \mathbf{b}) = \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathbf{g}(\mathbf{h}, \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{h}) = \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{h}),$$

se e solo se è soddisfatta la regola del parallelogramma che, per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, si scrive:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2 [\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2].$$

La regola stabilisce quindi che, in un qualsiasi parallelogramma:



la somma dei quadrati delle lunghezze delle diagonali sia uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei lati.

La funzione $\mathbf{g} : V \times V \mapsto \mathcal{R}$, definita dalla formula di polarizzazione, è un tensore metrico, in quanto tensore due volte covariante (avente cioè per argomento una coppia ordinata di vettori) del quale è immediato verificare le proprietà di simmetria e di definizione positiva della forma quadratica associata:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \mathbf{g}(\mathbf{b}, \mathbf{a}), \\ \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0, \\ \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \end{cases} &\implies \mathbf{a} = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Dim. Essendo $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{a})$, la dimostrazione che la norma indotta da un tensore metrico soddisfa la regola del parallelogramma consiste in una semplice verifica, condotta sviluppando per bilinearità.

Viceversa, se vale la regola del parallelogramma, si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathbf{g}(\mathbf{h}, \mathbf{b}) &= 4^{-1} [\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{h} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{h} - \mathbf{b}\|^2] \\ &= 2^{-1} \left[\left\| \frac{\mathbf{a} + \mathbf{h}}{2} + \mathbf{b} \right\|^2 + \left\| \frac{\mathbf{a} + \mathbf{h}}{2} - \mathbf{b} \right\|^2 \right] \\ &= 2 \mathbf{g}\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{h}}{2}, \mathbf{b}\right). \end{aligned}$$

Dalla formula di polarizzazione segue inoltre che: $\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{o}) = 0$. Pertanto, ponendo $\mathbf{h} = \mathbf{o}$ nella formula precedente, si deduce che

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2 \mathbf{g}\left(\frac{\mathbf{a}}{2}, \mathbf{b}\right),$$

e quindi che vale la proprietà di additività:

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathbf{g}(\mathbf{h}, \mathbf{b}) = \mathbf{g}(\mathbf{a} + \mathbf{h}, \mathbf{b}).$$

Dalla formula di polarizzazione segue anche che:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{a}, -\mathbf{b}) &= -\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ \mathbf{g}(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= -\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

La proprietà di omogeneità: $\mathbf{g}(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sussiste allora per ogni numero razionale della forma $\alpha = 2^{-n} m$, con $n, m \in \mathbb{Z}$ interi. D'altro canto, la continuità in α di $\|\alpha \mathbf{a} + \mathbf{h}\|$ e di $\|\alpha \mathbf{a} - \mathbf{h}\|$ implica la continuità di $\mathbf{g}(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b})$, così che la formula $\mathbf{g}(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sussiste per ogni reale. ■

Dal Teorema 1.2.1 si deducono le seguenti espressioni equivalenti del tensore metrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= \frac{1}{4} [\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2] \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2. \end{aligned}$$

L'ultima espressione fornisce, in modo diretto, il prodotto interno di due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, note che siano le lunghezze dei lati del triangolo ABC . Da tale risultato si deduce immediatamente il teorema di **PYTHAGORAS** che consiste nell'affermare che $\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$ se e solo se $\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

1.3 Tensore metrico e matrice di Gram

Si denoti con $\varphi_{\tau,t} \in C^2(\Omega_t, \Omega_\tau)$ lo *spostamento materiale* nello spazio affine m -dimensionale di un corpo n -dimensionale, con $n \leq m$, dal piazzamento all'istante $t \in I$ a quello all'istante $\tau \in I$, avendo indicato con I lo spazio affine monodimensionale degli istanti temporali.

Lo spostamento materiale $\varphi_{\tau,t} \in C^2(\Omega_t, \Omega_\tau)$ è assunto essere un diffeomorfismo tra le varietà Ω_t e Ω_τ e cioè una mappa invertibile e dotata di mappa tangente (o *differenziale*) continua $T\varphi_{\tau,t} \in C^0(\mathbb{T}\Omega_t, \mathbb{T}\Omega_\tau)$ che, in ogni punto $\mathbf{x} \in \Omega_t$, è lineare ed invertibile: $T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \in L(\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t, \mathbb{T}_{\varphi_{\tau,t}(\mathbf{x})}\Omega_\tau)$.

Dunque l'ipotesi di base è che lo spostamento trasformi i vettori tangenti nel punto $\mathbf{x} \in \Omega_t$ in vettori tangenti nel punto $\varphi_{\tau,t}(\mathbf{x}) \in \Omega_\tau$ con una legge di trasformazione di tipo lineare e biunivoca.

In un modello continuo di dimensione $\dim \Omega_t = n$, un simpleso, tracciato in uno spazio tangente al corpo, ha $(n+1)n/2$ spigoli la cui lunghezza è determinata una volta che siano noti i prodotti interni tra n vettori tangenti in $\mathbf{x} \in \Omega_t$, linearmente indipendenti.

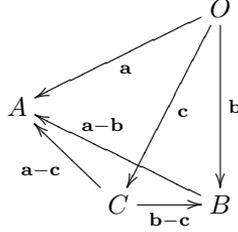
Per mostrarlo, si orientino gli n spigoli, concorrenti in un vertice del simpleso, nel verso uscente dal vertice e siano $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

I vettori, ottenuti come differenza delle combinazioni di questi a due a due, sono in numero di $C_{n,2} = n(n-1)/2$ e possono essere posti eguali alle differenze $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ con $i, j = 1, \dots, n$ ed $i > j$.

Il numero totale di vettori è pari a:

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Di seguito è fornita una rappresentazione schematica per $n = 3$, cui corrisponde $(n + 1)n/2 = 6$:



Sia $\mathbf{i}_{\varphi,t} \in C^1(\Omega_t; \mathcal{S})$ l'immersione iniettiva del corpo n -dimensionale nello spazio m -dimensionale, con $n \leq m$.

Il campo di tensori metrici (due volte covarianti):

$$\mathbf{g}_{\varphi,t} \in C^1(\Omega_t; \text{Cov}(\mathbb{T}\Omega_t)),$$

sul fibrato tangente $\mathbb{T}\Omega_t$, basato sul piazzamento Ω_t del corpo, è definito quale spinta inversa, secondo l'immersione del corpo, del campo di tensori metrici $\mathbf{g} \in C^1(\mathcal{S}, \text{Cov}(\mathbb{T}\mathcal{S}))$ dello spazio di **EUKLIDES** \mathcal{S} :

$$\mathbf{g}_{\varphi,t} := \mathbf{i}_{\varphi,t} \downarrow \mathbf{g},$$

ed esplicitamente

$$\mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(T_{\mathbf{x}}\mathbf{i}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{a}, T_{\mathbf{x}}\mathbf{i}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{b})_{\mathbf{i}_{\varphi,t}(\mathbf{x})}.$$

La non-singularità della spinta inversa del tensore metrico si deduce dalla iniettività del differenziale $T_{\mathbf{x}}\mathbf{i}_{\varphi,t} \in L(\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t, \mathbb{T}_{\mathbf{i}_{\varphi,t}(\mathbf{x})}\mathcal{S})$.

Si noti esplicitamente che i vettori tangenti materiali $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t$ appartengono allo spazio n -dimensionale $\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t$, mentre le corrispondenti immersioni spaziali appartengono allo spazio m -dimensionale $\mathbb{T}_{\mathbf{i}_{\varphi,t}(\mathbf{x})}\mathcal{S}$.

Note le $C_{n,2} = (n + 1)n/2$ lunghezze degli spigoli del semplice in $\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_i\|, & \quad i = 1, \dots, n, \\ \|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\|, & \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i > j, \end{aligned}$$

i prodotti scalari di coppie di vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, con il secondo indice non maggiore del primo, sono anch'essi in numero di $C_{n,2} = (n + 1)n/2$. Essi sono valutabili mediante la formula:

$$\mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \frac{1}{2} [\|\mathbf{e}_i\|^2 + \|\mathbf{e}_j\|^2 - \|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\|^2],$$

e forniscono gli elementi della matrice simmetrica di ordine n , detta di **JØRGEN PEDERSEN GRAM**, della base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$:

$$\text{GRAM}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) := \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$$

Per ogni coppia di vettori tangenti in $\mathbf{x} \in \Omega_t$, $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = b^j \mathbf{e}_j$, il prodotto interno è allora noto per bilinearità:

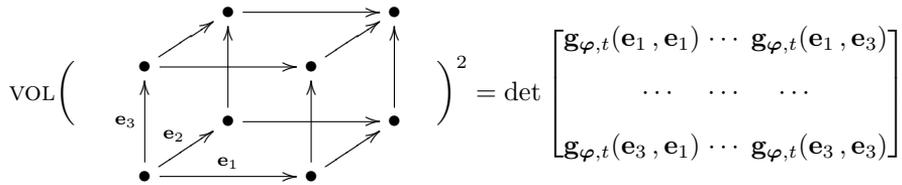
$$\mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^i b^j \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j),$$

e pertanto nota è anche la lunghezza di ogni vettore $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ tangente in $\mathbf{x} \in \Omega_t$:

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a^i a^j \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

La matrice di **GRAM** è dunque definita positiva.

Teorema 1.3.1 *Il determinante della matrice di **GRAM** è pari al quadrato del volume del parallelepipedo di spigoli $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, come mostrato dallo schema per $n = 3$:*



The diagram shows a 3D parallelepiped with vertices marked by black dots. Three vectors, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , and \mathbf{e}_3 , originate from the bottom-left vertex and extend to the other three vertices. The volume of this parallelepiped is denoted as VOL . To the right of the diagram, the equation states that the square of the volume is equal to the determinant of the Gram matrix formed by the inner products of the vectors $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

$$\text{VOL} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right)^2 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{bmatrix}$$

e si scrive: $\text{VOL}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2 = \det \text{GRAM}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Dim. Si considerino due basi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ e la matrice di **A. HAAR** definita da:

$$\text{HAAR}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) := \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_1) & \cdots & \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_n, \mathbf{a}_1) & \cdots & \mathbf{g}_{\varphi,t}(\mathbf{e}_n, \mathbf{a}_n) \end{bmatrix}$$

così che:

$$\text{HAAR}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \text{GRAM}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Essendo il determinante una funzione multilineare ed alternante delle righe e delle colonne, ed essendo i covettori di ordine massimo proporzionali ad uno non nullo, normalizzando il covettore $\boldsymbol{\mu}_x$ di ordine n in modo tale che fornisca il volume compatibile con la metrica in $\mathbb{T}_x\boldsymbol{\Omega}_t$, si ottiene:

$$\det \text{HAAR}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Se le basi coincidono si perviene al risultato. ■

1.4 Spinta inversa del tensore metrico

Effettuando la misura delle lunghezze dei lati del semplice nello spazio tangente nel punto $\varphi_{\tau,t}(\mathbf{x}) \in \boldsymbol{\Omega}_\tau$, a spostamento avvenuto, si determina in modo analogo la matrice di **GRAM** relativa alla base costituita dai vettori $\{T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1, \dots, T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n\}$ trasformati per spinta di quelli della base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\varphi,\tau}(T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1, T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{g}_{\varphi,\tau}(T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1, T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{g}_{\varphi,\tau}(T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n, T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{g}_{\varphi,\tau}(T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n, T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$$

E' allora conveniente considerare il tensore metrico $(\varphi_{\tau,t} \downarrow \mathbf{g}_{\varphi,\tau})_x$ in $\mathbb{T}_x\boldsymbol{\Omega}_t$, ottenuto dal tensore metrico $\mathbf{g}_{\varphi,\tau}$ in $\mathbb{T}_{\varphi_{\tau,t}(\mathbf{x})}\boldsymbol{\Omega}_\tau$ per spinta inversa secondo lo spostamento $\varphi_{\tau,t} \in C^2(\boldsymbol{\Omega}_t, \boldsymbol{\Omega}_\tau)$:

$$(\varphi_{\tau,t} \downarrow \mathbf{g}_{\varphi,\tau})_x(\mathbf{a}_{\varphi,t}, \mathbf{b}_{\varphi,t}) = \mathbf{g}_{\varphi,\tau}(T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{a}_{\varphi,t}, T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{b}_{\varphi,t}),$$

per ogni $\mathbf{a}_{\varphi,t}, \mathbf{b}_{\varphi,t} \in T_x\boldsymbol{\Omega}_t$. Per bilinearità, il tensore metrico ottenuto per spinta inversa è univocamente determinato dalla conoscenza della matrice di **GRAM** relativa ad una qualsiasi base $\{T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1, \dots, T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n\}$ dello spazio tangente $\mathbb{T}_{\varphi_{\tau,t}(\mathbf{x})}\boldsymbol{\Omega}_\tau$.

1.5 Tensore di deformazione

Il risultato delle misurazioni, effettuate sul semplice generato dalla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ fissata in $\mathbb{T}_x\boldsymbol{\Omega}_t$ e sul semplice corrispondente generato dalla base $\{T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1, \dots, T_x\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n\}$ in $\mathbb{T}_{\varphi_{\tau,t}(\mathbf{x})}\boldsymbol{\Omega}_\tau$ a spostamento avvenuto, fornisce dunque una informazione indipendente dalla particolare scelta della base iniziale ed

espressa dalla conoscenza del tensore $(\varphi_{\tau,t}\downarrow\mathbf{g}_{\varphi,\tau})_{\mathbf{x}}$, funzione bilineare e simmetrica definita sullo spazio tangente $\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t$. Il soddisfacimento della condizione:

$$(\varphi_{\tau,t}\downarrow\mathbf{g}_{\varphi,\tau})_{\mathbf{x}} = (\mathbf{g}_{\varphi,t})_{\mathbf{x}} \in \text{COV}(\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t),$$

equivale ad imporre che le norme dei vettori tangenti siano invarianti rispetto all'azione del differenziale $T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \in L(\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t, \mathbb{T}_{\varphi_{\tau,t}(\mathbf{x})}\Omega_{\tau})$ dello spostamento $\varphi_{\tau,t} \in C^2(\Omega_t, \Omega_{\tau})$. Si dice allora che nel punto $\mathbf{x} \in \Omega_t$ lo spostamento è *isometrico*. Se ciò accade per ogni punto $\mathbf{x} \in \Omega_t$, si dirà che è isometrico lo spostamento dal piazzamento Ω_t al piazzamento Ω_{τ} .

Ne risulta che è naturale assumere, quale misura della deformazione nel punto $\mathbf{x} \in \Omega_t$, la differenza $(\varphi_{\tau,t}\downarrow\mathbf{g}_{\varphi,\tau})_{\mathbf{x}} - (\mathbf{g}_{\varphi,t})_{\mathbf{x}}$, che rappresenta il *divario di metrica*. Per motivi di convenienza nell'interpretazione fisica degli sviluppi analitici, è però opportuno introdurre un coefficiente pari ad $1/2$ e definire il *tensore della deformazione* di **GEORGE GREEN** come:

$$\frac{1}{2}[(\varphi_{\tau,t}\downarrow\mathbf{g}_{\varphi,\tau})_{\mathbf{x}} - (\mathbf{g}_{\varphi,t})_{\mathbf{x}}].$$

La definizione 1.2.1 di spostamento isometrico è equivalente ad assumere che il tensore di **G. GREEN** si annulli su Ω_t . Infatti la lunghezza di una curva $\mathbf{c} \in C^1([0, 1]; \Omega_t)$ in Ω_t è l'integrale della norma dei vettori velocità della curva:

$$\int_0^1 \|\partial_{\xi=\lambda} \mathbf{c}(\xi)\| d\lambda.$$

L'invarianza della norma dei vettori tangenti, rispetto all'azione del differenziale $T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \in L(\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t, \mathbb{T}_{\varphi_{\tau,t}(\mathbf{x})}\Omega_{\tau})$, implica l'invarianza della lunghezza di ogni curva in Ω_t , a seguito dello spostamento $\varphi_{\tau,t} \in C^2(\Omega_t, \Omega_{\tau})$ e viceversa.

1.6 Tensore velocità di distorsione

Le spinte inverse del tensore metrico, tramite gli spostamenti $\varphi_{\tau,t} \in C^2(\Omega_t, \Omega_{\tau})$, appartengono, per ogni $\tau \in I$, allo stesso spazio lineare di tensori due volte covarianti $(\varphi_{\tau,t}\downarrow\mathbf{g})_{\mathbf{x}} \in \text{COV}(\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t)$ su $\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t$. Pertanto, la derivata temporale del tensore della deformazione, valutata all'istante $t \in I$ nel punto $\mathbf{x} \in \Omega_t$, è ben definita da:

$$\partial_{\tau=t} \frac{1}{2}[(\varphi_{\tau,t}\downarrow\mathbf{g}_{\varphi,\tau})_{\mathbf{x}}] \in \text{COV}(\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t).$$

Definendo la derivata temporale convettiva (o derivata temporale di **MARIUS SOPHUS LIE**) del tensore metrico, lungo il moto:

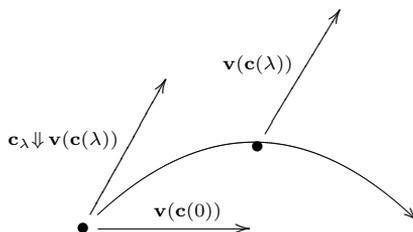
$$\mathcal{L}_{\varphi,t} \mathbf{g}_{\varphi} := \partial_{\tau=t} \varphi_{\tau,t}\downarrow\mathbf{g}_{\varphi,\tau},$$

la velocità di deformazione si può scrivere:

$$\partial_{\tau=t} \frac{1}{2}(\varphi_{\tau,t} \downarrow \mathbf{g}_{\varphi,\tau}) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\varphi,t} \mathbf{g}_{\varphi}.$$

Sia $\mathbf{v}_{\varphi,t} := \partial_{\tau=t}(\mathbf{i}_{\tau,t} \circ \varphi_{\tau,t}) \in C^1(\Omega_t; \mathbb{T}_{\mathbf{i}_{\varphi,t}(\Omega_t)}\mathcal{S})$ il campo di velocità del moto nello spazio ambiente all'istante $t \in I$ e sia $\mathbf{c} \in C^2([0, 1]; \mathbf{i}_{\varphi,t}(\Omega_t))$ una curva regolare a valori nell'immersione spaziale $\mathbf{i}_{\varphi,t}(\Omega_t) \subset \mathcal{S}$ del piazzamento del corpo.

Si denoti inoltre con $\mathbf{c}_{\lambda} \downarrow$ il trasporto parallelo per traslazione di un vettore tangente da $\mathbb{T}_{\mathbf{c}(\lambda)}\mathcal{S}$ a $\mathbb{T}_{\mathbf{c}(0)}\mathcal{S}$, come mostrato nello schema:



La *derivata parallela* del campo di velocità nel punto spaziale $\mathbf{x} = \mathbf{c}(0) \in \mathbf{i}_{\varphi,t}(\Omega_t)$ ed in direzione della tangente $\mathbf{a} = \partial_{\lambda=0} \mathbf{c}(\lambda) \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$ è fornita dal tensore misto $\nabla \mathbf{v}_{\varphi,t}(\mathbf{x}) \in \text{MIX}(\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{S})$ (avente per argomento una coppia vettore-covettore) definito da:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{a} = \partial_{\lambda=0} \mathbf{c}_{\lambda} \downarrow (\mathbf{v}_{\varphi,t} \circ \mathbf{c})(\lambda) \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{S}.$$

Si noti che i vettori $\mathbf{c}_{\lambda} \downarrow (\mathbf{v}_{\varphi,t} \circ \mathbf{c})(\lambda)$ appartengono al medesimo spazio tangente $\mathbb{T}_{\mathbf{c}(0)}\mathcal{S} = \mathbb{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$ per ogni λ in un intorno dello zero. E' pertanto ben definita la differenza di due tali vettori e la derivata $\partial_{\lambda=0}$ appartiene anch'essa allo stesso spazio tangente.

Un risultato fondamentale, dovuto a **LEONHARD EULER**, consente di esprimere il tensore velocità di deformazione in termini di derivate spaziali secondo la connessione per traslazione. Questo classico e fondamentale risultato è dimostrato nel Teorema 1.6.1.

Teorema 1.6.1 (Formula di distorsione di Euler) *Sia \mathcal{S} una varietà differenziabile di **BERNHARD RIEMANN** e cioè dotata di un campo di tensori metrici $\mathbf{g} \in C^1(\mathcal{S}, \text{Cov}(\mathbb{T}\mathcal{S}))$. il campo tensoriale di **EULER**, definito come parte simmetrica della derivata parallela del campo di velocità spaziale, secondo una connessione lineare ∇ :*

$$\text{sym}(\nabla \mathbf{v}_{\varphi,t}) \in C^1(\mathcal{S}, \text{MIX}(\mathbb{T}\mathcal{S})),$$

fornisce il tensore misto associato al tensore due volte covariante della velocità di deformazione, e cioè:

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\varphi,t}\mathbf{g}_{\varphi} = \mathbf{g}_{\varphi,t} \circ \text{sym}(\nabla\mathbf{v}_{\varphi,t}).$$

Dim. Preliminarmente si noti che:

$$T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{a} := \partial_{\lambda=0}(\varphi_{\tau,t} \circ \mathbf{c})(\lambda) \in \mathbb{T}_{\varphi_{\tau,t}(\mathbf{x})}\Omega_{\tau},$$

e che, in virtù della commutatività tra derivate parziali di una funzione di classe C^2 su \mathcal{R}^2 :

$$\begin{aligned} \partial_{\tau=t} T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{a} &= \partial_{\tau=t} \partial_{\lambda=0}(\varphi_{\tau,t} \circ \mathbf{c})(\lambda) \\ &= \partial_{\lambda=0} \partial_{\tau=t}(\varphi_{\tau,t} \circ \mathbf{c})(\lambda) = \partial_{\lambda=0} \mathbf{v}_{\varphi,t}(\mathbf{c}(\lambda)) \\ &= T_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{T}_{\mathbf{v}_{\varphi,t}(\mathbf{x})}\mathbb{T}\Omega_t = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t. \end{aligned}$$

L'eguaglianza tra $T_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{T}_{\mathbf{v}_{\varphi,t}(\mathbf{x})}\mathbb{T}\Omega_t$ e $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t$ consiste nell'assumere che la parte orizzontale della derivata naturale $T_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{a}$ sia nulla, e ciò in conseguenza della usuale identificazione, per traslazione, degli spazi tangenti ad uno spazio lineare con lo spazio stesso. La parte verticale $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{a}$ è la derivata *parallela* in direzione del vettore tangente $\mathbf{a} = \partial_{\lambda=0} \mathbf{c}(\lambda) \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t$. Dalla definizione di spinta inversa del tensore metrico, si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\varphi,t}\mathbf{g}_{\varphi})_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \partial_{\tau=t} \frac{1}{2}(\varphi_{\tau,t} \downarrow \mathbf{g}_{\varphi,\tau})_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= \partial_{\tau=t} \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\varphi,\tau}(T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{a}, T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Allora, facendo ricorso alla regola di **GOTTFRIED LEIBNIZ**, di può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\varphi,t}\mathbf{g}_{\varphi})_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\varphi,\tau}(\partial_{\tau=t} T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\varphi,\tau}(\mathbf{a}, \partial_{\tau=t} T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\varphi,\tau}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\varphi,\tau}(\mathbf{a}, \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{g}_{\varphi,\tau}\left(\frac{1}{2}[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t})^A] \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}\right) \\ &= \mathbf{g}_{\varphi,\tau}([\text{sym}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\varphi,t})] \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Ciò dimostra la fomula cercata. ■

1.6.1 Matrici rappresentative

La matrice della velocità di deformazione rispetto ad una base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è simmetrica di ordine n e data da:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\varphi,t} \mathbf{g}_{\varphi})_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cdots & \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\varphi,t} \mathbf{g}_{\varphi})_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\varphi,t} \mathbf{g}_{\varphi})_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \cdots & \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\varphi,t} \mathbf{g}_{\varphi})_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$$

Gli elementi sulla diagonale principale sono espressi dalle formule:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\varphi,t} \mathbf{g}_{\varphi})_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) &= \partial_{\tau=t} \frac{1}{2} \|T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_i\|^2 \\ &= \partial_{\tau=t} \|T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_i\|, \end{aligned}$$

e forniscono la derivata temporale della lunghezza dei vettori di base. Se $\|\mathbf{e}_i\| = 1$, tale derivata temporale è anche eguale alla derivata temporale della dilatazione nominale:

$$\frac{\|T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_i\|}{\|\mathbf{e}_i\|} - 1,$$

ed anche alla derivata temporale della dilatazione logaritmica:

$$\ln\left(\frac{\|T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_i\|}{\|\mathbf{e}_i\|}\right).$$

Gli elementi fuori diagonale sono espressi dalle formule, per $i \neq j$:

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\varphi,t} \mathbf{g}_{\varphi})_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \partial_{\tau=t} \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\varphi,\tau}(T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_i, T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_j).$$

Denotando con $\alpha_{\tau,t}^{i,j}$ l'angolo in radianti tra i vettori $T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_i$ e $T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_j$, si ponga:

$$\mathbf{g}_{\varphi,\tau}(T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_i, T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_j) = \cos(\alpha_{\tau,t}^{i,j}) \|T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_i\| \|T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_j\|.$$

Assumendo che la base sia ortonormale, si ha che $\alpha_{t,t}^{i,j} = \pi/2$, per $i \neq j$, e quindi $\cos(\alpha_{t,t}^{i,j}) = 0$ e $\sin(\alpha_{t,t}^{i,j}) = 1$. Ne consegue che la derivata temporale risulta eguale a:

$$\begin{aligned} \partial_{\tau=t} \mathbf{g}_{\varphi,\tau}(T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_i, T_{\mathbf{x}}\varphi_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_j) &= \partial_{\tau=t} \cos(\alpha_{\tau,t}^{i,j}) \|\mathbf{e}_i\| \|\mathbf{e}_j\| \\ &= -\sin(\alpha_{t,t}^{i,j}) \partial_{\tau=t} \alpha_{\tau,t}^{i,j} = -\partial_{\tau=t} \alpha_{\tau,t}^{i,j}. \end{aligned}$$

Si può concludere che, valutando la matrice della velocità di deformazione rispetto ad una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, il doppio degli elementi fuori diagonale è eguale all'opposto della derivata temporale dell'angolo formato dai relativi vettori di base, trasformati per effetto dello spostamento. A tale termine si dà il nome di velocità di *scorrimento angolare*.

1.6.2 Velocità di espansione volumetrica

Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base fissata in $\mathbb{T}_x\Omega_t$. Il volume del parallelepipedo orientato di lati $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è il valore assunto da una forma n -lineare alternante:

$$\boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \in \mathcal{R}$$

Il volume è compatibile con la metrica in $\mathbb{T}_x\Omega_t$ se risulta:

$$\boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)^2 = \det \text{GRAM}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Se tale eguaglianza vale per una particolare base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ essa varrà anche per ogni altra base. In particolare è sufficiente assicurarsi che un n -cubo, con lati di lunghezza unitaria, abbia volume unitario. Per valutare la velocità di espansione volumetrica si consideri il parallelepipedo orientato a spostamento avvenuto e si valuti la derivata temporale del volume:

$$\partial_{\tau=t} \boldsymbol{\mu}_x(T_x\boldsymbol{\varphi}_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1, \dots, T_x\boldsymbol{\varphi}_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n).$$

Facendo ricorso alla regola di **G. LEIBNIZ**, si ha che:

$$\begin{aligned} \partial_{\tau=t} \boldsymbol{\mu}_x(T_x\boldsymbol{\varphi}_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1, \dots, T_x\boldsymbol{\varphi}_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n) &= \boldsymbol{\mu}_x(\partial_{\tau=t} T_x\boldsymbol{\varphi}_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) + \dots \\ &+ \boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{e}_1, \dots, \partial_{\tau=t} T_x\boldsymbol{\varphi}_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n) \\ &= \boldsymbol{\mu}_x(\nabla_x \mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) + \dots \\ &+ \boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{e}_1, \dots, \nabla_x \mathbf{v}_{\varphi,t} \cdot \mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

Sussiste dunque la formula:

$$\partial_{\tau=t} \boldsymbol{\mu}_x(T_x\boldsymbol{\varphi}_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_1, \dots, T_x\boldsymbol{\varphi}_{\tau,t} \cdot \mathbf{e}_n) = J_1(\nabla_x \mathbf{v}_{\varphi,t}) \boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n),$$

per cui la velocità di espansione volumetrica è pari all'invariante lineare del tensore di **L. EULER**.