Giovanni Romano

TEORIA DELLE STRUTTURE

PARTE I

ELEMENTI di ANALISI LINEARE

Napoli, novembre 2000.

e-mail: romano@unina.it

Dipartimento di Scienza delle Costruzioni
Università di Napoli FEDERICO II
via Claudio, 21 , c.a.p. 80125 - Napoli - Italia.

INDICE

PREMESSA

Un moderno corso di teoria delle strutture non può prescindere da una impostazione matematica adeguata alla trattazione dei problemi lineari in cui le variabili in gioco sono campi definiti su dominii, o più in generale su varietà differenziabili, in uno spazio euclideo.

La trattazione delle questioni di unicità e di esistenza nonchè quella delle tecniche di stima dell'errore nelle metodologie di soluzione approssimata, quale ad. es. quella degli elementi finiti, richiede il ricorso a risultati profondi di analisi lineare, intesa come disciplina matematica che studia gli spazi vettoriali topologici e le applicazioni lineari continue (vedi RICHARD S. PALAIS [20]).

Queste lezioni sono dedicate a presentare sinteticamente concetti e teoremi di analisi lineare che trovano applicazione nella discussione dei problemi differenziali lineari della teoria delle strutture.

L'esposizione tende a contemperare in qualche modo l'esigenza di fornire una raccolta sufficientemente ampia per gli scopi applicativi con quella di mantenere il carattere di esposizione ragionata dei soli concetti fondamentali e delle principali proprietà.

La trattazione privilegia i risultati riguardanti le proprietà di chiusura e ne fornisce la dimostrazione nel contesto degli spazi di HILBERT. Le proprietà di chiusura costituiscono infatti lo strumento fondamentale per la dimostrazione della buona posizione dei problemi lineari.

Gli spazi di HILBERT sono inoltre sufficientemente generali per la maggioranza delle applicazioni e godono di proprietà peculiari che consentono di semplificare drasticamente le dimostrazioni e di pervenire a risultati più completi. Come premessa ad una breve presentazione degli spazi di SOBOLEV sono illustrati nozioni e risultati di teoria della misura e dell'integrazione, facendo riferimento essenzialmente alla trattazione del prof. CARLO SBORDONE in [45]. L'esposizione è limitata agli spazi di SOBOLEV che sono anche spazi di HILBERT.

I riferimenti bibliografici forniscono indicazioni per consentire di svolgere approfondimenti e trovare le dimostrazioni di tutti i risultati dei quali viene nel seguito riportato solo l'enunciato. Un'esposizione, compatta ed esauriente, di concetti e risultati utili per le applicazioni può essere trovata in [46].

Una trattazione dei concetti fondamentali orientata verso problemi di ottimizzazione ed accompagnata da interessanti esempi di applicazione è contenuta nel libro [21] di DAVID LUENBERGER.

Per una raccolta ragionata ed accurata dei fondamenti dell'analisi funzionale si raccomanda la lettura del testo di appunti del corso mirabilmente tenuto da molti anni dal prof. RENATO FIORENZA [34] agli allievi ingegneri ed ai ricercatori della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli Federico II.

Alcuni risultati e dimostrazioni sono originali. La fonte delle principali proposizioni non dimostrate è puntualmente indicata. Le brevi note biografiche sono tratte dai volumi di MORRIS KLINE [16] e da ricerche su siti Internet (Mathematics Metaserver).

Napoli, gennaio 2000 GIOVANNI ROMANO

I – ELEMENTI di ANALISI LINEARE

Nel presentare nozioni e metodi fondamentali di Analisi Funzionale si è fatto riferimento all'impostazione generale del trattato di KOSAKU YOSIDA [29] ed alla brillante esposizione del libro di HAÏM BREZIS [41]. Altri risultati sono tratti dal libro di A.L. BROWN e A. PAGE [25].

Un'impostazione moderna ed elegante dei principali concetti dell'analisi moderna è esposta nell'opera di JEAN DIEUDONNÉ [23].

1. INSIEMI

Si richiama preliminarmente il significato dei simboli adottati.

SIMBOLO	SIGNIFICATO
$\in$	appartiene a
$:=$	definito da
$:$	tale che
$\vert$	che soddisfa la proprietà
$\forall$	per ogni
$\exists$	esiste un
$\Longleftrightarrow$	equivale a
$\Rightarrow$	implica che

Sia $\mathcal{X}$ un insieme ed $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sottoinsiemi di $\mathcal{X}$.
Il **complemento** di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{A}$ è l'insieme definito da

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \;:\; \mathbf{x} \in \mathcal{A} \,,\, \mathbf{x} \notin \mathcal{B}\} \,,$$

Si dice anche che $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ è la differenza di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e si legge $\mathcal{A}$ **meno** $\mathcal{B}$.

Si scrive inoltre

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ se ogni elemento di $\mathcal{A}$ appartiene anche a $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ incluso in $\mathcal{B}$).
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ incluso in $\mathcal{B}$ in senso stretto).

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di un insieme $\mathcal{X}$. Allora diremo

- unione della famiglia $\mathcal{F}$ l'insieme

$$\bigcup_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \exists\, \mathcal{A} \in \mathcal{F} \;:\; \mathbf{x} \in \mathcal{A}\} \,,$$

- intersezione della famiglia $\mathcal{F}$ l'insieme

$$\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A} \quad \forall\, \mathcal{A} \in \mathcal{F}\} \,.$$

Il simbolo $\mid$ significa *che soddisfa la proprietà,*

Valgono le relazioni

$$\mathcal{A} \cap \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} \mathcal{B} = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \,,$$

$$\mathcal{A} \cup \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} \mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \,,$$

e le formule di De Morgan [1]

$$\mathcal{A} \setminus \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} \mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \,,$$

$$\mathcal{A} \setminus \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} \mathcal{B} = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \,,$$

La definizione degli insiemi basate sulle proprietà dei loro elementi è delicata. A tale proposito si noti un famoso paradosso di Russell [2]

[1] Augustus De Morgan (1806-1871) professore di matematica all'University College di Londra, logico matematico ed algebrista.

[2] Bertrand Russell (1872-1970) uno dei fondatori della logica matematica.

Paradosso di Bertrand Russell (1901)

- Sia $\mathcal{S}$ l'insieme definito da

$$\mathcal{S} := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ è un insieme e } \mathcal{A} \notin \mathcal{A}\}.$$

Allora $\mathcal{S} \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S} \notin \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \notin \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S} \in \mathcal{S}$.

1.1. Relazioni e applicazioni

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due insiemi. Diremo

- insieme **prodotto cartesiano** di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ l'insieme $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ delle coppie ordinate $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ con $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$,
- **grafico di una relazione** $\mathcal{R}$ tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Una relazione $\mathcal{R}$ è detta

- **riflessiva** se $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} \in \mathcal{R}$,
- **simmetrica** se $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R} \Rightarrow \{\mathbf{y}, \mathbf{x}\} \in \mathcal{R}$,
- **antisimmetrica** se $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R}$, $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}\} \in \mathcal{R} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- **transitiva** se $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R}$, $\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\} \in \mathcal{R} \Rightarrow \{\mathbf{x}, \mathbf{z}\} \in \mathcal{R}$.

Una relazione $\mathcal{R}$ è detta

- di **equivalenza** se è **riflessiva**, **simmetrica** e **transitiva**,
- d'**ordine parziale** se è **riflessiva**, **antisimmetrica** e **transitiva**.

Una relazione d'ordine parziale su un insieme $\mathcal{X}$ è detta un **ordine totale** o **ordine lineare** se per ogni $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{X}$ si ha $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R}$ oppure $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}\} \in \mathcal{R}$.

Osservazione 1.1. Un insieme parzialmente ordinato è detto un **insieme diretto** se vale la condizione

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{X} \Rightarrow \exists\ \mathbf{c} \in \mathcal{X} : \mathbf{a} \prec \mathbf{c},\ \mathbf{b} \prec \mathbf{c}.$$

La nozione di insieme diretto consente di definire il limite generalizzato di una mappa (eventualmente multivoca) definita su di un insieme diretto.

Un esempio classico è l'integrale di RIEMANN [3] (vedi [29], par. IV,2). ■

Il grafico di una relazione tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ è un **grafico funzionale** in $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ se

$$\left.\begin{array}{l}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1\} \in \mathcal{R} \ , \\ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}_2\} \in \mathcal{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 \,.$$

Un grafico funzionale è anche detto **applicazione**, **funzione**, **mappa**, **trasformazione**, **operatore** da $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$, denotato con $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ e definito da

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \iff \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R} \ .$$

Si definiscano quindi

- il **dominio** di $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$

$$\mathrm{dom}\, \mathbf{T} \ := \big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \exists\, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \ : \ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R} \ \big\} \,,$$

- l'**immagine** o **codominio** di $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$

$$\mathrm{Im}\, \mathbf{T} \ := \big\{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \mid \exists\, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \ : \ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R} \ \big\} \,,$$

- l'**immagine inversa** o **controimmagine** tramite $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ di un sottoinsieme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Y}$

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{S}) \ := \big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{T}(\mathbf{x}) \in \mathcal{S} \big\} \,.$$

L'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è

- **iniettiva** se

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y} \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \,,$$

- **suriettiva** se

$$\forall\, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \quad \exists\, \mathbf{x} \in \mathcal{A} \ : \ \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \,.$$

In tal caso si dice che l'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è da $\mathcal{X}$ su $\mathcal{Y}$.

Una applicazione iniettiva e suriettiva su $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ è detta una **corrispondenza biunivoca** tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.

---

[3] GEORGE FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) allievo di GAUSS succedette a DIRICHLET come professore di matematica a Göttingen. Fondamentali i suoi contributi alla geometria differenziale ed alla teoria delle funzioni di variabile complessa.

Siano $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sottoinsiemi di $\mathcal{X}$ e $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ un'applicazione da $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$. Allora

$$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathbf{T}(\mathcal{A}_2)\,.$$

e si ha che

$$\mathbf{T}(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \subseteq \mathbf{T}(\mathcal{A}_1) \cap \mathbf{T}(\mathcal{A}_2)\,,$$

$$\mathbf{T}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \mathbf{T}(\mathcal{A}_1) \cup \mathbf{T}(\mathcal{A}_2)\,.$$

Se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono sottoinsiemi di $\mathcal{Y}$ risulta

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_2)\,,$$

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1) \cap \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_2)\,,$$

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1) \cup \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_2)\,,$$

ed inoltre

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_2) = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_2) \setminus \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1)\,.$$

Per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Y}$ si ha inoltre che

$$\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B})) = \mathcal{B} \cap \mathbf{T}(\mathcal{X})\,,$$

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}(\mathcal{A})) \supseteq \mathcal{A}\,.$$

- Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \Re$ a valori reali è detta un **funzionale**.

2. SPAZI TOPOLOGICI

Uno **spazio topologico** è una coppia $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}\}$ costituita da un insieme $\mathcal{X}$ e da una famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di $\mathcal{X}$, detti gli **insiemi aperti** di $\mathcal{X}$, tale che

- l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme $\mathcal{X}$ sono aperti,
- l'unione di ogni famiglia di aperti è un aperto,
- l'intersezione di ogni famiglia finita di aperti è un aperto.

La famiglia $\mathcal{T}$ è detta una **topologia** su $\mathcal{X}$.

I complementari degli aperti sono gli **insiemi chiusi** e pertanto

- l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme $\mathcal{X}$ sono chiusi (e aperti),
- l'unione di ogni famiglia finita di chiusi è un chiuso,

- l'intersezione di ogni famiglia di chiusi è un chiuso.

Per semplicità spesso uno spazio topologico è denotato dal solo insieme $\mathcal{X}$ omettendo di indicare esplicitamente la topologia $\mathcal{T}$.

Diamo le seguenti definizioni.

- Un **intorno aperto** di sottoinsieme $\mathcal{S}$ non vuoto di $\mathcal{X}$ è un insieme aperto che contiene $\mathcal{S}$.
- Un **intorno** di $\mathcal{S}$ è un insieme che contiene un intorno aperto di $\mathcal{S}$.
- Un **intorno** di un elemento $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ è quindi un sottoinsieme di $\mathcal{X}$ che contiene un aperto cui appartiene $\mathbf{x}$.
- Un **sistema fondamentale di intorni** di $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ è una famiglia di intorni di $\mathcal{S}$ tale che ogni intorno di $\mathcal{S}$ contiene un elemento della famiglia.
- Si dice **base della topologia** $\mathcal{T}$ un sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tale che ogni aperto di $\mathcal{T}$ è l'unione di elementi di $\mathcal{B}$.
- Un elemento $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ è un **punto limite** o **di accumulazione** di un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ se ogni intorno di $\mathbf{x}$ contiene almeno un elemento di $\mathcal{A} \setminus \{\mathbf{x}\}$.
- Un elemento $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ è un **punto isolato** di $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ se non è di accumulazione per $\mathcal{A}$.
- L'**aderenza** di un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ è l'insieme degli elementi di $\mathcal{X}$ il cui intorno contiene almeno un punto di $\mathcal{A}$.
- La **chiusura** $\overline{\mathcal{A}}$ di $\mathcal{A}$ è l'intersezione dei chiusi che contengono $\mathcal{A}$.
- L'**interno** $\overset{\circ}{\mathcal{A}}$ di $\mathcal{A}$ è l'unione degli aperti contenuti in $\mathcal{A}$.
- La **frontiera** $\mathrm{fr}\mathcal{A}$ di $\partial\mathcal{A}$ di $\mathcal{A}$ è l'insieme degli elementi di $\overline{\mathcal{A}}$ che non appartengono ad $\overset{\circ}{\mathcal{A}}$ e cioè $\partial\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \cap (\overline{\mathcal{X} \setminus \mathcal{A}})$. Dunque $\partial\mathcal{A}$ è chiuso.
- Un sottoinsieme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ è detto **denso** in $\mathcal{X}$ se la sua chiusura $\overline{\mathcal{S}}$ in $\mathcal{X}$ coincide con $\mathcal{X}$.
  Valgono le seguenti proprietà
- Un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ è aperto se e solo se contiene un intorno di ogni suo punto.
- Un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ è chiuso se e solo se contiene i suoi punti di accumulazione.

Sia $\mathcal{S}$ è un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{X}$. La topologia di $\mathcal{X}$ induce su $\mathcal{S}$ una topologia, detta la **topologia relativa** su $\mathcal{S}$, costituita dall'intersezione degli aperti di $\mathcal{X}$ con $\mathcal{S}$.

Lo spazio topologico così generato si denota ancora con $\mathcal{S}$ e viene detto un **sottospazio topologico** di $\mathcal{X}$.

- Ogni proprietà di uno spazio topologico $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}\}$ che dipende solo dalla topologia $\mathcal{T}$ è detta una **proprietà topologica**.

Le proprietà topologiche in $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}\}$ sono quindi quelle che possono essere espresse compiutamente in termini degli insiemi aperti (o degli insiemi chiusi) di $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}\}$.

Una topologia è detta **separante** (o di HAUSDORFF [4]) se soddisfa il seguente

Assioma di separazione di HAUSDORFF

- per ogni coppia $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ di punti distinti di $\mathcal{X}$ esiste un coppia di aperti disgiunti $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2\}$ tali che $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{O}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{O}_2$.

Nel seguito si supporrà sempre che le topologie siano separanti.

- Una topologia è detta **normale** se
- per ogni coppia $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ di sottoinsiemi chiusi disgiunti di $\mathcal{X}$ esistono intorni disgiunti di $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$.

■ Uno **spazio topologico lineare** è uno spazio lineare in cui è definita una topologia rispetto alla quale le operazioni lineari sono continue.

■ Un sottoinsieme $\mathcal{Y}$ di uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto **limitato** se è assorbito da ogni intorno $\mathcal{U}$ di $\mathbf{o} \in \mathcal{X}$, cioè se $\exists\, \alpha > 0 \ : \ \mathcal{B} \subseteq \alpha\mathcal{U}$.

2.1. Applicazioni continue e limiti

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due spazi topologici.

- Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è detta **continua nel punto** $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ se per ogni intorno $\mathcal{V}$ di $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ esiste un intorno $\mathcal{U}$ di $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{T}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$.

[4] FELIX HAUSDORFF (1868-1942) matematico tedesco cui si devono contributi fondativi della moderna topologia.

- Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è detta **continua** se è continua in ogni punto di $\mathcal{X}$.

Proposizione 2.1. Applicazioni continue. *Un'applicazione* $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ *con* $\operatorname{dom} \mathbf{T} = \mathcal{X}$ *è continua se e solo se*

$$i) \quad \mathcal{A} \quad \text{aperto in } \mathcal{Y} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{A}) \quad \text{aperto in } \mathcal{X},$$

$$ii) \quad \mathcal{A} \quad \text{chiuso in } \mathcal{Y} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{A}) \quad \text{chiuso in } \mathcal{X}.$$

$$iii) \quad \mathbf{T}(\overline{\mathcal{A}}) \subseteq \overline{\mathbf{T}(\mathcal{A})} \quad \forall \, \mathcal{A} \in \mathcal{X}.$$

Dim. Dimostrazione della $i)$. Sia $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ continua e $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ aperto, $\mathcal{U} = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{V})$ è un intorno di ogni punto $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tale che $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ e cioè è un intorno di ogni suo punto. Dunque $\mathcal{U}$ è aperto.

Inversamente sia $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ con $\mathcal{V}$ aperto. Allora essendo $\mathcal{U} = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{V})$ aperto in $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ è un intorno di $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ e quindi $\mathbf{T}$ è continua in $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

Osservando che per ogni trasformazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ vale la proprietà

$$\mathcal{Y} \supseteq \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{Z} \setminus \mathcal{A}) = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{Z}) \setminus \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{A}),$$

e ponendo $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}$ si ottiene che la $i)$ implica la $ii)$. La dimostrazione di $iii)$ è lasciata per esercizio al lettore. □

Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è detta **aperta** (**chiusa**) se

$$\mathcal{A} \quad \text{aperto (chiuso) in } \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathcal{A}) \quad \text{aperto (chiuso) in } \mathcal{Y}.$$

Si diano ora le seguenti definizioni.

- Un'applicazione biettiva e continua $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ tale che $\mathbf{T}^{-1} : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{X}$ è continua è detta un **omeomorfismo** tra gli spazi topologici $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.

Un omeomorfismo è un'applicazione sia aperta che chiusa.

Dalla proposizione 2.1 si deduce che due **spazi topologici omeomorfi** $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ hanno le stesse proprietà topologiche in quanto esiste una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi aperti dei due spazi.

- Si dice che un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ ha **limite** $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ nel punto $\mathbf{x}_o \in \overline{\operatorname{dom} \mathcal{A}}$, o che tende a $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ per $\mathbf{x}$ tendente a $\mathbf{x}_o \in \overline{\operatorname{dom} \mathcal{A}}$, se l'applicazione $\overline{\mathbf{T}} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ definita da

$$\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \operatorname{dom} \mathbf{T}, \\ \mathbf{y} & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}_o, \end{cases}$$

è continua nel punto $\mathbf{x}_o$. Si scrive allora

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_o} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\,,$$

ovvero

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_o \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathbf{x}) \to \mathbf{y}\,.$$

La continuità di una applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ in un punto $\mathbf{x} \in \operatorname{dom}\mathbf{T} \subseteq \mathcal{X}$ puo anche essere espressa imponendo che

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_o} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_o)\,.$$

Per il limite di una successione si adottano le notazioni

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_o\,,$$

oppure

$$n \to \infty \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_o\,.$$

Se $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ tende a $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ nel punto $\mathbf{x}_o$ si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{T}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}\,,$$

oppure

$$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_\infty \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{T}(\mathbf{x}_\infty)\,.$$

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due spazi topologici lineari. Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è detta **lineare** se è

- additiva: $\mathbf{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y}) \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$,
- omogenea: $\mathbf{T}(\alpha\,\mathbf{x}) = \alpha\,\mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,, \alpha \in \Re\,.$

- Un'applicazione lineare $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ che instaura una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ è detta un **isomorfismo**.
- Un'applicazione lineare $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \Re$ a valori reali è detta una **forma lineare** o un **funzionale lineare**.
- Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mapsto \Re$ a valori reali che sia separatamente lineare rispetto a $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ è detta una **forma bilineare** o un **funzionale bilineare**.

Analogamente si definiscono le **forme multilineari**.

- La restrizione di una forma bilineare $\mathbf{T} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mapsto \Re$ alla diagonale di $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ definita da

$$\operatorname{diag} \mathcal{X} := \big\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \big\}$$

è detta una **forma quadratica** o un **funzionale quadratico**.
Analogamente si definiscono le forme cubiche, etc., di ordine n.

Le trasformazioni continue e lineari godono dell'importante proprietà di conservare la limitatezza (vedi [29] sez. I.7).

Proposizione 2.2. Continuità e limitatezza. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi topologici. Allora ogni applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$* **lineare** *e* **continua** *mappa un qualsiasi insieme limitato di $\mathcal{X}$ in un insieme limitato di $\mathcal{Y}$, e cioè*

$$\boxed{\mathcal{B} \quad \text{limitato in } \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathcal{B}) \quad \text{limitato in } \mathcal{Y}\,.}$$

Dim. Sia $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Y}$ un intorno di $\mathbf{o} \in \mathcal{Y}$. La continuità e la linearità di $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ assicura che esiste un intorno $\mathcal{U}$ di $\mathbf{o} \in \mathcal{X}$ tale che $\mathbf{T}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$. Sia $\alpha > 0$ tale che $\mathcal{B} \subseteq \alpha\,\mathcal{U}$. Allora $\mathbf{T}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{T}(\alpha\,\mathcal{U}) = \alpha\,\mathbf{T}(\mathcal{U}) \subseteq \alpha\,\mathcal{V}$. □

2.2. Insiemi compatti

Il classico teorema di BOLZANO [5] -WEIERSTRASS [6] assicura che

- ■ da ogni successione limitata in $\Re^n$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.

Questo fondamentale risultato ha motivato l'introduzione del seguente concetto di compattezza, dovuto a M. FRÉCHET [7]

- Uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto **sequenzialmente compatto** se da ogni successione è possibile estrarre una convergente.

---

[5] BERNHARD BOLZANO (1781-1848) prete, matematico e filosofo boemo.

[6] KARL WEIERSTRASS (1815-1897) professore all'Università di Berlino.

[7] MAURICE FRÉCHET (1878-1973) eminente matematico francese.

Ai matematici sovietici P.S. ALEXANDROV [8] e P.S. URYSOHN [9] è dovuto invece il moderno concetto di compattezza di un insieme in uno spazio topologico, motivato dall'astrazione del seguente teorema di BOREL [10] (vedi p.e. [25] teor. 1.6.4, [22] teor. 2.3.13).

Proposizione 2.3. Teorema di BOREL. *Siano* $\mathrm{I} \subset \Re$ *un intervallo chuso e limitato e* $\mathcal{J}$ *una famiglia di intervalli aperti la cui unione contiene* I. *Allora esiste una sottofamiglia finita di* $\mathcal{J}$ *la cui unione contiene* I. □

Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detta un **ricoprimento** di $\mathcal{X}$ se

$$\mathcal{X} \subseteq \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}} \mathcal{A}\,.$$

Se gli insiemi in $\mathcal{F}$ sono aperti, $\mathcal{F}$ è detto un **ricoprimento aperto**.
Se la famiglia $\mathcal{F}$ è finita, $\mathcal{F}$ è detto un **ricoprimento finito**.

- Uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto **compatto** se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.
- Un sottoinsieme di uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto **compatto** se è compatto come sottospazio di $\mathcal{X}$.
- Un sottoinsieme di uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto **relativamente compatto** se la sua chiusura è compatta.
- Uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto **localmente compatto** se ogni punto dello spazio ha un intorno compatto.
- Sia $\mathcal{S}$ un sottoinsieme di uno spazio topologico $\mathcal{X}$. Si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\ \text{compatto} \quad &\Rightarrow \mathcal{S}\ \text{chiuso}\,, \\ \mathcal{X}\ \text{compatto}\ ,\ \mathcal{S}\ \text{chiuso} \quad &\Rightarrow \mathcal{S}\ \text{compatto}\,. \end{aligned}$$

Dalla definizione è evidente che la compattezza è una proprietà topologica.

Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono due insiemi il loro prodotto cartesiano $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ è l'insieme delle coppie ordinate $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ con $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$.

---

[8] PAVEL SERGEEVICH ALEXANDROV (1896-1982) illustre matematico russo cui sono dovuti fondamentali contributi alla moderna topologia. Allievo di EMMY NOETHER e di HILBERT a Göttingen di BROUWER ad Amsterdam e di LUZIN ed EGOROV a Mosca

[9] PAUL S. URYSOHN (1898-1924) collega ed amico di ALEXANDROV, mori prematuramente durante una nuotata nell'atlantico sulla costa francese.

[10] EMILE BOREL (1871-1956) uno dei pricipali matematici francesi del XX secolo.

Siano $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{X}}\}$ e $\{\mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}\}$ spazi topologici.

- Nello spazio prodotto $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ viene indotta una **topologia prodotto** $\mathcal{T}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ generata dalla base costituita dall'insieme dei rettangoli $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ con $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ e $\mathcal{B} \in \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$.

Ad A.N. TYCHONOV [11] è dovuto un importante risultato concernente il prodotto cartesiano di una arbitraria famiglia di spazi topologici compatti.

Proposizione 2.4. Teorema di TYCHONOV**.** *Per ogni famiglia* $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{I}$ *di spazi topologici compatti il prodotto cartesiano*

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_\alpha \,,$$

dotato della topologia prodotto, è compatto (vedi [29] sez. 0.2). □

Un'importante proprietà delle applicazioni continue è la seguente.

Proposizione 2.5. Continuità e compattezza. *Siano* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *spazi topologici. Allora ogni applicazione continua* $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ *mappa un qualsiasi insieme compatto di* $\mathcal{X}$ *in un insieme compatto di* $\mathcal{Y}$*, e cioè*

$$\boxed{\mathcal{A} \quad \text{compatto in } \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathcal{A}) \quad \text{compatto in } \mathcal{Y}\,.}$$

Dim. Sia $\mathcal{F}$ un ricoprimento aperto di $\mathbf{T}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Y}$. La continuità di $\mathbf{T}$ assicura che $\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{P})$ è un insieme aperto per ogni $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$. Dunque la famiglia $\{\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{P}) \,:\, \mathcal{P} \in \mathcal{F}\}$ è un ricoprimento aperto di $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$.

Essendo $\mathcal{A}$ compatto esiste un suo sottoricoprimento finito

$$\{\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{P}_1), \ldots, \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{P}_n)\}\,.$$

Allora $\{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ e dunque $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ è compatto in $\mathcal{Y}$. □

[11] ANDREI NIKOLAEVICH TYCHONOV (1906-1993) matematico russo teorico ed applicato.

In $\Re^n$ vale il fondamentale ([25], teor.4.2.11)

Teorema di HEINE-BOREL-LEBESGUE

- Un insieme non vuoto di $\Re^n$ è relativamente compatto se e solo se è limitato ed è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dalla proposizione 2.5 e dal teorema di HEINE [12] -BOREL-LEBESGUE [13] segue immediatamente che

Teorema di WEIERSTRASS

- ogni applicazione continua $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \Re$, che mappa uno spazio topologico $\mathcal{X}$ nel campo dei reali, attinge il massimo ed il minimo su ogni compatto non vuoto $\mathcal{A} \subseteq \operatorname{dom} \mathbf{T}$.

2.3. Insiemi connessi

Uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è **connesso** se sussistono le proprietà equivalenti

- gli unici insiemi di $\mathcal{X}$ che sono sia aperti che chiusi sono l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'intero spazio $\mathcal{X}$,
- non esiste alcuna coppia di aperti (o chiusi) non vuoti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tali che

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{X}, \qquad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset.$$

Un insieme $\mathcal{S}$ di $\mathcal{X}$ è detto **connesso** se il sottospazio $\mathcal{S}$ è connesso.

Valgono i seguenti risultati.

- Un insieme $\mathcal{S}$ è connesso se e solo se non può essere espresso come unione di due insiemi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ separati e cioè tali che $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$.

[12] HEINRICH EDUARD HEINE (1821-1881) allievo di GAUSS e di DIRICHLET introdusse il concetto di uniforme continuità.

[13] HENRI LEBESGUE (1875-1941) allievo di BOREL e fondatore della moderna teoria della misura e dell'integrazione.

- Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi connessi di uno spazio topologici $\mathcal{X}$. Allora
$$\bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} \mathcal{A} \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \bigcup_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} \mathcal{A} \quad \text{connesso}\,.$$
- Sia $\{\mathcal{A}_i\,,\; i = 1,\ldots,n\}$ è una famiglia finita di insiemi connessi di uno topologico $\mathcal{X}$ tale che $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i+1} \neq \emptyset$ per $i = 1,\ldots,n-1$. Allora $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ è connesso.
- Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ è connesso, ogni insieme $\mathcal{B}$ tale che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ è connesso.
- Un sottoinsieme della retta reale $\Re$ è connesso se e solo se è un intervallo.
- Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ non vuoto. Un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ è detto una **componente** di $\mathcal{A}$ se non esiste alcun insieme connesso $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ tale che $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$.
- Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ non vuoto. Ogni elemento ed ogni sottoinsieme di $\mathcal{A}$ sono contenuti in una ed una sola componente di $\mathcal{A}$. Le componenti di $\mathcal{A}$ sono chiuse.
- Uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto **localmente connesso** se per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ esiste un sistema fondamentale di intorni connessi di $\mathbf{x}$.

Proposizione 2.6. Continuità e connessione. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi topologici. Allora ogni applicazione continua $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ mappa un qualsiasi insieme connesso di $\mathcal{X}$ in un insieme connesso di $\mathcal{Y}$, e cioè*

$$\boxed{\mathcal{A} \quad \text{connesso in } \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathcal{A}) \quad \text{connesso in } \mathcal{Y}\,.}$$

Dim. Sia $f(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ con $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ aperti in $f(\mathcal{A})$ tali che $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \emptyset$. Allora gli insiemi $\mathcal{A} \cap f(\mathcal{M})^{-1}$ e $\mathcal{A} \cap f(\mathcal{N})^{-1}$ sono non vuoti ed aperti in $\mathcal{A}$.

Poichè $\mathcal{A} \cap f(\mathcal{M})^{-1} \cup \mathcal{A} \cup f(\mathcal{N})^{-1} = \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \cap f(\mathcal{M})^{-1} \cap \mathcal{A} \cup f(\mathcal{N})^{-1} = \emptyset$ ciò contraddice la connessione di $\mathcal{A}$. □

Dalla proposizione 2.6 e dalla caratterizzazione dei connessi di $\Re$ segue immediatamente che

Teorema di BOLZANO

- Sia $f : \mathcal{X} \mapsto \Re$ applicazione continua che mappa uno spazio topologico $\mathcal{X}$ nel campo dei reali e siano $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in f(\mathcal{A})$ tali che $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. Allora per ogni $\mathbf{a} < \mathbf{c} < \mathbf{b}$ esiste $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ tale che $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$.

Sia $\mathcal{S}$ una **curva** e cioè l'immagine di un intervallo di $\Re$ mediante una trasformazione continua $\mathbf{T} : \Re \mapsto \mathcal{X}$.

Allora $\mathcal{S}$ è un connesso e la prossima proposizione 2.7 mostra che ogni curva $\mathcal{S}$ che unisce un punto di $\mathcal{A}$ ed un punto del suo complementare $\mathcal{A}^c = \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$ deve intersecare la frontiera di $\mathcal{A}$ (vedi [23] teor. 3.19.9).

Questa è l'idea intuitiva di connessione.

Proposizione 2.7. Connessione e frontiera. *Sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme di uno spazio topologico $\mathcal{X}$ e $\mathcal{S}$ è un insieme connesso di $\mathcal{X}$. Allora*

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{S} \cap \mathcal{A} \neq \{\mathbf{o}\} \\ \mathcal{S} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A}) \neq \{\mathbf{o}\} \end{cases} \Rightarrow \; \mathcal{S} \cap \, \mathrm{fr}\mathcal{A} \neq \{\mathbf{o}\} \,.}$$

Dim. Supponiamo quindi che $(\mathcal{S} \cap \, \mathrm{fr}\mathcal{A}) = \{\mathbf{o}\}$. Poniamo quindi $\mathcal{A}^c = \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$ e $\mathring{\mathcal{A}}^c = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A})^\circ$ e notiamo che $\mathcal{X} = \mathring{\mathcal{A}} \cup \mathrm{fr}\mathcal{A} \cup \mathring{\mathcal{A}}^c$ e che $(\mathcal{S} \cap \mathring{\mathcal{A}})$ e $(\mathcal{S} \cap \mathring{\mathcal{A}}^c)$ sono aperti non vuoti. Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \cap \mathcal{A} &= (\mathcal{S} \cap \, \mathrm{fr}\mathcal{A}) \cup (\mathcal{S} \cap \mathring{\mathcal{A}}) = \mathcal{S} \cap \mathring{\mathcal{A}} \,, \\ \mathcal{S} \cap \mathcal{A}^c &= (\mathcal{S} \cap \, \mathrm{fr}\mathcal{A}) \cup (\mathcal{S} \cap \mathring{\mathcal{A}}^c) = \mathcal{S} \cap \mathring{\mathcal{A}}^c \,, \end{aligned}$$

e pertanto $\mathcal{S} = (\mathcal{S} \cap \mathring{\mathcal{A}}) \cup (\mathcal{S} \cap \mathring{\mathcal{A}}^c)$ contro l'ipotesi che $\mathcal{S}$ è connesso. $\square$

2.4. Spazi lineari topologici localmente convessi

Diremo che la funzione reale $|\cdot|$ è una **seminorma** sullo spazio lineare $\mathcal{X}$ se soddisfa le condizioni

$$\begin{cases} |\,\alpha\,\mathbf{u}\,| = |\,\alpha\,|\,|\,\mathbf{u}\,| & \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{X}, \quad \forall\, \alpha \in \Re \,, \\ |\,\mathbf{u} + \mathbf{v}\,| \leq |\,\mathbf{u}\,| + |\,\mathbf{v}\,| & \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{X} \,, \qquad \text{subadditività} \,. \end{cases}$$

Una seminorma gode delle seguenti proprietà

$$\begin{cases} |\,\mathbf{o}\,| = 0 & \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{X}, \quad \forall\, \alpha \in \Re \,, \\ |\,\mathbf{u} - \mathbf{v}\,| \geq \big|\,|\,\mathbf{u}\,| - |\,\mathbf{v}\,|\,\big| & \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{X} \,, \\ |\,\mathbf{u}\,| \geq 0 & \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{X} \,. \end{cases}$$

Infatti $|\,\mathbf{o}\,| = |\,0\,\mathbf{o}\,| = 0\,|\,\mathbf{o}\,| = 0$.
Inoltre $|\,\mathbf{u}-\mathbf{v}\,| + |\,\mathbf{v}\,| \geq |\,\mathbf{u}\,|$ e quindi $|\,\mathbf{u}-\mathbf{v}\,| \geq |\,\mathbf{u}\,| - |\,\mathbf{v}\,|$.
Allora $|\,\mathbf{u}-\mathbf{v}\,| = |-1|\,|\,\mathbf{v}-\mathbf{u}\,| \geq |\,\mathbf{v}\,| - |\,\mathbf{u}\,|$ e pertanto $|\,\mathbf{u}-\mathbf{v}\,| \geq \big|\,|\,\mathbf{u}\,| - |\,\mathbf{v}\,|\,\big|$.
Ponendo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ si ha che $|\,\mathbf{u}\,| \geq 0$.

Per ogni fissato $c > 0$ l'insieme

$$\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \,:\, |\,\mathbf{x}\,| \leq c\}\,,$$

gode delle proprietà

- $\mathbf{o} \in \mathcal{M}$,
- $\mathcal{M}$ è **convesso**: $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \lambda\,\mathbf{u} + (1-\lambda)\,\mathbf{v} \in \mathcal{M} \quad \forall\,\lambda \in]0,1[$,
- $\mathcal{M}$ è **bilanciato**: $\mathbf{x} \in \mathcal{M}\,,\ |\,\alpha\,| \leq 1 \;\Rightarrow\; \alpha\,\mathbf{x} \in \mathcal{M}$,
- $\mathcal{M}$ è **assorbente**: $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad \exists\,\alpha > 0 \,:\, \alpha^{-1}\,\mathbf{x} \in \mathcal{M}$.

Risulta inoltre

$$|\,\mathbf{x}\,| = \inf_{\alpha} \{\, \alpha\, c \;\mid \alpha > 0,\, \alpha^{-1}\,\mathbf{x} \in \mathcal{M}\}\,,$$

come può evincersi dalle equivalenze

$$\alpha^{-1}\,\mathbf{x} \in \mathcal{M} \iff |\,\alpha^{-1}\,\mathbf{x}\,| \leq c \iff |\,\mathbf{x}\,| \leq \alpha\, c.$$

La seminorma definita dal funzionale

$$p_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) := \inf\{\, \alpha \;\mid \alpha > 0,\, \alpha^{-1}\,\mathbf{x} \in \mathcal{M}\}\,,$$

è detta il **funzionale di** MINKOWSKI [14] dell'insieme $\mathcal{M}$ convesso, bilanciato ed assorbente.

Una famiglia di seminorme $\{p_\alpha\,,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ sullo spazio lineare $\mathcal{X}$ soddisfa l'assioma di separazione se in corrispondenza di un qualsiasi $\mathbf{x}_o \in \mathcal{X}$ esiste una seminorma p_{α_o} della famiglia tale che $p_{\alpha_o}(\mathbf{x}_o) \neq 0$.

La famiglia di seminorme induce una **topologia separante** su $\mathcal{X}$ definendo

- **intorno** del vettore nullo $\mathbf{o} \in \mathcal{X}$, un insieme del tipo

  $$\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \,:\, p_{\alpha_i}(\mathbf{x}) \leq c_i\}\,,$$

  dove $\{p_{\alpha_i}\}$ è una sottofamiglia finita di seminorme e $\{c_i\}$ è un corrispondente insieme di numeri positivi. L'insieme $\mathcal{U}$ è convesso, bilanciato ed assorbente.

[14] HERMANN MINKOWSKI (1864-1909).

- **intorno** di un vettore $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, il traslato di $\mathcal{U}$ e cioè un insieme del tipo $\mathbf{x} + \mathcal{U}$.

Si definiscono quindi **aperti** della topologia i sottoinsiemi che contengono un intorno di ogni loro punto. Essi soddisfano le proprietà assiomatiche di insieme aperto (vedi [29] prop. I.1.3).

Lo spazio topologico così definito è uno spazio lineare topologico che, per la proprietà degli intorni, viene detto uno **spazio lineare topologico localmente convesso** (**STLC**).

3. SPAZI METRICI

Uno **spazio metrico** è una coppia $\{\mathcal{X}, d\}$ costituita da un insieme $\mathcal{X}$ e da una funzione $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mapsto \Re$ detta la **metrica**, o **distanza** tale che

$$\begin{cases} d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geq 0 \quad \text{e} \quad d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \iff \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \,, \\ d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \,, \\ d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) \leq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \quad \text{diseguaglianza triangolare} \,. \end{cases}$$

La metrica d induce una topologia separante in $\mathcal{X}$ definendo gli aperti $\mathcal{O}$ come gli insiemi tali che per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ esiste una palla aperta

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, r) := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{X} \; : \; d(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) < r\} \subset \mathcal{X} \quad ,$$

di centro $\mathbf{x}$ e raggio r contenuta in $\mathcal{O}$.

In uno spazio metrico la topologia è perfettamente individuata dalle successioni convergenti. Ciò non accade in generale, infatti

- Negli spazi topologici le topologie possono essere distinte pur essendo coincidenti le successioni convergenti.

Una successione $\{\mathbf{x}_n\}$ di elementi di uno spazio metrico converge ad un elemento limite $\mathbf{x}$ se

$$\lim_{n \to \infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \to 0 \,.$$

In virtù della diseguaglianza triangolare, ogni successione convergente soddisfa il **criterio di convergenza di** CAUCHY [15]

$$\lim_{n,m\to\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) \to 0\,.$$

Una successione che soddisfa tale criterio è detta una **successione di** CAUCHY.

- Uno spazio metrico $\mathcal{X}$ è detto **completo** se ogni successione di CAUCHY converge a $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.
- Uno spazio metrico $\mathcal{X}$ è detto **sequenzialmente compatto** se ogni successione di punti di $\mathcal{X}$ ha un valore di accumulazione in $\mathcal{X}$.
- Uno spazio metrico $\mathcal{X}$ è detto **relativamente sequenzialmente compatto** se ogni successione in $\mathcal{X}$ ammette una sottosuccessione di CAUCHY.
- Un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ è detto **sequenzialmente compatto** se ogni successione di punti di $\mathcal{S}$ ha un valore di accumulazione in $\mathcal{S}$.
- Un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ è detto **relativamente sequenzialmente compatto** se ogni successione in $\mathcal{S}$ ha un valore di accumulazione in $\mathcal{X}$, cioè se la chiusura $\overline{\mathcal{S}}$ è **sequenzialmente compatta**.

Osservazione 3.1. Si noti la differenza delle definizioni di spazio e di sottoinsieme **relativamente sequenzialmente compatto**. Da esse si deduce che se il sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ è relativamente sequenzialmente compatto allora tale sarà anche il sottospazio $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ considerato come spazio metrico autonomo. Se lo spazio metrico $\mathcal{X}$ è completo, allora vale il viceversa. ■

Il teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS può essere enunciato affermando che ogni sottoinsieme non vuoto e limitato di $\Re$ è sequenzialmente compatto.

Una versione generalizzata del teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS pone in relazione la nozione di compattezza e quella di compattezza sequenziale ([47], teor. 1.5.4).

- Uno spazio topologico di HAUSDORFF compatto è sequenzialmente compatto.
- Uno spazio topologico di HAUSDORFF con base contabile che è sequenzialmente compatto è compatto.

[15] AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857) professore di matematica all'Ecole Polytechnique, alla Sorbona ed al Collège de France, uno dei maggiori matematici di ogni tempo.

- Uno spazio metrico $\mathcal{X}$ è detto **totalmente limitato** ovvero **precompatto** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ε**-reticolo** su $\mathcal{X}$ e cioè un ricoprimento finito di $\mathcal{X}$ consistente di palle aperte di raggio $\varepsilon > 0$.
- Un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ di spazio metrico $\mathcal{X}$ è detto **totalmente limitato** (**precompatto**) se tale è il sottospazio $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$.

Si noti che la precompattezza non è una **proprietà topologica**.
Vale il seguente

Proposizione 3.1. Teorema di HAUSDORFF. *Per uno spazio metrico* $\mathcal{X}$ *le proprietà*

$i)$ $\mathcal{X}$ è compatto,

$ii)$ $\mathcal{X}$ è sequenzialmente compatto,

$iii)$ $\mathcal{X}$ è precompatto e completo,

sono equivalenti (vedi p.e. [23] cap. III.17 e [25], teor. 4.2.7 e 4.2.9). □

L'equivalenza delle due ultime affermazioni è dovuta a M. FRÉCHET. Sono inoltre equivalenti le proprietà

- $\mathcal{X}$ è relativamente sequenzialmente compatto,
- $\mathcal{X}$ è precompatto,

e per un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ le proprietà

- $\mathcal{S}$ è relativamente compatto,
- $\mathcal{S}$ è relativamente sequenzialmente compatto.

Per un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ di uno spazio metrico $\mathcal{X}$ si ha poi che:

- Ogni sottoinsieme compatto $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ è chiuso in $\mathcal{X}$.
- Se lo spazio metrico $\mathcal{X}$ è compatto, ogni sottoinsieme chiuso $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ è compatto.
- Se lo spazio metrico $\mathcal{X}$ è completo, ogni sottoinsieme chiuso $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ è un sottospazio completo.
- Un sottospazio $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ completo è chiuso in $\mathcal{X}$.
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ relativamente compatto $\Rightarrow$ $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ precompatto.
- $\mathcal{X}$ completo e $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ precompatto $\Rightarrow$ $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ relativamente compatto.

Nelle ultime due proposizioni la relativa compattezza può essere sostituita dalla relativa compattezza sequenziale.

Siano $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ spazi metrici.

- Un'applicazione biunivoca $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è detta una **isometria** tra gli spazi metrici $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ se

$$d_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = d_{\mathcal{X}}(\mathbf{T}\mathbf{x}_1, \mathbf{T}\mathbf{x}_2) \quad \forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}\,.$$

- Un'applicazione biunivoca $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è detta un'**equivalenza uniforme** tra gli spazi metrici $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ se

$$\begin{cases} d_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \le c_1\, d_{\mathcal{X}}(\mathbf{T}\mathbf{x}_1, \mathbf{T}\mathbf{x}_2)\,, \\ d_{\mathcal{X}}(\mathbf{T}\mathbf{x}_1, \mathbf{T}\mathbf{x}_2) \le c_2\, d_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\,, \quad \forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}\,, \end{cases}$$

con c_1, c_2 costanti positive.

■ Uno spazio metrico $\mathcal{X}$ è detto **separabile** se esiste un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ numerabile e denso in $\mathcal{X}$

Vale inoltre il seguente risultato (vedi p.e. [25] lemma. 4.1.4).

Proposizione 3.2. *In uno spazio metrico ogni insieme compatto è chiuso e limitato.* □

Poichè ogni spazio lineare normato di dimensione finita è isomorfo ad $\Re^n$ vale il seguente risultato (vedi p.e. [25] coroll. 4.4.4).

Proposizione 3.3. *Un sottoinsieme non vuoto di uno spazio normato $\mathcal{X}$ di dimensione finita è chiuso e limitato se e solo se è compatto.* □

Molti risultati di esistenza e tecniche di soluzione iterativa di problemi non lineari in spazi metrici sono basati su un famoso risultato dovuto a BANACH [16] . (vedi p.e. [39] teor. 5.1 e, per una versione generalizzata [23] teor. 10.1.1).

Proposizione 3.4. Teorema del punto unito di BANACH. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio metrico non vuoto e completo e sia $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ un'applicazione che gode della* **proprietà di contrazione**

$$d(\mathbf{T}(\mathbf{x}), \mathbf{T}(\mathbf{y})) \le \alpha\, d(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,, \quad \alpha < 1\,, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}\,.$$

Allora il problema di **punto unito**

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,,$$

ammette un'unica soluzione.

[16] STEFAN BANACH (1892-1945) eminente matematico polacco cui sono dovuti i più importanti contributi alla moderna analisi funzionale.

Dim. La proprietà di contrazione implica che l'applicazione $\mathbf{T}$ è continua. Sia allora $\mathbf{x}_o \in \mathcal{X}$ e definiamo induttivamente la successione

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n) \quad \text{e cioè} \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}^n(\mathbf{x}_o)\,,$$

dove $\mathbf{T}^n$ è la n-esima iterata di $\mathbf{T}$.

Per induzione si ha che

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \le \alpha^n\, d(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_1)\,.$$

In virtù della diseguaglianza triangolare risulta

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+k}) \le d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + \ldots + d(\mathbf{x}_{n+k-1}, \mathbf{x}_{n+k}) \le (\alpha^n + \ldots + \alpha^{n+k-1})\, d(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_1)\,.$$

Essendo $\alpha < 1$ la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ converge e pertanto la somma parziale $\alpha^n + \ldots + \alpha^{n+k-1}$ tende a zero per $n \to \infty$. La successione $\{\mathbf{x}_n\}$ è quindi di CAUCHY e la completezza dello spazio $\mathcal{X}$ assicura che esiste $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}\,.$$

Infine la continuità di $\mathbf{T}$ mostra che

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{T}(\mathbf{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}\,,$$

e l'asserto concernente l'esistenza è dimostrato. L'unicità segue quindi osservando che se $\mathbf{T}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ con $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ allora

$$\|\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,\| = \|\,\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{T}\mathbf{y}\,\| \le \alpha\,\|\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,\| \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{y}\,,$$

essendo $\alpha < 1$. $\square$

L'idea alla base del teorema del punto unito risale a J. LIOUVILLE [17] ed è stata poi estesa da E. PICARD [18] cui è dovuto un metodo costruttivo di approssimazioni successive per la soluzione della equazione differenziale $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x,y)$ con la condizione iniziale $y(x_o) = y_o$ ed $f(x,y)$ continua

[17] JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) professore di analisi al Collège de France.

[18] CHARLES EMILE PICARD (1856-1941) professore di analisi alla Sorbona e segretario permanente all'Accadémie des Sciences.

secondo LIPSCHITZ [19] : $|\, f(x, y_1) - f(x, y_2) \,| \le M \,|\, y_1 - y_2 \,|$ (vedi p.e. [25], teor. 2.11.9).

I seguenti semplici risultati sono spesso utili nelle dimostrazioni.

■ **Principi di estensione**
Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi metrici con $f, g \in \mathrm{C}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ funzioni continue e sia $\mathcal{A}$ è un sottoinsieme denso in $\mathcal{X}$, cioè tale che $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{X}$. Allora

- **estensione delle eguaglianze**:

$$i) \quad f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,,$$

- **estensione delle diseguaglianze**:

$$ii) \quad f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,.$$

Per dimostrare l'implicazione $i)$ basta osservare che dalla continuità di $f - g$ segue che il sottoinsieme $(f - g)^{-1}(\mathbf{o}) \subseteq \mathcal{X}$ è chiuso. Essendo poi $\mathcal{A} \subseteq (f - g)^{-1}(\mathbf{o}) \subseteq \mathcal{X}$ risulta $\overline{\mathcal{A}} = (f - g)^{-1}(\mathbf{o}) = \mathcal{X}$. Un analogo argomento dimostra la $ii)$.

4. SPAZI NORMATI

Uno **spazio normato** $\mathcal{X}$ è uno spazio lineare in cui è definito un funzionale $\|\cdot\|$ detto **norma** che gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \|\,\mathbf{u}\,\| \ge 0 & \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{X} \quad \text{con} \qquad \|\,\mathbf{u}\,\| = \mathbf{o} \iff \mathbf{u} = \mathbf{o}\,, \\ \|\,\alpha\,\mathbf{u}\,\| = |\,\alpha\,|\,\|\,\mathbf{u}\,\| & \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{X}, \quad \forall\, \alpha \in \Re\,, \\ \|\,\mathbf{u} + \mathbf{v}\,\| \le \|\,\mathbf{u}\,\| + \|\,\mathbf{v}\,\| & \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{X} \qquad \text{diseguaglianza triangolare}\,. \end{cases}$$

Uno spazio normato è uno spazio topologico lineare. Infatti:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_n \to \mathbf{u} \;\Rightarrow\; \|\,\mathbf{u}_n\,\| \to \|\,\mathbf{u}\,\|\,, \\ \mathbf{u}_n \to \mathbf{u}\,, \quad \alpha_n \to \alpha \;\Rightarrow\; \alpha_n\,\mathbf{u}_n \to \alpha\,\mathbf{u}\,, \\ \mathbf{u}_n \to \mathbf{u}\,, \quad \mathbf{v}_n \to \mathbf{v} \;\Rightarrow\; \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n \to \mathbf{u} + \mathbf{v}\,. \end{cases}$$

[19] RUDOLPH LIPSCHITZ (1832-1903) professore di matematica all'Università di Bonn.

La metrica invariante rispetto alle traslazioni ed omogenea

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| ,$$

indotta dalla norma consente di definire la nozione di **convergenza forte** di una successione $\{\mathbf{u}_n\} \in \mathcal{X}$ ad un elemento $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X}$:

$$\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}_\infty \iff \lim_{n\to\infty} \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty \| \to 0 .$$

Un particolare spazio normato è $\Re^n$ con la norma euclidea.

- Due spazi normati $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono detti **equivalenti** se esiste un **omeomorfismo lineare** da $\mathcal{X}$ su $\mathcal{Y}$ (e quindi da $\mathcal{Y}$ su $\mathcal{X}$) e cioè una corrispondenza biunivoca lineare continua con l'inversa.

Si noti la proprietà generale ([22] teor. 4.3.3).

- Due qualsiasi norme su uno spazio lineare $\mathcal{X}$ di **dimensione finita** sono tra loro **equivalenti**. Sussitono cioè le diseguaglianze

$$\| \mathbf{x} \|_1 \le c \| \mathbf{x} \|_2 , \quad \| \mathbf{x} \|_2 \le \alpha \| \mathbf{x} \|_1 ,$$

  con c e α costanti positive.

4.1. Spazi di Banach

Uno spazio normato $\mathcal{X}$ **completo** è detto uno **spazio di** BANACH.

Ogni successsione di CAUCHY $\{\mathbf{u}_n\}$ di elementi di $\mathcal{X}$ converge quindi ad un elemento $\mathbf{u}_\infty$ dello spazio $\mathcal{X}$:

$$\lim_{n,m\to\infty} \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m \|_{\mathcal{X}} \to 0 \;\Rightarrow\; \exists\, \mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X} \; : \; \lim_{n\to\infty} \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty \|_{\mathcal{X}} \to 0 .$$

Sia $\mathcal{A}$ un insieme e $\mathcal{Y}$ uno spazio lineare normato. Un'applicazione $\mathbf{f}$ di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{Y}$ è detta **limitata** se $\mathbf{f}(\mathcal{A})$ è limitato in $\mathcal{Y}$ e cioè se

$$\| \mathbf{f} \| := \sup \{ \| \mathbf{f}(\mathbf{x}) \|_{\mathcal{Y}} \; : \; \mathbf{x} \in \mathcal{A} \} < +\infty ,$$

L'insieme di tali applicazioni è uno spazio lineare normato $\mathcal{B}(\mathcal{A};\mathcal{Y})$.

Si ha che ([23] teor. 7.1.3)

- Se lo spazio $\mathcal{Y}$ è di BANACH allora anche lo spazio $\mathcal{B}(\mathcal{A};\mathcal{Y})$ è di BANACH.

Sia $\mathcal{X}$ è uno spazio metrico e $\mathcal{Y}$ uno spazio lineare normato. Detto $C(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ lo spazio lineare delle applicazioni continue di $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$, consideriamo lo spazio delle applicazioni continue e limitate di $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$, definito dall'intersezione

$$C^{\infty}(\mathcal{X};\mathcal{Y}) := C(\mathcal{X};\mathcal{Y}) \cap \mathcal{B}(\mathcal{X};\mathcal{Y}) .$$

Allora ([23] teor. 7.2.1)

- Il sottospazio $C^{\infty}(\mathcal{X};\mathcal{Y}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ è chiuso. In altri termini il limite uniforme di funzioni continue e limitate è continuo.

Lo spazio $C^{\infty}(\mathcal{X};\Re)$ è un'algebra sul campo reale e risulta $\| \mathbf{f}\,\mathbf{g} \| \le \| \mathbf{f} \| \, \| \mathbf{g} \|$.

- Si dice che un sottoinsieme $\mathcal{S}$ di $\mathcal{B}(\mathcal{X};\Re)$ **separa** i punti di $\mathcal{X}$ se per ogni coppia $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ di punti distinti di $\mathcal{X}$ esiste una funzione $\mathbf{f} \in \mathcal{B}(\mathcal{X};\Re)$ tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$.

Si noti che

- se lo spazio metrico $\mathcal{X}$ è compatto allora risulta $C(\mathcal{X};\mathcal{Y}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ e pertanto $C^{\infty}(\mathcal{X};\mathcal{Y}) = C(\mathcal{X};\mathcal{Y})$.

Infatti per $\mathbf{f} \in C(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ l'immagine $\mathbf{f}(\mathcal{X})$, essendo compatta in $\mathcal{Y}$, risulta ivi totalmente limitata e quindi limitata. Si può allora enunciare il seguente notevole risultato di approssimazione ([23] teor. 7.3.1) dovuto a M.H. STONE [20].

Proposizione 4.1. Teorema di STONE-WEIERSTRASS**.** *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio metrico compatto. Se una subalgebra $\mathcal{S}$ di $C(\mathcal{X};\Re)$ contiene le funzioni costanti e separa i punti di $\mathcal{X}$, allora $\mathcal{S}$ è densa nello spazio di* BANACH $C(\mathcal{X};\Re)$. □

- Sia $\mathcal{X}$ uno spazio metrico e $\mathcal{F}$ uno spazio normato.
- Un sottoinsieme $\mathcal{S}$ di $\mathcal{B}(\mathcal{X};\mathcal{F})$ è detto **equicontinuo** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_{\varepsilon} > 0$ tale che

$$\text{dist}\,(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \delta_{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \| \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \|_{\mathcal{F}} < \varepsilon ,$$

  per ogni $\mathbf{f} \in \mathcal{S}$ con δ_{ε} indipendente da f.

[20] MARSHALL HARVEY STONE (1903-1989) professore di matematica ad Harvard ed all'Università di Chicago.

Un fondamentale risultato dovuto a G. ASCOLI [21] e C. ARZELÀ [22] è il seguente ([23] teor. 7.5.7)

Proposizione 4.2. Teorema di ASCOLI-ARZELÀ**.** *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio metrico compatto e $\mathcal{F}$ uno spazio di* BANACH*. Affinchè un sottoinsieme $\mathcal{S}$ dello spazio di* BANACH *$\mathrm{C}(\mathcal{X};\mathcal{F})$ sia relativamente compatto è necessario e sufficiente che l'insieme $\mathcal{S}$ sia equicontinuo e che per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ l'insieme dei valori $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{f} \in \mathcal{S}$ sia relativamente compatto in $\mathcal{F}$.* □

Si noti che la compattezza di $\mathcal{X}$ implica che $\mathrm{C}(\mathcal{X};\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{X};\mathcal{F})$ e la completezza di $\mathcal{F}$ implica quella di $\mathcal{B}(\mathcal{X};\mathcal{F})$. Essendo chiuso in $\mathcal{B}(\mathcal{X};\mathcal{F})$ il sottospazio $\mathrm{C}(\mathcal{X};\mathcal{F})$ è allora uno spazio di BANACH.

4.2. Operatori lineari limitati

Siano $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ spazi lineari normati.

- $\mathrm{L}\left\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\right\}$ è lo spazio lineare delle **applicazioni lineari limitate** $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ con $\operatorname{dom}\mathbf{A} = \mathcal{X}$, cioè le applicazioni lineari tali che

$$\|\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\|_{\mathcal{Y}} \le c\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}.$$

- $\mathcal{L}\left\{\mathcal{X},\mathcal{Y};\mathcal{Z}\right\}$ è lo spazio lineare delle **funzioni bilineari limitate** $\mathbf{f} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Z}$ con $\operatorname{dom}\mathbf{f} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
  Le funzioni $\mathbf{f} \in \mathcal{L}\left\{\mathcal{X},\mathcal{Y};\mathcal{Z}\right\}$ sono separatamente lineari nelle variabili $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, risulta cioè per ogni $\alpha,\beta \in \Re$, $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$, $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2 \in \mathcal{Y}$

$$\mathbf{f}(\alpha\,\mathbf{x},\beta\,\mathbf{y}) = \alpha\,\beta\,\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_2) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2)\,.$$

  La limitatezza è espressa dalla diseguaglianza

$$\|\,\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\|_{\mathcal{Z}} \le c\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{y}\,\|_{\mathcal{Y}}.$$

Se $\mathcal{Z} = \Re$ allora le funzioni di $\mathcal{L}\left\{\mathcal{X},\mathcal{Y};\Re\right\}$ sono detti **funzionali bilineari** (o **forme bilineari**) reali.

---

[21] GIULIO ASCOLI (1843-1896).

[22] CESARE ARZELÀ (1847-1912).

La norma di un operatore lineare $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\right\}$ è definita nei modi equivalenti:

$$\begin{cases} \|\,\mathbf{A}\,\| = \sup\left\{\|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}} \;:\; \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} \le 1\right\}, \\ \|\,\mathbf{A}\,\| = \sup\left\{\|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}} \;:\; \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} = 1\right\}, \\ \|\,\mathbf{A}\,\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \dfrac{\|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}}}{\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}}\,. \end{cases}$$

Nell'ultimo $\sup$ si esclude ovviamente il valore $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Analogamente si definisce la norma di $\mathbf{f} \in \mathcal{L}\left\{\mathcal{X},\mathcal{Y};\mathcal{Z}\right\}$

$$\|\,\mathbf{f}\,\| = \sup\left\{\|\,\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\|_{\mathcal{Z}} \;:\; \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{y}\,\|_{\mathcal{Y}} \le 1\right\}.$$

Vale il seguente importante risultato.

Proposizione 4.3. Equivalenza tra limitatezza e continuità. *Una trasformazione lineare* $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ *da uno spazio normato* $\mathcal{X}$ *in uno spazio normato* $\mathcal{Y}$ *è continua se e solo se è limitata e cioè*

$$\begin{aligned} &\|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}} \le \alpha\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}},\ \alpha > 0 \iff \\ &\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta(\varepsilon)\ :\ \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} < \delta(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dim. La limitatezza implica banalmente la continuità. Viceversa se $\mathbf{A}$ è continua allora $\sup\{\|\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}}/\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}\} < \infty$. Infatti, se così non fosse, esisterebbe una successsione $\{\mathbf{x}_n\}$ tale che $\lim_{n\to\infty}\{\|\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_n\,\|_{\mathcal{Y}}/\|\,\mathbf{x}_n\,\|_{\mathcal{X}}\} = \infty$. Ponendo $\mathbf{v}_n = \mathbf{x}_n/\|\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_n\,\|_{\mathcal{Y}}$ si avrebbe che

$$\|\,\mathbf{v}_n\,\|_{\mathcal{X}} \to 0\,, \qquad \|\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_n\,\|_{\mathcal{Y}} = 1\,,$$

in contrasto con l'ipotesi di continuità. □

4.3. Operatori lineari compatti

La proprietà di compattezza consente di individuare una classe di operatori lineari tra due spazi normati $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ che godono di importanti proprietà.

- Diremo che un operatore **lineare** $\mathbf{L} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è **compatto** se trasforma ogni insieme limitato di $\mathcal{X}$ in un insieme precompatto in $\mathcal{Y}$

$$\boxed{\mathcal{A}\ \text{ limitato in }\ \mathcal{X}\ \Rightarrow\ \mathbf{L}(\mathcal{A})\ \text{ precompatto in }\ \mathcal{Y}\,.}$$

Equivalentemente può definirsi compatto un operatore lineare $\mathbf{L} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ tale che per ogni successione limitata $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathcal{X}$ la successione $\{\mathbf{L}\mathbf{x}_n\} \subset \mathcal{Y}$ ammette una sottosuccessione convergente in $\mathcal{Y}$.

In altri termini un operatore lineare $\mathbf{L} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è compatto se e solo se

$$\boxed{\mathcal{A} \quad \text{limitato in} \quad \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathbf{L}(\mathcal{A}) \quad \text{sequenzialmente precompatto in} \;\; \mathcal{Y}\,.}$$

Si noti che un operatore lineare $\mathbf{L} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ compatto è certamente continuo in quanto per ogni limitato $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ risulta

$$\mathbf{L}(\mathcal{A}) \quad \text{precompatto} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{L}(\mathcal{A}) \quad \text{totalmente limitato} \;\Rightarrow\; \mathbf{L}(\mathcal{A}) \quad \text{limitato}\,,$$

e dunque dalla proposizione 4.3 segue la continuità di $\mathbf{L}$.

La compattezza è quindi una proprietà più forte della continuità ed infatti è anche detta **completa continuità**.

E′ facile verificare che sussistono le seguenti proprietà.

Proposizione 4.4. Composizione. *Siano $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{W}$ spazi lineari normati e $\mathbf{A} \in L\{\mathcal{Z};\mathcal{W}\}$ e $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{Y};\mathcal{Z}\}$, $\mathbf{C} \in L\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$ trasformazioni lineari continue con $\mathbf{B}$ compatta. Allora la trasformazione $\mathbf{ABC}$ è compatta.* □

Proposizione 4.5. Dimensione finita. *Sia $\mathbf{A}$ una trasformazione lineare da uno spazio normato $\mathcal{X}$ in uno spazio normato $\mathcal{Y}$. Se è soddisfatta una delle condizioni*

$$\dim \operatorname{dom} \mathbf{A} < +\infty\,, \qquad \dim \operatorname{Im} \mathbf{A} < +\infty\,,$$

allora la trasformazione $\mathbf{A}$ è compatta. □

In uno spazio normato non è possibile definire la nozione di ortogonalità.

E′ possibile però dimostrare che esistono elementi **quasi ortogonali** ad un sottospazio lineare chiuso (vedi [29] sez. III.2).

Proposizione 4.6. Lemma di F. Riesz. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio normato e $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ un sottospazio lineare chiuso. Allora*

$$\forall\, 0 < \varepsilon < 1 \quad \exists\, \mathbf{x}_\varepsilon \in \mathcal{X} \; : \; \begin{cases} \|\, \mathbf{x}_\varepsilon \,\|_{\mathcal{X}} = 1\,, \\[2ex] \inf\limits_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}} \|\, \mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{m} \,\|_{\mathcal{X}} \geq \varepsilon\,. \end{cases}$$

Dim. Essendo $\mathcal{M}$ chiuso per ogni $\mathbf{x}_o \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{M}$ si ha

$$\alpha = \inf_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}} \| \mathbf{x}_o - \mathbf{m} \|_{\mathcal{X}} > 0 \,.$$

Essendo $\alpha \, \varepsilon^{-1} > \alpha$ esiste $\mathbf{m}_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tale che

$$\| \mathbf{x}_o - \mathbf{m}_\varepsilon \|_{\mathcal{X}} \leq \alpha \, \varepsilon^{-1} \,.$$

Ponendo allora $\mathbf{x}_\varepsilon = \dfrac{\mathbf{x}_o - \mathbf{m}_\varepsilon}{\| \mathbf{x}_o - \mathbf{m}_\varepsilon \|_{\mathcal{X}}}$ risulta $\| \mathbf{x}_\varepsilon \|_{\mathcal{X}} = 1$ e

$$\| \mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{m} \|_{\mathcal{X}} = \| \mathbf{x}_o - \mathbf{m}_\varepsilon \|_{\mathcal{X}}^{-1} \| \mathbf{x}_o - (\mathbf{m}_\varepsilon - \| \mathbf{x}_o - \mathbf{m}_\varepsilon \|_{\mathcal{X}} \mathbf{m}) \|_{\mathcal{X}} \geq$$
$$\geq \| \mathbf{x}_o - \mathbf{m}_\varepsilon \|_{\mathcal{X}}^{-1} \alpha \geq (\alpha \, \varepsilon^{-1})^{-1} \alpha = \varepsilon \,.$$

L'elemento $\mathbf{x}_\varepsilon$ è quindi **quasi ortogonale** a $\mathcal{M}$. □

Il lemma di RIESZ [23] fornisce come conseguenza immediata la seguente caratterizzazione degli spazi normati di dimensione finita (vedi [23] teor. 5.9.4, [25] teor. 4.4.6).

Proposizione 4.7. Il teorema di F. RIESZ**.** *Uno spazio normato $\mathcal{X}$ in cui la sfera unitaria è compatta ha dimensione finita.* □

Ogni spazio normato di dimensione finita è equivalente ad $\Re^n$ e la sfera unitaria in $\Re^n$ è compatta in forza del teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS. Dal teorema di RIESZ segue quindi che

- la **compattezza della sfera unitaria** caratterizza gli spazi normati di **dimensione finita**.

4.4. Spazi duali

Ad ogni spazio normato $\mathcal{X}$ può essere associato uno **spazio duale** $\mathcal{X}'$ definito come l'insieme dei funzionali lineari $f \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X}, \Re\right\}$ limitati su $\mathcal{X}$,

$$|\, f(\mathbf{v}) \,| \leq \alpha \, \| \mathbf{v} \|_{\mathcal{X}} \,, \quad \alpha > 0 \quad \forall \, \mathbf{v} \in \mathcal{X} \,.$$

[23] FRIEDRICH RIESZ (1880-1956) matematico ungherese cui sono dovuti fondamentali risultati di analisi funzionale.

Lo spazio $\mathcal{X}'$ è detto il **duale topologico** di $\mathcal{X}$ in quanto la sua definizione coinvolge la struttura topologica di $\mathcal{X}$ richiedendo che i funzionali siano continui.

Denoteremo col simbolo $\langle \cdot , \cdot \rangle$ il **prodotto di dualità** tra gli spazi $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ (ovvero su $\mathcal{X}' \times \mathcal{X}$) definito da

$$\langle f , \mathbf{v} \rangle := f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{X}' .$$

Un funzionale $f \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X}, \Re\right\}$ è un particolare operatore lineare limitato e quindi la norma in $\mathcal{X}'$ è definita da

$$\| f \|_{\mathcal{X}'} = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{X}} \left\{ | f(\mathbf{u}) | \; : \; \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{X}} \leq 1 \right\} .$$

Il risultato enunciato alla fine di 4.1 implica in particolare che

- Se $\mathcal{X}$ è uno spazio normato il suo duale $\mathcal{X}'$ è uno spazio di BANACH (vedi [29], pag 111, teor. IV.7.1).

4.5. Spazi riflessivi

Denoteremo con $\mathcal{X}''$ il **biduale** dello spazio normato $\mathcal{X}$, definito come il duale di $\mathcal{X}'$ con la norma

$$\| f^* \|_{\mathcal{X}''} = \sup_{f \in \mathcal{X}'} \left\{ | f^*(f) | \; : \; \| f \|_{\mathcal{X}'} \leq 1 \right\} .$$

Ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$ definisce un funzionale lineare continuo $f^*_{\mathbf{u}} \in \mathcal{X}''$ ponendo

$$\langle f^*_{\mathbf{u}} , f \rangle := \langle f , \mathbf{u} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{X}' .$$

Sussiste il seguente fondamentale risultato.

- L'**immersione** $\mathbf{J} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}''$ definita da $\mathbf{J}(\mathbf{u}) := f^*_{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{X}$ è un'**isometria** lineare e cioè risulta

$$\begin{aligned} \| \mathbf{J}(\mathbf{u}) \|_{\mathcal{X}''} &:= \sup_{f \in \mathcal{X}'} \left\{ | \langle \mathbf{J}(\mathbf{u}) , f \rangle | \; : \; \| f \|_{\mathcal{X}'} \leq 1 \right\} = \\ &= \sup_{f \in \mathcal{X}'} \left\{ | \langle f , \mathbf{u} \rangle | \; : \; \| f \|_{\mathcal{X}'} \leq 1 \right\} = \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{X}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{X} . \end{aligned}$$

Per la dimostrazione dell'ultima eguaglianza vedi la proposizione 5.6.

Ponendo $\mathbf{u} \equiv \mathbf{Ju} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{X}$ lo spazio lineare normato $\mathcal{X}$ può dunque essere identificato con un sottospazio lineare di $\mathcal{X}''$.

Poichè il duale di uno spazio normato $\mathcal{X}$ è completo ne segue che

- Se l'immersione canonica $\mathbf{J} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}''$ è suriettiva, lo spazio normato $\mathcal{X}$ è detto **riflessivo**. e può identificarsi col biduale $\mathcal{X}''$.
- Ogni spazio normato **riflessivo** è uno spazio di BANACH.

Sussistono i seguenti risultati notevoli (vedi [41], teor. III.16, coroll. III.18, osserv. I.3 e teor. III.29).

Teorema di KAKUTANI.

- Uno spazio di BANACH $\mathcal{X}$ è **riflessivo** se e solo se la sfera unitaria in $\mathcal{X}$ è **compatta** per la topologia debole.

- Uno spazio di BANACH $\mathcal{X}$ è **riflessivo** se e solo se lo spazio duale $\mathcal{X}'$ è **riflessivo**.

Teorema di JAMES.

- Uno spazio di BANACH $\mathcal{X}$ è **riflessivo** se e solo se nella espressione della norma dello spazio duale $\mathcal{X}'$ l'estremo superiore è attinto e cioè se
$$\| f \|_{\mathcal{X}'} = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \left\{ |\, f(\mathbf{x}) \,| \;:\; \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \leq 1 \right\}.$$

Teorema di MILMAN

- Uno spazio di BANACH $\mathcal{X}$ è **riflessivo** se è **uniformemente convesso** e cioè se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; \left. \begin{array}{l} \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \,, \\ \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \le 1 \,, \; \| \mathbf{y} \|_{\mathcal{X}} \le 1 \,, \\ \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_{\mathcal{X}} > \varepsilon \,, \end{array} \right\} \Rightarrow \left\| \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2} \right\| < 1 - \delta \,.$$

L'uniforme convessità di uno spazio normato è una **proprietà geometrica** e non una **proprietà topologica**. Essa infatti non si conserva se la norma viene sostituita con una ad essa equivalente.

L'uniforme convessità si può enunciare in modo qualitativo affermando che la sfera unitaria dello spazio deve essere "ben tonda".

Ad esempio lo spazio $\Re^2$ è uniformemente convesso per la norma $\| \mathbf{x} \| = (| \mathbf{x}_1 |^2 + | \mathbf{x}_2 |^2)^{1/2}$ ma non per la norma $\| \mathbf{x} \| = | \mathbf{x}_1 | + | \mathbf{x}_2 |$ rispetto alla quale la sfera unitaria non è affatto "tonda" (infatti è quadrata!).

4.6. Sottospazi densi, spazi separabili e complementi ortogonali

Consideriamo un sottospazio $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ di uno spazio normato $\mathcal{X}$ **denso** in $\mathcal{X}$ e cioè tale che $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{X}$. Allora ogni elemento di $\mathcal{X}$ può essere approssimato quanto si voglia, nel senso della norma, mediante elementi di $\mathcal{S}$

$$\forall \, \mathbf{u} \in \mathcal{X} \quad \exists \, \{ \mathbf{u}_n \} \subset \mathcal{S} \;\; : \; \lim_{n \to \infty} \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \|_{\mathcal{X}} = 0 \,.$$

Nelle applicazioni è importante la seguente proprietà che consente di approssimare gli elementi di uno spazio mediante successioni.

- Uno spazio normato $\mathcal{X}$ è detto **separabile** se esiste un sottoinsieme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ numerabile e denso in $\mathcal{X}$, cioè tale che $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{X}$.

Un funzionale lineare $f \in \mathcal{X}'$ è nullo su $\mathcal{X}$ se si annulla su un sottospazio denso in $\mathcal{X}$. Infatti la continuità di $f \in \mathcal{X}'$ assicura che

$$\mathcal{S} \subseteq \operatorname{Ker} f \;\Rightarrow\; \overline{\mathcal{S}} \subseteq \operatorname{Ker} f$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{S} \subseteq \operatorname{Ker} f\,, \\ &\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{X}\,, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \mathcal{X}\,.$$

L'implicazione inversa sarà dimostrata nella proposizione 5.11.

Consideriamo uno spazio normato $\mathcal{X}$ ed il duale $\mathcal{X}'$.

I **complementi ortogonali**, detti anche **annullatori**, dei sottospazi lineari $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ e $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{X}'$ sono rispettivamente i sottospazi lineari $\mathcal{M}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'$ e $\mathcal{N}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}$ definiti da

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\perp} &:= \big\{ \mathbf{x}' \in \mathcal{X}' \;:\; \langle\, \mathbf{x}' , \mathbf{x} \,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{M} \big\}\,, \\ \mathcal{N}^{\perp} &:= \big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \;:\; \langle\, \mathbf{x}' , \mathbf{x} \,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{x}' \in \mathcal{N} \big\}\,. \end{aligned}$$

Si noti esplicitamente che $\mathcal{N}^{\perp}$ è un sottospazio di $\mathcal{X}$ e **non** di $\mathcal{X}'' = (\mathcal{X}')'$.

Per evidenziare ciò taluni autori usano la notazione $\mathcal{N}_{\perp}$ ovvero ${}^{\perp}\mathcal{N}$.

4.7. Spazi quoziente

Sia $\mathcal{L}$ un sottospazio lineare di uno spazio normato $\mathcal{H}$ e consideriamo le varietà lineari $\overline{\mathbf{u}} := \mathbf{u} + \mathcal{L}$. Esse sono classi di equivalenza rispetto alla relazione

$$\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2 \iff \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \mathcal{L}\,.$$

Denotiamo con $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ lo spazio lineare delle varietà $\overline{\mathbf{u}} := \mathbf{u} + \mathcal{L}$ con le operazioni

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}}_1 + \overline{\mathbf{u}}_2 &:= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathcal{L}\,, \quad && \mathbf{u}_1 \in \overline{\mathbf{u}}_1\,, \mathbf{u}_2 \in \overline{\mathbf{u}}_2\,, \\ \alpha\, \overline{\mathbf{u}} &:= \alpha\, \mathbf{u} + \mathcal{L}\,, && \mathbf{u} \in \overline{\mathbf{u}}\,. \end{aligned}$$

Lo spazio quoziente $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ è uno spazio normato con norma definita da

$$\|\, \overline{\mathbf{u}} \,\|_{\mathcal{H}/\mathcal{L}} := \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}} \|\, \mathbf{u} + \mathbf{v} \,\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Si dimostra infatti che il funzionale così definito soddisfa le proprietà assiomatiche della norma (vedi [29], sezione I.11).

Si ha poi che

- Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di BANACH, ed $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ è un sottospazio lineare chiuso, allora lo spazio quoziente $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ è uno spazio di BANACH (vedi [29], sezione I.11).

4.8. Spazi topologici in dualità

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due spazi lineari topologici localmente convessi e $\langle \cdot , \cdot \rangle$ una forma bilineare continua su $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ che gode della **proprietà di separazione**

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{o} , \\ \langle \mathbf{y} , \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathbf{y} = \mathbf{o} . \end{cases}$$

La forma bilineare $\langle \cdot , \cdot \rangle$ è detta **prodotto di dualità** tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Le topologie di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono dette **compatibili con la dualità** se ogni forma lineare continua $f : \mathcal{X} \mapsto \Re$ può essere rappresentata mediante un $\mathbf{y}_f \in \mathcal{Y}$ come $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} , \mathbf{y}_f \rangle$ ed analogamente per le forme continue su $\mathcal{Y}$.

5. TEOREMI DI HAHN-BANACH

La teoria degli spazi di Banach e l'Analisi Convessa sono fondate su un celebrato teorema enunciato da Banach nel 1929 estendendo un precedente risultato di Hahn del 1927.

Una successiva estensione a spazi lineari sul campo complesso è dovuta a Bohnenblust e Sobczyk nel 1938.

Si farà qui riferimento solo a spazi lineari reali.

La dimostrazione è basata su un assioma fondamentale della teoria degli insiemi che è di seguito illustrato nelle proposizioni 5.1 e 5.2.

5.1. Lemma di Zorn ed Assioma della scelta

Sia $\mathcal{X}$ un insieme su cui è definita una **relazione d'ordine parziale** espressa da $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ con le proprietà

$$\begin{cases} \mathbf{a} \prec \mathbf{a} , & \text{riflessività,} \\ \mathbf{a} \prec \mathbf{b} , \; \mathbf{b} \prec \mathbf{a} \;\Rightarrow\; \mathbf{a} = \mathbf{b} , & \text{antisimmetria,} \\ \mathbf{a} \prec \mathbf{b} , \; \mathbf{b} \prec \mathbf{c} \;\Rightarrow\; \mathbf{a} \prec \mathbf{c} , & \text{transitività.} \end{cases}$$

- Un insieme $\mathcal{X}$ è **totalmente ordinato** dalla relazione $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ se per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{X}$ risulta vera almeno una delle relazioni $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ o $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$.
- Un elemento $\mathbf{m} \in \mathcal{X}$ è un **maggiorante** se $\mathbf{p} \prec \mathbf{m}$ per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{X}$.

- Un elemento $\mathbf{m} \in \mathcal{X}$ è **massimale** se $\mathbf{p} \in \mathcal{X}\,,\ \mathbf{m} \prec \mathbf{p} \ \Rightarrow\ \mathbf{p} = \mathbf{m}\,.$

Proposizione 5.1. Lemma di ZORN. *Sia $\mathcal{X}$ un insieme non vuoto parzialmente ordinato tale che ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ammette un maggiorante. Allora $\mathcal{X}$ contiene almeno un elemento massimale.* □

L'affermazione contenuta nel lemma di ZORN [24] è equivalente al seguente assioma formulato da E. ZERMELO [25] nel 1908 (vedi ad esempio [25]).

Proposizione 5.2. Assioma della scelta. *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti. Esiste allora una mappa f definita su $\mathcal{F}$ tale che $f(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$ per ogni $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$.* □

5.2. Teorema di Hahn-Banach e proprietà di separazione

Sia $\mathcal{X}$ uno spazio lineare sul campo reale. Un funzionale $p : \mathcal{X} \mapsto \Re$ è detto **sublineare** se soddisfa le proprietà

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \le p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})\,, & \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}\,, \quad \text{subadditività} \\ p(\alpha\,\mathbf{x}) = \alpha\, p(\mathbf{x})\,, & \forall\, \alpha \ge 0\,, \quad \text{positiva omogeneità.} \end{cases}$$

Un funzionale sublineare $p : \mathcal{X} \mapsto \Re$ su di uno spazio normato $\mathcal{X}$ è continuo se e solo se è limitato, cioè se

$$|\, p(\mathbf{x})\,| \le c\, \|\, \mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,.$$

La dimostrazione è del tutto simile a quella dell'analogo risultato concernente gli operatori lineari stabilito nella proposizione 4.3.

Il lemma di ZORN consente di pervenire ad un fondamentale teorema dimostrato da STEFAN BANACH nel 1929 (vedi [4], [25] cap. 5 e [29] teor. IV.1).

Proposizione 5.3. Teorema di HAHN-BANACH**- Forma analitica.** *Sia $p : \mathcal{X} \mapsto \Re$ un funzionale sublineare e sia $g : \mathcal{G} \mapsto \Re$ un funzionale lineare definito su un sottospazio lineare $\mathcal{G}$ dello spazio lineare $\mathcal{X}$ tale che*

$$g(\mathbf{x}) \le p(\mathbf{x})\,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{G}\,.$$

---

[24] MAX ZORN (1906-1993) matematico tedesco ebreo, emigrato negli U.S.A. nel 1933 cui è dovuta anche la dimostrazione dell'unicità dei numeri di CAYLEY.

[25] ERNST ZERMELO (1871-1953) matematico tedesco professore a Göttingen cui sono dovuti importanti risultati in teoria degli insiemi.

Diremo che in $\mathcal{G}$ *il funzionale lineare* $g : \mathcal{G} \mapsto \Re$ *è di supporto all'epigrafo di* $p : \mathcal{X} \mapsto \Re$, *definito da*

$$\operatorname{epi} p := \big\{ [\,\mathbf{x}, \lambda\,] \in \mathcal{X} \times \Re \;:\; p(\mathbf{x}) \le \lambda \big\} \,.$$

Esiste allora un funzionale lineare $f : \mathcal{X} \mapsto \Re$ *tale che*

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\,, & \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{G}\,, \\ f(\mathbf{x}) \le p(\mathbf{x})\,, & \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,. \end{cases}$$

Il funzionale lineare $f : \mathcal{X} \mapsto \Re$ *è dunque un prolungamento di* g *su* $\mathcal{X}$. *Esso risulta di supporto all'epigrafo di* $p(\mathbf{x})$ *in tutto* $\mathcal{X}$. □

Il teorema di HAHN-BANACH è una generalizzazione del seguente risultato dimostrato da H. HAHN [26] nel 1927 (vedi [2], [25] teor. 5.3.2, [41] coroll. I.2 e [29] teor. IV.5.1).

Proposizione 5.4. Teorema di HAHN. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio normato ed* $g : \mathcal{G} \mapsto \Re$ *un funzionale lineare limitato definito su un sottospazio lineare* $\mathcal{G} \subset \mathcal{X}$. *Esiste allora un funzionale lineare limitato* $f \in \mathrm{L}\big\{\mathcal{X}, \Re\big\} = \mathcal{X}'$ *tale da prolungare* g *su* $\mathcal{X}$ *senza incrementare la norma:*

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{G}\,, \qquad \|\, f \,\|_{\mathcal{X}} = \|\, g \,\|_{\mathcal{G}}\,,$$

dove

$$\begin{aligned} \|\, f \,\|_{\mathcal{X}} &:= \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \big\{ |\, f(\mathbf{x}) \,| \;:\; \|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} \le 1 \big\}\,, \\ \|\, g \,\|_{\mathcal{G}} &:= \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}} \big\{ |\, g(\mathbf{x}) \,| \;:\; \|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} \le 1 \big\}\,. \end{aligned}$$

Dim. Basta applicare il teorema 5.3 con $p(\mathbf{x}) = \|\, g \,\|_{\mathcal{G}} \,\|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}}$. □

Proposizione 5.5. Corollario. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio normato. Per ogni* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ *esiste* $f_{\mathbf{x}} \in \mathrm{L}\big\{\mathcal{X}, \Re\big\} = \mathcal{X}'$ *tale che*

$$\begin{cases} \|\, f_{\mathbf{x}} \,\|_{\mathcal{X}'} = \|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}}\,, \\ \langle\, f_{\mathbf{x}} \,, \mathbf{x} \,\rangle = \|\, \mathbf{x} \,\|^2_{\mathcal{X}}\,. \end{cases}$$

[26] HANS HAHN (1879-1934).

Dim. Basta applicare la proposizione 5.4 con $\mathcal{G} = \Re\mathbf{x}$ e $g(t\,\mathbf{x}) = t\,\|\,\mathbf{x}\,\|^2_{\mathcal{X}}$, in modo che $\|\,g\,\|_{\mathcal{G}'} = \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}$. □

Proposizione 5.6. Una espressione della norma. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio normato. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ si ha*

$$\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} = \max_{f \in \mathcal{X}'} \big\{ |\,f(\mathbf{x})\,| \;:\; \|\,f\,\|_{\mathcal{X}'} \le 1 \big\}\,.$$

Dim. Osserviamo che per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ si ha

$$\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} \ge \sup_{f \in \mathcal{X}'} \big\{ |\,f(\mathbf{x})\,| \;:\; \|\,f\,\|_{\mathcal{X}'} \le 1 \big\}\,,$$

e che per la proposizione 5.5 esiste $f_{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}'$ tale che $\|\,f_{\mathbf{x}}\,\|_{\mathcal{X}'} = \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}$ e $\langle\, f_{\mathbf{x}}\,, \mathbf{x}\,\rangle = \|\,\mathbf{x}\,\|^2_{\mathcal{X}}$. Per $\mathbf{x} \ne 0$ poniamo $f_o = \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}^{-1} f_{\mathbf{x}}$ così che $\|\,f_o\,\|_{\mathcal{X}'} = 1$ e $\langle\, f_o\,, \mathbf{x}\,\rangle = \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}$. □

Dalla proposizione 5.6 si può dedurre immediatamente la parte del teorema di JAMES, citato alla sezione 4.5 concernente la seguente proprietà.

- In uno spazio di BANACH **riflessivo** $\mathcal{X}$ risulta

$$\|\,f\,\|_{\mathcal{X}'} = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \big\{ |\,f(\mathbf{x})\,| \;:\; \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} \le 1 \big\}\,.$$

  Basta applicare il risultato della proposizione 5.6 sostituendo $\mathcal{X}$ con $\mathcal{X}'$ e $\mathcal{X}'$ con $\mathcal{X}''$. Allora per ogni $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'$ la suriettività dell'isomorfismo isometrico canonico $\mathbf{J} \in \mathrm{L}\big\{\mathcal{X}, \mathcal{X}''\big\}$ assicura che

$$\|\,f\,\|_{\mathcal{X}'} = \max_{f^* \in \mathcal{X}''} \big\{ |\,f^*(f)\,| \;:\; \|\,f^*\,\|_{\mathcal{X}''} \le 1 \big\} = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \big\{ |\,f(\mathbf{x})\,| \;:\; \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} \le 1 \big\}\,.$$

Il teorema di HAHN-BANACH può essere espresso in forma geometrica come proprietà di separazione in senso largo o stretto di due convessi.

A tal fine introduciamo la seguente definizione.

Un **iperpiano** è un sottoinsieme di uno spazio lineare $\mathcal{X}$ definito da

$$\mathcal{L} = \big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \;:\; f(\mathbf{x}) = \alpha \big\}\,,$$

dove f è un funzionale lineare non identicamente nullo ed $\alpha \in \Re$.

In uno spazio normato $\mathcal{X}$ vale la seguente proprietà.

Proposizione 5.7. Iperpiani chiusi. *Un iperpiano di equazione*

$$\mathcal{L} = \big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \ : \ f(\mathbf{x}) = \alpha \big\} \,, \quad \alpha \in \Re \,,$$

è chiuso se e solo se il funzionale lineare $f \in \mathcal{X}'$ *è non nullo e continuo.* □

Dati due insiemi $\mathcal{A}\,, \mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ diremo che l'iperpiano $\mathcal{L}$ separa $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$

- in **senso largo** se

$$f(\mathbf{x}) \leq \alpha \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{A}\,, \quad f(\mathbf{x}) \geq \alpha \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \iff \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}} f(\mathbf{x}) \leq \inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{B}} f(\mathbf{x})\,,$$

- in **senso stretto** se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che

$$f(\mathbf{x}) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{A}\,, \quad f(\mathbf{x}) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \iff \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}} f(\mathbf{x}) < \inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{B}} f(\mathbf{x})\,.$$

Il teorema di HAHN-BANACH conduce alle seguenti proposizioni (vedi [41], teor. I.6 e I.7). Altri importanti risultati ad esse collegati possono trovarsi in [21].

Proposizione 5.8. Separazione in senso largo. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio normato e siano* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *due* **convessi** *non vuoti e disgiunti in* $\mathcal{X}$ *. Se almeno uno di essi è* **aperto** *allora esiste un iperpiano chiuso che li separa in senso largo.* □

Proposizione 5.9. Separazione in senso stretto. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio normato e siano* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *due* **convessi** *non vuoti e disgiunti in* $\mathcal{X}$ *. Se almeno uno di essi è* **chiuso** *e l'altro è* **compatto** *allora esiste un iperpiano chiuso che li separa in senso stretto.* □

La proposizione 5.9 consente di dimostrare che (vedi [41], coroll. I.8)

Proposizione 5.10. Sottospazi densi. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio normato. Se* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$ *è un sottospazio lineare tale che* $\overline{\mathcal{G}} \neq \mathcal{X}$ *, allora esiste un funzionale lineare non nullo* $f \in \mathcal{X}'$ *che si annulla su* $\mathcal{G}$ *.*

Dim. Sia $\mathbf{x}_o \in \mathcal{X} \setminus \overline{\mathcal{G}}$. La proposizione 5.9 con $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{G}}$ e $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_o\}$ assicura che esiste un $f \in \mathcal{X}'$, $f \neq 0$ tale che

$$f(\mathbf{x}) < \alpha < f\ (\mathbf{x}_o) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{G}\,.$$

Allora $f(\lambda\, \mathbf{x}) = \lambda\, f(\mathbf{x}) < \alpha \quad \forall\, \lambda \in \Re$ e dunque $f(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{G}$. □

Un utile criterio di densità è il seguente.

Proposizione 5.11. Condizione di densità. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio normato. Un sottospazio lineare $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$ è* **denso** *in $\mathcal{X}$ se e solo se ogni funzionale lineare $f \in \mathcal{X}'$ che si annulla su $\mathcal{G}$ è identicamente nullo su $\mathcal{X}$.*

Dim. L'implicazione *se* segue dalla proposizione 5.10. L'implicazione *solo se* è conseguenza della continuità di $f \in \mathcal{X}'$. □

La proposizione 5.9 consente anche di dimostrare il seguente importante risultato concernente i complementi ortogonali.

Proposizione 5.12. Relazioni di biortogonalità. *Consideriamo uno spazio normato $\mathcal{X}$ ed il duale $\mathcal{X}'$ e siano*

- $\mathcal{G}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'$ *e* $\mathcal{N}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}$ *gli annullatori dei sottospazi lineari* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$ *e* $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{X}'$,
- $\mathcal{G}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{X}$ *e* $\mathcal{N}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{X}'$ *gli annullatori dei sottospazi lineari* $\mathcal{G}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'$ *e* $\mathcal{N}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}$.

Si ha allora che

$$\boxed{\mathcal{G}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{G}}\,, \qquad \mathcal{N}^{\perp\perp} \supseteq \overline{\mathcal{N}}\,.}$$

Se $\mathcal{X}$ è riflessivo risulta $\boxed{\mathcal{N}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{N}}}$.

Dim. E' evidente che $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{\perp\perp}$ ed essendo $\mathcal{G}^{\perp\perp}$ chiuso si ha $\overline{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}^{\perp\perp}$.

Per mostrare che $\mathcal{G}^{\perp\perp} \subseteq \overline{\mathcal{G}}$ supponiamo che esista un $\mathbf{x}_o \in \mathcal{G}^{\perp\perp}$ tale che $\mathbf{x}_o \notin \overline{\mathcal{G}}$. Separiamo $\{\mathbf{x}_o\}$ e $\overline{\mathcal{G}}$ in senso stretto con un iperpiano chiuso. Esistono quindi $f \in \mathcal{X}'$ ed $\alpha \in \Re$ tali che

$$i) \quad f(\mathbf{x}) < \alpha < f(\mathbf{x}_o) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{G}\,.$$

Ne segue che $f(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{G}$ e dunque $f \in \mathcal{G}^{\perp}$. Pertanto si ha anche che $f(\mathbf{x}_o) = 0$ in quanto $\mathbf{x}_o \in \mathcal{G}^{\perp\perp}$. Ciò contraddice la $i)$.

Analogamente è evidente che $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}^{\perp\perp}$ ed essendo $\mathcal{N}^{\perp\perp}$ chiuso si ha $\overline{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}^{\perp\perp}$. Per mostrare che vale l'eguaglianza $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}^{\perp\perp}$ si può procedere come in precedenza assumendo che esista $f_o \in \mathcal{N}^{\perp\perp}$ tale che $f_o \notin \overline{\mathcal{N}}$.

Separando $\{f_o\}$ e $\overline{\mathcal{N}}$ in senso stretto con un iperpiano chiuso definito da $f^* \in \mathcal{X}''$ si ha che

$$ii) \quad f^*(f) < \alpha < f^*(f_o) \quad \forall\, f \in \mathcal{N}\,.$$

si deduce che $f^*(f) = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{N}$. Se $\mathcal{X}$ è **riflessivo** si ha che

$$\forall\, f^* \in \mathcal{X}'' \quad \exists\, \mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \;:\; f^*(f) = \langle\, f \,,\, \mathbf{x}^* \,\rangle \quad \forall\, f \in \mathcal{X}' \,.$$

Dunque $\mathbf{x}^* \in \mathcal{N}^\perp$ e quindi $\langle\, f_o \,,\, \mathbf{x}^* \,\rangle = 0$ e ciò contraddice la $ii)$. □

Il teorema di HAHN consente di dimostrare un'importante connessione tra le nozioni di duale di un sottospazio, di annullatore e di spazio quoziente.

Proposizione 5.13. Un isomorfismo isometrico. *Sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$ un sottospazio lineare di uno spazio normato $\mathcal{X}$ e $\mathcal{G}^\perp \in \mathcal{X}'$ il suo annullatore. Allora l'applicazione lineare $\mathbf{J} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X}'/\mathcal{G}^\perp, \mathcal{G}'\right\}$ definita da*

$$\langle\, \mathbf{J}(\mathbf{x}' + \mathcal{G}^\perp) \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \,, \quad \mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{G} \,,$$

è un isomorfismo isometrico.

Dim. La linearità e l'iniettività sono immediate. Si ha che

$$\langle\, \mathbf{J}(\mathbf{x}' + \mathcal{G}^\perp) \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{x}' + \mathbf{z}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \le \|\, \mathbf{x}' + \mathbf{z}' \,\|_{\mathcal{G}'} \,\|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{G}} \quad \forall\, \mathbf{z}' \in \mathcal{G}^\perp \,,$$

e quindi

$$\|\, \mathbf{J}(\mathbf{x}' + \mathcal{G}^\perp) \,\|_{\mathcal{G}'} \le \inf\left\{\|\, \mathbf{x}' + \mathbf{z}' \,\|_{\mathcal{G}} \mid \mathbf{z}' \in \mathcal{G}^\perp\right\} = \|\, \mathbf{x}' + \mathcal{G}^\perp \,\|_{\mathcal{X}'/\mathcal{G}^\perp} \,.$$

In forza del teorema di HAHN, per ogni $\mathbf{y}' \in \mathcal{G}'$ esiste un funzionale $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'$ tale che

$$\begin{cases} \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{G} \,, \\ \|\, \mathbf{x}' \,\|_{\mathcal{X}'} = \|\, \mathbf{y}' \,\|_{\mathcal{G}'} \,. \end{cases}$$

Allora

$$\langle\, \mathbf{J}(\mathbf{x}' + \mathcal{G}^\perp) \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{G} \,,$$

e quindi $\mathbf{J} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X}'/\mathcal{G}^\perp, \mathcal{G}'\right\}$ è suriettiva. Si ha poi che

$$\|\, \mathbf{x}' + \mathcal{G}^\perp \,\|_{\mathcal{X}'/\mathcal{G}^\perp} \le \|\, \mathbf{x}' \,\|_{\mathcal{X}'} = \|\, \mathbf{y}' \,\|_{\mathcal{G}'} = \|\, \mathbf{J}(\mathbf{x}' + \mathcal{G}^\perp) \,\|_{\mathcal{G}'}$$

e dunque $\mathbf{J} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X}'/\mathcal{G}^\perp, \mathcal{G}'\right\}$ è una isometria. □

5.3. Operatori duali

La nozione di operatore **duale** o il **coniugato** di un dato operatore lineare è di importanza fondamentale.

Essa è illustrata dalle seguenti proposizioni in cui $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$ è una coppia di spazi normati e $\{\mathcal{X}', \mathcal{Y}'\}$ è la coppia degli spazi duali.

Lemma 5.14. Esistenza dell'operatore duale. *Sia* $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ *un operatore lineare definito su* $\operatorname{dom} \mathbf{A} \subseteq \mathcal{X}$ *. Consideriamo quindi i punti* $\{\mathbf{x}', \mathbf{y}'\}$ *dello spazio prodotto* $\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}'$ *tali che*

$$i) \quad \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\rangle \quad \forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom} \mathbf{A} \,,$$

allora $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'$ *è univocamente determinato da* $\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'$ *se e solo se il sottospazio lineare* $\operatorname{dom} \mathbf{A}$ *è* **denso** *in* $\mathcal{X}$ *.*

Dim. In virtù della linearità si tratta di dimostrare che l'implicazione

$$\langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom} \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}' = \mathbf{o} \,,$$

equivale alla densità di $\operatorname{dom} \mathbf{A}$ in $\mathcal{X}$. Ciò segue dalla proposizione 5.11. $\square$

L'operatore lineare $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$ definito da $\mathbf{A}'\mathbf{y}' = \mathbf{x}'$ è detto il **duale** o il **coniugato** di $\mathbf{A}$.

Il dominio $\operatorname{dom} \mathbf{A}'$ è l'insieme degli $\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'$ tali che esista un $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'$ che soddisfi la $i)$ del lemma 5.14. Vale quindi l'identità fondamentale

$$\boxed{\langle\, \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\rangle \quad \forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom} \mathbf{A} \,, \quad \forall\, \mathbf{y}' \in \operatorname{dom} \mathbf{A}' \,.}$$

Il dominio dell'operatore duale $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$ può essere così caratterizzato.

Proposizione 5.15. Dominio dell'operatore duale. *Se il dominio* $\operatorname{dom} \mathbf{A}$ *dell'operatore lineare* $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ *è denso nello spazio normato* $\mathcal{X}$ *, il dominio* $\operatorname{dom} \mathbf{A}'$ *dell'operatore duale* $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$ *è il sottospazio lineare di* $\mathcal{Y}'$ *definito da*

$$\mathcal{S} := \big\{ \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}' \;:\; \exists\, c > 0 \,,\, |\langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\rangle| \le c \,\|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom} \mathbf{A} \big\} \,.$$

Dim. Consideriamo il funzionale lineare $g : \operatorname{dom}\mathbf{A} \mapsto \Re$ definito da

$$g(\mathbf{x}) := \langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\rangle \quad \text{con} \quad \mathbf{y}' \in \mathcal{S} \,,\ \mathbf{x} \in \operatorname{dom}\mathbf{A} \,.$$

Risulta $|\, g(\mathbf{x}) \,| \le c \,\|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom}\mathbf{A}$ e quindi il teorema 5.4 di HAHN assicura che g può essere prolungato ad un funzionale lineare $f : \mathcal{X} \mapsto \Re$ tale che $|\, f(\mathbf{x}) \,| \le c \,\|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Il funzionale lineare $f \in \mathcal{X}'$ è unico in virtù della densità di $\operatorname{dom}\mathbf{A}$ in $\mathcal{X}$. Si pone infine $\mathbf{A}'\mathbf{y}' = f$ per definire $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$. Dunque $\mathcal{S} \subseteq \operatorname{dom}\mathbf{A}'$. L'inclusione $\mathcal{S} \supseteq \operatorname{dom}\mathbf{A}'$ è banale. □

Proposizione 5.16. Continuità dell'operatore duale. *Sia* $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$ *un operatore lineare continuo con* $\operatorname{dom}\mathbf{A} = \mathcal{X}$. *Allora l'operatore lineare duale* $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}', \mathcal{X}'\}$ *è continuo e risulta*

$$\|\, \mathbf{A} \,\| = \|\, \mathbf{A}' \,\| \,.$$

Dim. La continuità di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{y}'$ implica che

$$\|\, \mathbf{A} \,\| \,\|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} \,\|\, \mathbf{y}' \,\|_{\mathcal{Y}'} \ge \|\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\|_{\mathcal{Y}} \,\|\, \mathbf{y}' \,\|_{\mathcal{Y}'} \ \ge \langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \,,$$

e dunque si ha

$$\|\, \mathbf{A} \,\| \,\|\, \mathbf{y}' \,\|_{\mathcal{Y}'} \ge \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \left\{ |\, \langle\, \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \,| \ : \ \|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} = 1 \right\} = \|\, \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,\|_{\mathcal{X}'} \,,$$

per cui $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}', \mathcal{X}'\}$ e $\|\, \mathbf{A} \,\| \ge \|\, \mathbf{A}' \,\|$. Per dimostrare la diseguaglianza inversa osserviamo che

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad \exists\, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}' \ : \ \|\, \mathbf{y}' \,\|_{\mathcal{Y}'} = 1 \,, \quad \langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\rangle = \|\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} \,.$$

A tal fine si applichi la proposizione 5.4 per $\mathcal{G} = \Re\, \mathbf{A}\mathbf{x}$ e $g(t\, \mathbf{A}\mathbf{x}) = t \,\|\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\|_{\mathcal{Y}}$. Dunque, posto $\mathbf{x}' = \mathbf{A}'\mathbf{y}'$ risulta $\langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \|\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}}$ e quindi $\|\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} = \langle\, \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \le \|\, \mathbf{A}' \,\| \,\|\, \mathbf{y}' \,\|_{\mathcal{Y}'} \|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} = \|\, \mathbf{A}' \,\| \,\|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}}$ per cui $\|\, \mathbf{A} \,\| \le \|\, \mathbf{A}' \,\|$. □

Il seguente teorema di SCHAUDER [27] è fondamentale nella teoria spettrale degli operatori compatti (vedi [41], prop. IV.4. o [29], sezione X.4.).

[27] JULIUSZ PAWEL SCHAUDER (1899-1943) matematico polacco ebreo allievo di STEINHAUS. E' famoso per il suo teorema del punto fisso che estende quello di BROWER agli spazi di BANACH, la teoria degli indici sviluppata con LERAY e la teoria spettrale degli operatori compatti. Morì ucciso dalla Gestapo.

Proposizione 5.17. Compattezza dell'operatore duale. *Siano* $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$ *spazi di* BANACH *e* $\{\mathcal{X}', \mathcal{Y}'\}$ *gli spazi duali. Sia quindi* $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\big\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\big\}$ *un operatore lineare continuo e* $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\big\{\mathcal{X}', \mathcal{Y}'\big\}$ *l'operatore duale. Allora*

$$\boxed{\mathbf{A} \quad \text{compatto} \quad \iff \mathbf{A}' \quad \text{compatto}\,,}$$

e cioè $\mathbf{A}$ *è compatto se e solo se* $\mathbf{A}'$ *è compatto.* □

Lemma 5.18. Ortogonalità tra nucleo ed immagine. *Sia* $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ *un operatore lineare continuo con* $\mathrm{dom}\,\mathbf{A}$ *denso in* $\mathcal{X}$ *e* $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$ *l'operatore duale. Allora*

$$\begin{cases} i) \quad \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}')^{\perp}\,, \\ ii) \quad \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}' = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\perp}\,. \end{cases}$$

Dim. La $i)$ segue dalle equivalenze

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \iff \langle\, \mathbf{y}'\,,\, \mathbf{A}\mathbf{x}\,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}' \iff \langle\, \mathbf{A}'\mathbf{y}'\,,\, \mathbf{x}\,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{y}' \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A}'\,.$$

La $ii)$ segue dalle equivalenze

$$\mathbf{y}' \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}' \iff \langle\, \mathbf{A}'\mathbf{y}'\,,\, \mathbf{x}\,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \iff \langle\, \mathbf{y}'\,,\, \mathbf{A}\mathbf{x}\,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A}\,,$$

che sono conseguenza della relazione di dualità tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$. □

Altre proprietà fondamentali che legano nucleo ed immagine di un operatore lineare ed del suo duale saranno illustrate nella proposizione 9.12.

6. SPAZI DI HILBERT

La nozione di **spazio di** HILBERT [28] consente di estendere al caso di spazi non finitamente generabili molte delle familiari proprietà degli spazi vettoriali di dimensione finita della geometria Euclidea.

[28] DAVID HILBERT (1862-1943). Studiò all'Università di Königsberg sua città natale. Conseguì il dottorato nel 1885 sotto la guida di LINDEMANN. suo collega didottorato ed amico fu MINKOWSKI. Nel 1884 HURWITZ andò ad insegnare all'Università di Königsberg e divenne amico di HILBERT. Nel 1892, divenne professore straordinario e nel 1893 professore ordinario. Nel 1895, su proposta di KLINE, HILBERT assunse la cattedra di matematica all'Università di Göttingen, dove continuò ad insegnare fino alla fine della carriera. Nel 1902 gli fu offerta una cattedra a Berlino ma egli rifiutò ponendo la condizione di chiamare a Göttingen il suo amico MINKOWSKI. Innumerevoli e

Uno spazio vettoriale $\mathcal{H}$ sul campo reale è detto uno **spazio pre-**HILBERT se su $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ è definita una forma bilineare $(\cdot\,,\,\cdot)$, simmetrica e definita positiva:

$$\begin{cases} (\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\,,\,\mathbf{u}) & \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}\,, \\ (\mathbf{u}\,,\,\mathbf{u}) \geq 0 & \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{H}\,, \\ (\mathbf{u}\,,\,\mathbf{u}) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{u} = \mathbf{o}\,. \end{cases}$$

La forma $(\cdot\,,\,\cdot)$ è detta il **prodotto interno** in $\mathcal{H}$, ed induce una **norma** in $\mathcal{H}$ definita da

$$\|\,\mathbf{u}\,\| := \sqrt{(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{u})}\,.$$

La diseguaglianza triangolare è conseguenza della seguente proprietà detta

- **diseguaglianza di** CAUCHY-BUNYAKOVSKII [29] -SCHWARZ [30]

$$\boxed{\,|(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v})| \leq \|\,\mathbf{u}\,\|\,\|\,\mathbf{v}\,\| \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}\,,}$$

con eguaglianza se e solo se i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli.

La diseguaglianza di CAUCHY-BUNYAKOVSKII-SCHWARZ si dimostra osservando che

$$(\mathbf{u} + \lambda\,\mathbf{v}\,,\,\mathbf{u} + \lambda\,\mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall\, \lambda \in \Re \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$$

ed imponendo che il discriminante del polinomio di secondo grado in λ sia non positivo. Si noti che la validità della diseguaglianza sussiste sotto la più debole ipotesi che la forma bilineare $(\cdot\,,\,\cdot)$ sia non negativa.

In ogni spazio vettoriale con prodotto interno vale la

---

fondamentali sono stati i suoi contributi in molti campi della matematica, tra i quali la teoria degli invarianti, i nuneri algebrici, l'analisi funzionale, le equazioni integrali, la fisica matematica ed il calcolo delle variazioni. Nel 1899 pubblicò i *Grundlagen der Geometrie* che posero la base di una trattazione assiomatica della geometria. I famosi 23 problemi, posti da HILBERT al 2° Congresso internazionale di Matematica di Parigi sfidarono e sfidano tuttora i matematici a risolvere questioni fondamentali. La sua frase *Wir müssen wissen, wir werden wissen* dimostra l'ottimismo e l'entusiasmo che egli pose nella ricerca.

[29] VIKTOR YAKOVLEVICH BUNYAKOVSKII (1804-1889) matematico ucraino. Fu allievo di CAUCHY a Parigi nel 1825 e pubblicò il risultato in una monografia del 1859 sulle diseguaglianze tra integrali.

[30] HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843-1921) allievo di Weierstrass e professore a Berlino. Pubblicò il risultato in una nota del 1885 scritta in onore di WEIERSTRASS in occasione del suo 70° compleanno.

- **regola del parallelogramma**

$$\boxed{\| \mathbf{u}+\mathbf{v} \|^2 + \| \mathbf{u}-\mathbf{v} \|^2 = 2\left(\| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2 \right) \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H}\,.}$$

  La regola del parallelogramma può enunciarsi affermando che la somma dei quadrati costruiti sui lati è eguale alla somma dei quadrati costruiti sulle diagonali.

Un notevole risultato dovuto a M. Fréchet [31], J. von Neumann [32] e P. Jordan assicura che, viceversa, se in uno spazio normato vale la regola del parallelogramma, allora è possibile definire in esso un prodotto interno mediante una delle due equivalenti relazioni (vedi ad es. [29] teor.I.5.1)

$$\begin{cases} (\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,) := \frac{1}{4}\Big[\| \mathbf{u}+\mathbf{v} \|^2 - \| \mathbf{u}+\mathbf{v} \|^2 \Big] & \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H}\,, \\ (\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,) := \frac{1}{2}\Big[\| \mathbf{u}+\mathbf{v} \|^2 - \| \mathbf{u} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2 \Big] & \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H}\,. \end{cases}$$

La regola del parallelogramma caratterizza quindi tra gli spazi normati quelli con prodotto interno.

Uno spazio pre-Hilbert $\mathcal{H}$ è detto uno **spazio di** Hilbert se è **completo** rispetto alla norma indotta dal prodotto interno.

Uno spazio di Hilbert è quindi uno spazio di Banach.

Un **sottospazio lineare chiuso** di uno spazio di Hilbert è anch'esso uno spazio di Hilbert con lo stesso prodotto interno.

6.1. Proiezione ortogonale

Un insieme $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ è detto **convesso** se, comunque assegnati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in $\mathcal{K}$, tutti i vettori del segmento che li unisce appartengono a $\mathcal{K}$:

$$\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{K} \;\Rightarrow\; \lambda\,\mathbf{u} + (1-\lambda)\,\mathbf{v} \in \mathcal{K} \quad \forall\, \lambda \in [0,1]\,.$$

L'estensione della validità di molti classici risultati di geometria euclidea agli spazi di Hilbert è fondata sulla seguente fondamentale proprietà.

---

[31] Maurice Frechet (1898-1973) eminente professore di matematica francese, per primo iniziò a costruire una teoria astratta degli spazi di funzioni.

[32] John von Neumann (1903-1957) uno dei matematici più geniali del XX secolo cui sono anche dovuti contributi fondamentali per l'invenzione dei calcolatori elettronici.

Proposizione 6.1. Teorema della proiezione ortogonale. *Assegnati un insieme chiuso e convesso* $\mathcal{K}$ *in uno spazio di* HILBERT $\mathcal{H}$ *ed un vettore* $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$*, esite un unico vettore* $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ *in corrispondenza del quale è minima la distanza tra* $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ *e* $\mathcal{K}$*:*

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}} \| = \min \big\{ \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \,,\; \mathbf{v} \in \mathcal{K} \big\} \,.$$

Il vettore $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ *è detto la* **proiezione ortogonale** *di* $\mathbf{u}$ *su* $\mathcal{K}$ *e l'operatore lineare* $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}$ *è detto il* **proiettore ortogonale** *su* $\mathcal{K}$*.* □

Assegnato $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$, consideriamo il convesso chiuso

$$\mathbf{u} - \mathcal{K} := \big\{ \mathbf{v} \in \mathcal{H} \,:\, \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w} \,,\; \mathbf{w} \in \mathcal{K} \big\} \,.$$

Effettuando la sostituzione $\mathbf{u} - \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, la proposizione 6.1 è equivalente alla seguente.

Proposizione 6.2. Proprietà di minima norma. *Ogni insieme chiuso e convesso* $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ *in uno spazio di* HILBERT $\mathcal{H}$ *contiene un unico vettore di minima norma.*

Dim. Sia $d = \inf \big\{ \| \mathbf{v} \| \,,\; \mathbf{v} \in \mathcal{K} \big\}$ e $\{\mathbf{v}_n\} \subset \mathcal{K}$ una successione minimizzante cioè tale che $\| \mathbf{v}_n \| \to d$. Per la regola del parallelogramma si ha che

$$\begin{aligned} \| (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m)/2 \|^2 &= 1/2\, (\| \mathbf{v}_n \|^2 + \| \mathbf{v}_m \|^2) - \| (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2 \|^2 \leq \\ &= 1/2\, (\| \mathbf{v}_n \|^2 + \| \mathbf{v}_m \|^2) - d^2 \,, \end{aligned}$$

poichè $\| (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2 \| \geq d$ in quanto $(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2 \in \mathcal{K}$ in virtù della convessità di $\mathcal{K}$. La successione $\{\mathbf{v}_n\} \subset \mathcal{K}$ è dunque di CAUCHY.

In forza della completezza di $\mathcal{H}$ e della chiusura di $\mathcal{K}$ essa converge ad un elemento $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$. Inoltre la diseguaglianza $\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \geq \big| \| \mathbf{u} \| - \| \mathbf{v} \| \big|$ assicura che $\| \mathbf{u} \| = d$.

Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{K}$ sono due elementi di norma pari a d la regola del parallelogramma implica che

$$\| (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)/2 \|^2 = d^2 - \| (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)/2 \|^2 \leq 0 \,,$$

cioè che $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. □

Consideriamo la forma quadratica $f(\mathbf{w}) := \| \mathbf{u} - \mathbf{w} \|^2$ con $\mathbf{w} \in \mathcal{K}$ ed osserviamo che i vettori $\mathbf{v} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$ con $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$ sono diretti verso l'interno di $\mathcal{K}$.

Imponiamo quindi che la derivata direzionale di $f(\mathbf{w})$ nel punto $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$ e secondo l'incremento $\mathbf{v} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$ sia non negativa.

Si deduce che la proiezione $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$ di $\mathbf{u}$ su $\mathcal{K}$ è caratterizzata dalla condizione variazionale

$$(\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}.$$

Notiamo che

- il vettore $\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$ è diretto secondo la normale uscente dal convesso $\mathcal{K}$ nel punto $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$.

E' facile vedere che l'operatore $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}$ gode della **proprietà di contrazione** e cioè che

$$\boxed{\| \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}.}$$

Infatti risulta

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_1, \mathbf{v} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_1) \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \\ (\mathbf{u}_2 - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_2, \mathbf{v} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_2) \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \end{cases}$$

Ponendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}_2$ nella prima disuguaglianza e $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$ nella seconda si ottiene per addizione che

$$\| \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_1 - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_2 \|^2 \leq (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_1 - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_2),$$

e quindi il risultato segue dalla diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ.

Se il convesso chiuso $\mathcal{K}$ è un sottospazio lineare $\mathcal{S}$ di $\mathcal{H}$ la condizione di normalità si traduce in una di ortogonalità

$$(\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\mathcal{S}}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{S}.$$

Sia $\mathcal{S}$ un insieme di $\mathcal{H}$ e

$$\mathcal{S}^{\oplus} := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{S} \},$$

il sottospazio lineare **complemento ortogonale** nella topologia di HILBERT.

Si noti che il sottospazio lineare $\mathcal{S}^{\oplus}$ è chiuso in virtù della continuità del prodotto scalare (diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ).

Se $\mathcal{S}$ è un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{H}$, la proposizione 6.1 stabilisce che ogni vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ può essere univocamente decomposto nella somma

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}_{\mathcal{S}}\mathbf{u} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathcal{S}})\mathbf{u},$$

con $\mathbf{P}_{\mathcal{S}}\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ e $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathcal{S}})\mathbf{u} \in \mathcal{S}^{\oplus}$.

Sussiste dunque la decomposizione in somma diretta

$$\mathcal{H} = \mathcal{S} \dotplus \mathcal{S}^{\oplus} \quad \text{con} \;\; \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\oplus} = \{\mathbf{o}\} \,.$$

L'unicità della decomposizione consente di affermare che

- un sottospazio lineare $\mathcal{S}$ è chiuso in $\mathcal{H}$ se e solo se

$$\boxed{\mathcal{S}^{\oplus\oplus} = \mathcal{S} \,.}$$

Infatti se $\mathcal{S}$ è chiuso si ha che $\mathcal{H} = \mathcal{S}^{\oplus} \dotplus \mathcal{S}^{\oplus\oplus} = \mathcal{S}^{\oplus} \dotplus \mathcal{S} \;\Rightarrow\; \mathcal{S}^{\oplus\oplus} = \mathcal{S}$.

Il proiettore ortogonale $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}$ su un sottospazio lineare chiuso $\mathcal{K}$ è un operatore lineare su $\mathcal{H}$ con peculiari proprietà.

Proposizione 6.3. Proprietà del proiettore. *Il proiettore ortogonale* $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}$ *su di un sottospazio lineare chiuso* $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ *è un operatore lineare su* $\mathcal{H}$ *tale che*

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mathcal{K}} = \mathbf{P}_{\mathcal{K}}^2 & & \text{idempotenza}\,, \\ (\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,) = (\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{v}\,) & \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H} & \text{simmetria}\,, \\ \|\,\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}\,\| \le \|\,\mathbf{u}\,\| & \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H} & \text{contrazione}\,. \end{cases}$$

Per la dimostrazione si veda [29], teor. III.2. □

Per la proprietà di contrazione, un proiettore ortogonale è limitato e risulta

$$\|\,\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\,\| \le 1 \,.$$

Il proiettore su un sottospazio lineare chiuso $\mathcal{K}$ è continuo in virtù della proposizione 4.3. Le seguenti proprietà caratterizzano un proiettore ortogonale.

Proposizione 6.4. Caratterizzazione del proiettore. *Un operatore lineare limitato* $\mathbf{P} \in \mathrm{L}\{\mathcal{H},\mathcal{H}\}$ *su uno spazio di* HILBERT $\mathcal{H}$ *è un proiettore ortogonale sul sottospazio lineare immagine* $\mathrm{Im}\,\mathbf{P}$ *se e solo se gode delle seguenti proprietà caratteristiche:*

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mathcal{K}} = \mathbf{P}_{\mathcal{K}}^2 & & \text{idempotenza}\,, \\ (\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,) = (\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{v}\,) & \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H} & \text{simmetria}\,, \end{cases}$$

o, in alternativa,

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mathcal{K}} = \mathbf{P}_{\mathcal{K}}^2 & \text{idempotenza}\,, \\ \|\,\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\,\| \le 1 \,. \end{cases}$$

Per la dimostrazione si veda [29], teor. III.2 e III.3. □

Si noti che l'immagine di un proiettore ortogonale è un sottospazio lineare chiuso dello spazio di HILBERT $\mathcal{H}$.

6.2. Duale di uno spazio di Hilbert

Una proprietà caratteristica di uno spazio di HILBERT è quella di poter essere identificato con il suo duale.

Ciò segue da fondamentali risultati essenzialmente dovuti a F. RIESZ ([5], 1909) su cui è basata la teoria degli spazi di HILBERT, (vedi ad es. [29], [41]).

Proposizione 6.5. Teorema di rappresentazione di RIESZ-FRÉCHET. *Sia* $f \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}, \Re\right\}$ *un funzionale lineare limitato su uno spazio di* HILBERT $\mathcal{H}$. *Esiste allora un unico vettore* $\mathbf{u}_f \in \mathcal{H}$ *tale che*

$$f(\mathbf{v}) = (\,\mathbf{u}_f\,,\,\mathbf{v}\,)_{\mathcal{H}} \quad \forall\,\mathbf{v} \in \mathcal{H}\,, \quad \text{con} \quad \|\,f\,\|_{\mathcal{H}'} = \|\,\mathbf{u}_f\,\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Dim. L'unicità di $\mathbf{u}_f \in \mathcal{H}$ è evidente in quanto

$$\langle\,\mathbf{u}_f\,,\,\mathbf{v}\,\rangle = 0 \quad \forall\,\mathbf{v} \in \mathcal{H} \;\Rightarrow\; \mathbf{u}_f = \mathbf{o}\,.$$

La continuità e la linearità di $f \in \mathcal{H}'$ assicurano che $\operatorname{Ker} f$ è un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{H}$. Se $\operatorname{Ker} f = \mathcal{H}$ e cioè $f = \mathbf{o} \in \mathcal{H}'$ basta prendere $\mathbf{u}_f = \mathbf{o} \in \mathcal{H}$. Supponiamo quindi che $\operatorname{Ker} f \neq \mathcal{H}$ e dimostriamo che esiste un $\mathbf{v}_f \in \mathcal{H}$ tale che

$$\mathbf{v}_f \notin \operatorname{Ker} f\,, \quad \|\,\mathbf{v}_f\,\|_{\mathcal{H}} = 1\,, \quad \langle\,\mathbf{v}_f\,,\,\mathbf{v}\,\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall\,\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f\,.$$

A tal fine consideriamo un $\mathbf{u} \in \mathcal{H} \setminus \operatorname{Ker} f$ e poniamo

$$\mathbf{v}_f = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{\Pi}\mathbf{u}}{\|\,\mathbf{u} - \mathbf{\Pi}\mathbf{u}\,\|_{\mathcal{H}}}\,,$$

con $\mathbf{\Pi}$ proiettore ortogonale su $\operatorname{Ker} f$. Il vettore $\mathbf{v}_f \in \mathcal{H}$ è dunque un versore ortogonale a $\operatorname{Ker} f$. Dimostriamo che esso è unico e cioè che il complemento ortogonale di $\operatorname{Ker} f$ in $\mathcal{H}$ ha dimensione pari ad 1.

A tal fine basta mostrare che ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ ammette una decomposizione del tipo

$$\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}_f + \mathbf{v}_o \quad \text{con} \quad \mathbf{v}_o \in \operatorname{Ker} f\,.$$

Siccome $f(\mathbf{v}_o) = 0$ dovrà essere $f(\mathbf{v}) = \lambda\, f(\mathbf{v}_f)$ e quindi

$$\lambda = \frac{f(\mathbf{v})}{f(\mathbf{v}_f)} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_o = \mathbf{v} - \lambda\, \mathbf{v}_f \,.$$

Risulta dunque

$$(\mathbf{v}_f \,, \mathbf{v})_{\mathcal{H}} = \lambda \,\| \mathbf{v}_f \|^2_{\mathcal{H}} + (\mathbf{v}_f \,, \mathbf{v}_o)_{\mathcal{H}} = \lambda = \frac{f(\mathbf{v})}{f(\mathbf{v}_f)} \,.$$

Basta allora porre $\mathbf{u}_f = f(\mathbf{v}_f)\, \mathbf{v}_f$.

Si ha inoltre

$$\| f \|_{\mathcal{H}'} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}} \left\{ f(\mathbf{v}) \;:\; \| \mathbf{v} \|_{\mathcal{H}} \leq 1 \right\} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}} \left\{ (\mathbf{v}_f \,, \mathbf{v})_{\mathcal{H}} \;:\; \| \mathbf{v} \|_{\mathcal{H}} \leq 1 \right\} \leq$$

$$= \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}} \left\{ \| \mathbf{v} \|_{\mathcal{H}} \| \mathbf{u}_f \|_{\mathcal{H}} \;:\; \| \mathbf{v} \|_{\mathcal{H}} \leq 1 \right\} = \| \mathbf{u}_f \|_{\mathcal{H}} \,,$$

ed anche

$$\| f \|_{\mathcal{H}'} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}} \left\{ f(\mathbf{v}) \;:\; \| \mathbf{v} \|_{\mathcal{H}} \leq 1 \right\} \geq f \left(\frac{\mathbf{u}_f}{\| \mathbf{u}_f \|_{\mathcal{H}}} \right) = \frac{\| \mathbf{u}_f \|^2_{\mathcal{H}}}{\| \mathbf{u}_f \|_{\mathcal{H}}} = \| \mathbf{u}_f \|_{\mathcal{H}} \,,$$

da cui $\| f \|_{\mathcal{H}'} = \| \mathbf{u}_f \|_{\mathcal{H}}$. □

Una diretta conseguenza del teorema di RIESZ-FRÉCHET è che ogni spazio di HILBERT è **riflessivo**. A tale risultato può anche pervenirsi osservando che la regola del parallelogramma implica che gli spazi di HILBERT sono **uniformemente convessi** ed invocando il teorema di MILMAN.

Si noti a tal proposito che ogni vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ definisce un funzionale lineare limitato $f_{\mathbf{u}} \in \mathcal{H}'$ tramite la relazione

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) := (\mathbf{u} \,, \mathbf{v})_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H} \,, \quad \text{con} \quad \| f_{\mathbf{u}} \|_{\mathcal{H}'} = \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{H}} \,.$$

Il teorema di RIESZ-FRÉCHET stabilisce pertanto l'esistenza, tra lo spazio di HILBERT $\mathcal{H}$ ed il suo duale $\mathcal{H}'$, di una corrispondenza biunivoca lineare e continua con l'inversa.

Tale corrispondenza preserva la norma, ed è pertanto un **isomorfismo isometrico** $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}', \mathcal{H}\right\}$:

$$\boldsymbol{\mu}\, f = \mathbf{u}_f \quad \forall\, f \in \mathcal{H}' \,, \quad \text{con} \quad \| \boldsymbol{\mu} f \|_{\mathcal{H}'} = \| f \|_{\mathcal{H}} \,.$$

Lo spazio duale $\mathcal{H}'$ viene dotato naturalmente di un prodotto interno indotto da quello di $\mathcal{H}$ e definito da

$$(f_1\,,\, f_2)_{\mathcal{H}'} := (\boldsymbol{\mu} f_1\,,\, \boldsymbol{\mu} f_2)_{\mathcal{H}} \quad \forall\, f_1, f_2 \in \mathcal{H}'\,.$$

La norma indotta in $\mathcal{H}'$ da tale prodotto interno coincide con quella $\| f \|_{\mathcal{H}'}$ precedentemente definita nella sezione 4.4.

L'esistenza di un isomorfismo isometrico tra $\mathcal{H}$ ed il suo duale $\mathcal{H}'$ implica che anche lo spazio duale $\mathcal{H}'$, è completo e dunque è uno spazio di HILBERT.

Si noti che valgono le seguenti relazioni tra gli ortogonali in senso Hilbertiano e quelli secondo la dualità.

Proposizione 6.6. Relazioni tra gli ortogonali. *Siano $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ spazi di* HILBERT *in dualità. Se $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}$ e $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{H}'$ sono sottospazi lineari e*

- *$\mathcal{P}^\perp \subseteq \mathcal{H}'$ e $\mathcal{Q}^\perp \subseteq \mathcal{H}$ sono i loro complementi ortogonali definiti per dualità,*
- *$\mathcal{P}^\oplus \subseteq \mathcal{H}$ e $\mathcal{Q}^\oplus \subseteq \mathcal{H}'$ sono i loro complementi ortogonali nella topologia di* HILBERT*,*

si ha che

$$\mathcal{P}^\oplus = \boldsymbol{\mu}\,\mathcal{P}^\perp\,, \quad \mathcal{Q}^\oplus = \boldsymbol{\mu}^{-1}\,\mathcal{Q}^\perp\,, \quad \mathcal{P}^{\perp\oplus} = \mathcal{P}^{\oplus\perp}\,, \quad \mathcal{Q}^{\perp\oplus} = \mathcal{Q}^{\oplus\perp}\,.$$

Dim. Le prime due relazioni sono di immediata verifica. Ne segue che

$$\mathcal{P}^{\perp\oplus} = \boldsymbol{\mu}^{-1}\,\mathcal{P}^{\perp\perp} = \boldsymbol{\mu}^{-1}\,\overline{\mathcal{P}} = \boldsymbol{\mu}^{-1}\,\mathcal{P}^{\oplus\oplus} = \mathcal{P}^{\oplus\perp}\,.$$

In modo analogo si verifica l'ultima eguaglianza. □

L'isomorfismo isometrico $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{L}\{\mathcal{H}', \mathcal{H}\}$ consente di estendere la diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ al prodotto di dualità tra spazi di HILBERT.

Si può anzi dire che la definizione di norma nello spazio duale introdotta nella sezione 4.4 è suggerita da tale estensione.

Proposizione 6.7. Diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ tra spazi duali. *Siano $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ spazi di* HILBERT *in dualità. Allora risulta*

$$|\,\langle\, \mathbf{x}'\,,\, \mathbf{x}\,\rangle\,| \leq \|\, \mathbf{x}' \|_{\mathcal{H}'}\, \|\, \mathbf{x} \|_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{H}\,, \quad \forall\, \mathbf{x}' \in \mathcal{H}'\,,$$

e l'eguaglianza vale se e solo se $\mathbf{x}$ e $\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{x}'$ sono paralleli.

Dim. Basta porre $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\mu}\mathbf{y}$ con $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$. □

Nella sezione 4.4 abbiamo visto che un funzionale lineare $f \in \mathcal{H}'$ è nullo su $\mathcal{H}$ se si annulla su un sottospazio lineare denso in $\mathcal{H}$.

Il teorema della proiezione e quello di rappresentazione, proposizioni 6.1 e 6.5, consentono di dimostrare che vale anche la proprietà inversa.

Proposizione 6.8. Caratterizzazione dei sottospazi lineari densi. *Se l'unico funzionale $f \in \mathcal{H}'$ che si annulla sul sottospazio lineare $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ è il funzionale nullo su $\mathcal{H}$, cioè se*

$$f(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; f(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H}\,,$$

allora $\mathcal{S}$ è denso in $\mathcal{H}$.

Dim. Per ipotesi $\mathcal{S} \subseteq \operatorname{Ker} f \;\Rightarrow\; \operatorname{Ker} f = \mathcal{H}$. Si deve mostrare che $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{H}$.

Supponiamo per assurdo che sia $\overline{\mathcal{S}} \neq \mathcal{H}$.

Allora scelto un $\mathbf{u} \in \mathcal{H} \setminus \overline{\mathcal{S}}$, il vettore $\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\overline{\mathcal{S}}}\mathbf{u}$ sarebbe non nullo e quindi tale sarebbe anche il funzionale $f = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\overline{\mathcal{S}}}\mathbf{u})$.

Poichè per ipotesi

$$f(\mathbf{v}) = (\,\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\overline{\mathcal{S}}}\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,) = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \overline{\mathcal{S}} \;\Rightarrow\; f(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H}\,,$$

ciò è impossibile. □

Tale risultato è un caso particolare di quello della proposizione 5.10 valido in uno spazio di BANACH. Esso mostra un esempio del fatto che negli spazi di HILBERT il ruolo giocato dal teorema di HAHN-BANACH, e dai teoremi di separazione da esso dedotti, può essere svolto dal teorema della proiezione ortogonale e dal teorema di rappresentazione di RIESZ-FRÉCHET.

Osservazione 6.1. Ponendo l'isomorfismo isometrico $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{L}\{\mathcal{H}', \mathcal{H}\}$ pari all'identità, lo spazio $\mathcal{H}$ viene identificato col suo duale $\mathcal{H}'$ ed è detto uno spazio di HILBERT **pivot**. L'osservazione che segue la proposizione 9.13 mostrerà però che non è sempre lecito identificare uno spazio di HILBERT col suo duale. ■

6.3. Successioni ortonormali complete

Un insieme di vettori di uno spazio di HILBERT costituisce una **famiglia ortonormale** se tutti i vettori sono di norma unitaria ed a due a due ortogonali.

Una famiglia ortonormale può essere costruita a partire da una famiglia finita o contabile mediante il procedimento di ortogonalizzazione di GRAM-SCHMIDT.

■ **Ortogonalizzazione**

Se $\{\mathbf{u}_n\}$ è una successione di elementi linearmente indipendenti di $\mathcal{H}$ definiamo $\{\mathbf{w}_n\}$ e $\{\mathbf{z}_n\}$ induttivamente ponendo

$$\begin{cases} \mathbf{w}_o = \mathbf{u}_o \,, & \mathbf{z}_o = \dfrac{\mathbf{w}_o}{\|\,\mathbf{w}_o\,\|} \,, \\ \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \sum\limits_{k \le n} (\,\mathbf{u}_{n+1} \,,\, \mathbf{z}_k\,)\,\mathbf{z}_k \,, & \mathbf{z}_{n+1} = \dfrac{\mathbf{w}_{n+1}}{\|\,\mathbf{w}_{n+1}\,\|} \,. \end{cases}$$

Allora $\{\mathbf{z}_n\}$ è una successione ortonormale.

Una famiglia ortonormale è detta **completa** se non esiste alcuna altra famiglia ortonormale che la contiene.

Una famiglia ortonormale completa è detta anche una **base ortonormale** e la sua esistenza è assicurata dal lemma di ZORN.

Lo spazio di HILBERT $\mathcal{H}$ è detto **separabile** se esiste una successione di elementi di $\mathcal{H}$ che costituisce una base ortonormale.

Le successioni ortonormali complete consentono di effettuare lo sviluppo in serie di FOURIER [33] di un campo vettoriale $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$.

Proposizione 6.9. Sviluppo in serie di FOURIER. *Sia $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{H}$ una successione ortonormale completa. Per ogni $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ sussiste allora lo sviluppo in serie*

$$\boxed{\mathbf{f} = \sum_{n=1}^{\infty} (\,\mathbf{f} \,,\, \mathbf{u}_n\,)\,\mathbf{u}_n \;:= \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} (\,\mathbf{f} \,,\, \mathbf{u}_n\,)\,\mathbf{u}_n \,.}$$

e vale la **relazione di** PARSEVAL

$$\boxed{\|\,\mathbf{f}\,\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\,(\,\mathbf{f} \,,\, \mathbf{u}_n\,)\,|^2 \,.}$$

[33] JOSEPH FOURIER (1768-1830) grande fisico matematico francese famoso per i suoi studi sulla propagazione del calore (pubblicò la Théorie analytique de la chaleur) e per il metodo di sviluppo in serie che prende il suo nome.

Dim. Dalla relazione

$$\| \mathbf{f} - \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n \|^2 = \| \mathbf{f} \|^2 - \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)^2 ,$$

si deduce la **diseguaglianza di** BESSEL [34]

$$\boxed{\sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)^2 \le \| \mathbf{f} \|^2 .}$$

Ne consegue che la successione $\{ \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n \}$ è di CAUCHY in quanto la norma della differenza

$$\| \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n - \sum_{n=1}^{h} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n \|^2 = \| \sum_{n=h}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n \|^2 = \sum_{n=h}^{k} | (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) |^2 ,$$

con $k > h$, tende a zero per $h \to \infty$.

Infatti la successione $\{ \sum_{n=1}^{h} | (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) |^2 \}$ è monotona non decrescente e limitata in virtù della diseguaglianza di BESSEL e pertanto converge ad un limite finito.

Poniamo allora $\mathbf{f}^* = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n$ e mostriamo che $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}$. Per la continuità del prodotto interno si ha infatti che per ogni $\mathbf{u}_j$ risulta

$$(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*, \mathbf{u}_j) = \lim_{k\to\infty} ([\mathbf{f} - \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n] , \mathbf{u}_j) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_j) - (\mathbf{f}, \mathbf{u}_j) = 0 .$$

La completezza della successione ortonormale implica quindi che $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}$.

Osservando infine che, per la continuità della norma, si ha

$$0 = \lim_{k\to\infty} \| \mathbf{f} - \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n \|^2 = \| \mathbf{f} \|^2 - \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} | (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) |^2 =$$

$$= \| \mathbf{f} \|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} | (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) |^2 ,$$

si perviene alla **relazione di** PARSEVAL [35] . □

[34] FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784-1846) matematico tedesco direttore dell'osservatorio astronomico di Königsberg.

[35] MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÊNES (1755-1836).

6.4. Spazi di HILBERT quoziente

Sia $\mathcal{L}$ un sottospazio lineare chiuso di uno spazio diHILBERT $\mathcal{H}$.

Denotiamo con $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ lo spazio quoziente costituito dalle varietà $\overline{\mathbf{u}} := \mathbf{u} + \mathcal{L}$ e dotato della norma

$$\| \overline{\mathbf{u}} \|_{\mathcal{H}/\mathcal{L}} := \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}} \| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|_{\mathcal{H}} .$$

- E' possibile dotare lo spazio $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ di una struttura Hilbertiana indotta da quella dello spazio $\mathcal{H}$.

Per dimostrarlo premettiamo alcune semplici considerazioni.

Proposizione 6.10. Prodotto interno indotto da un operatore. *Siano $\mathcal{X}$ uno spazio lineare e $\mathcal{H}$ uno spazio di* HILBERT. *Sia $\boldsymbol{\theta} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{H}$ un operatore lineare iniettivo, cioè tale che $\operatorname{Ker} \boldsymbol{\theta} = \{\mathbf{o}\}$. Allora:*
a) Definendo il prodotto interno in $\mathcal{X}$ mediante l'identità

$$(\mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2)_{\mathcal{X}} := (\boldsymbol{\theta} \mathbf{x}_1 , \boldsymbol{\theta} \mathbf{x}_2)_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X} ,$$

*lo spazio $\mathcal{X}$ è uno spazio pre-*HILBERT.
b) Lo spazio $\mathcal{X}$ è uno spazio di HILBERT *se e solo se $\operatorname{Im} \boldsymbol{\theta}$ è chiuso in $\mathcal{H}$.*

Dim. La prima affermazione è una semplice conseguenza della bilinearità del prodotto interno definito in $\mathcal{X}$ e del fatto che

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} = \| \boldsymbol{\theta} \mathbf{x} \|_{\mathcal{H}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta} \mathbf{x} = \mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{o} .$$

Per dimostrare la *b*) basta osservare che il sottospazio lineare $\operatorname{Im} \boldsymbol{\theta} \subset \mathcal{H}$ è uno spazio di HILBERT per la topologia indotta da $\mathcal{H}$ se e solo se è chiuso in $\mathcal{H}$. In tal caso e solo in tal caso la mappa lineare $\boldsymbol{\theta}$, che è iniettiva e suriettiva da $\mathcal{X}$ su $\operatorname{Im} \boldsymbol{\theta}$, costituisce un isomorfismo isometrico tra lo spazio pre-HILBERT $\mathcal{X}$ e lo spazio di HILBERT $\operatorname{Im} \boldsymbol{\theta}$. Dunque lo spazio $\mathcal{X}$ è completo. □

Proposizione 6.11. Isomorfismo fondamentale di uno spazio quoziente. *Sia $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ un sottospazio lineare chiuso di uno spazio di* HILBERT *$\mathcal{H}$. Tra lo spazio quoziente $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ ed il complemento ortogonale $\mathcal{L}^{\oplus}$ di $\mathcal{L}$ in $\mathcal{H}$ esiste un isomorfismo $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}/\mathcal{L}, \mathcal{L}^{\oplus}\right\}$.*

Dim. Basta definire $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}/\mathcal{L}, \mathcal{L}^{\oplus}\right\}$ come l'operatore lineare che ad ogni varietà $\mathbf{u} + \mathcal{L}^{\oplus} \in \mathcal{H}/\mathcal{L}$ fa corrispondere la proiezione di un qualsiasi vettore della varietà su $\mathcal{L}^{\oplus}$. L'operatore inverso $\boldsymbol{\theta}^{-1} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{L}^{\oplus}, \mathcal{H}/\mathcal{L}\right\}$ mappa i vettori $\mathbf{u}_{\oplus} \in \mathcal{L}^{\oplus}$ in $\mathbf{u}_{\oplus} + \mathcal{L}^{\oplus} \in \mathcal{H}/\mathcal{L}$. □

Lo spazio quoziente $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ diviene pertanto uno spazio di HILBERT definendo il prodotto interno come quello indotto dall'isomorfismo fondamentale

$$(\mathbf{u}_1 + \mathcal{L} \, , \, \mathbf{u}_2 + \mathcal{L})_{\mathcal{H}/\mathcal{L}} := (\boldsymbol{\theta} (\mathbf{u}_1 + \mathcal{L}) \, , \, \boldsymbol{\theta} (\mathbf{u}_2 + \mathcal{L}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{H} \, .$$

La corrispondente norma è pari a

$$\| \, \mathbf{u} + \mathcal{L} \, \|_{\mathcal{H}/\mathcal{L}} := \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}} \| \, \mathbf{u} + \mathbf{v} \, \|_{\mathcal{H}} = \| \, \mathbf{u} - \boldsymbol{\Pi} \mathbf{u} \, \|_{\mathcal{H}} = \| \, \boldsymbol{\Pi}^C \mathbf{u} \, \|_{\mathcal{H}} \, ,$$

dove $\boldsymbol{\Pi}$ è il proiettore ortogonale di $\mathcal{H}$ su $\mathcal{L}$ e $\boldsymbol{\Pi}^C = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}$ è il proiettore complementare che proietta $\mathcal{H}$ su $\mathcal{L}^{\oplus}$.

Altri risultati concernenti gli spazi quoziente ed i sottospazi lineari di uno spazio di HILBERT saranno presentati nella sezione 9.3.

6.5. Spazi prodotto

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi di BANACH. Il prodotto cartesiano $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ è allora uno spazio di BANACH per la topologia indotta da una dalle norme

$$\| \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} + \| \mathbf{y} \|_{\mathcal{Y}} ,$$
$$\| \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := \sqrt{\| \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}} + \| \mathbf{y} \|^2_{\mathcal{Y}}} .$$

Tali norme sono equivalenti in quanto per ogni coppia $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ si ha

$$(\| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2)^{1/2} \le \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \| \le \sqrt{2}\, (\| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2)^{1/2}$$

Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono spazi di HILBERT lo **spazio prodotto** $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ è uno spazio di HILBERT con il prodotto interno prodotto, di spazi

$$(\, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \,,\, \{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\} \,)_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := (\, \mathbf{x} \,,\, \overline{\mathbf{x}} \,)_{\mathcal{X}} + (\, \mathbf{y} \,,\, \overline{\mathbf{y}} \,)_{\mathcal{Y}} ,$$

e la corrispondente norma

$$\| \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := \sqrt{\| \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}} + \| \mathbf{y} \|^2_{\mathcal{Y}}} .$$

6.6. Operatori aggiunti, simmetrici e autoaggiunti

Sia $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$ una coppia di spazi di HILBERT ed $\{\mathcal{X}', \mathcal{Y}'\}$ la coppia degli spazi duali. Si consideri un operatore lineare $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ con $\operatorname{dom} \mathbf{A}$ denso in $\mathcal{X}$ ed il suo duale $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$.

Se $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{X}} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X}, \mathcal{X}'\}$ e $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}} \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'\}$ sono gli isomorfismi isometrici di RIESZ-FRÉCHET risulta

$$(\, \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{X}} \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \,) = \langle\, \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\rangle = (\, \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}}\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,)$$

e quindi, posto $\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}}\, \mathbf{y}'$ si ha che $(\, \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{X}}\, \mathbf{A}'\, {\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}}}^{-1}\, \mathbf{y} \,,\, \mathbf{x} \,) = (\, \mathbf{y} \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,)$.

L'operatore lineare $\mathbf{A}^* = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{X}}\, \mathbf{A}'\, {\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}}}^{-1} : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{X}$ è detto l' **operatore aggiunto** di $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$.

Un operatore lineare $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$, con $\operatorname{dom}\mathbf{A}$ denso in $\mathcal{X}$, è detto

- **simmetrico** se sussiste l'identità

$$\boxed{(\mathbf{y}\,,\,\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{y}\,,\,\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{dom}\mathbf{A}\,,}$$

  ovvero se $\mathbf{A}^*$ è un prolungamento di $\mathbf{A}$;

- **autoaggiunto** se $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ e cioè se è simmetrico e risulta

$$\operatorname{dom}\mathbf{A}^* = \operatorname{dom}\mathbf{A}\,.$$

Si dimostra che ([29], prop. VII.3.1)

- se $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ è simmetrico, allora anche $\mathbf{A}^{**} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ è simmetrico.

Osservazione 6.2. Per un operatore lineare limitato $\mathbf{A} \in L\{\mathcal{X}, \mathcal{X}\}$ su uno spazio di HILBERT $\mathcal{X}$ la nozione di operatore simmetrico e quella di operatore autoaggiunto coincidono in quanto $\operatorname{dom}\mathbf{A} = \operatorname{dom}\mathbf{A}^* = \mathcal{X}$.

Non è così per un operatore lineare non limitato $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ che risulta simmetrico se e solo se $\mathbf{A}^* \supseteq \mathbf{A}$, cioè se $\operatorname{dom}\mathbf{A}^* \supseteq \operatorname{dom}\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ su $\operatorname{dom}\mathbf{A}$. Se $\mathbf{A}$ è simmetrico può accadere che $\operatorname{dom}\mathbf{A}^* \supset \operatorname{dom}\mathbf{A}$ in senso stretto. ∎

7. CONVERGENZA DEBOLE

La nozione di **convergenza debole** negli spazi di HILBERT consente di estendere il classico teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS il quale assicura che ogni successione limitata in $\Re$ ammette una sottosuccessione convergente.

Più in generale possiamo introdurre la nozione di **topologia debole** in uno spazio normato $\mathcal{X}$.

- La **topologia debole** $\mathcal{T}(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ in $\mathcal{X}$ è la più debole topologia che rende continui i funzionali $\mathbf{\Phi}_f : \mathcal{X} \mapsto \Re$ con $f \in \mathcal{X}'$ definiti da $\mathbf{\Phi}_f(\mathbf{x}) := \langle f\,,\,\mathbf{x} \rangle \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

Essa può costruirsi prendendo quali aperti di $\mathcal{T}(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ le intersezioni finite di controimmagini di aperti in $\Re$ tramite i funzionali $\mathbf{\Phi}_f : \mathcal{X} \mapsto \Re$ con $f \in \mathcal{X}'$ e quindi le unioni qualsiasi di tali intersezioni (vedi [41] sez. III.2.).

Per contro la topologia indotta dalla norma in $\mathcal{X}$ è detta **topologia forte**.

La topologia debole è convenientemente descritta in termini di convergenza. A tal fine consideriamo lo spazio duale $\mathcal{X}'$ ed analizziamo la convergenza dei valori assunti dai funzionali lineari limitati su $\mathcal{X}$ in corrispondenza della successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$.

Una successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$ è **debolmente convergente** se esiste ed è finito il limite $\lim_{n\to\infty} \langle\, f \,,\, \mathbf{u}_n \,\rangle$ per ogni $f \in \mathcal{X}'$.

La **convergenza debole** di una successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$ ad un elemento $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X}$ è quindi definita da

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u}_\infty \iff \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty) = 0\,, \quad \forall\, f \in \mathcal{X}'\,.$$

L'unicità del limite debole è conseguenza della seguente proposizione (vedi [41] prop. III.3.).

Proposizione 7.1. Proprietà di separazione. *La topologia debole di uno spazio normato $\mathcal{X}$ è separante (*HAUSDORFF*).*

Dim. Siano $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_1$ due elementi distinti di $\mathcal{X}$. In virtù della proposizione 5.9 esiste un iperpiano chiuso f che separa strettamente $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_1$ e cioè un funzionale lineare continuo tale che

$$\langle\, f \,,\, \mathbf{x}_1 \,\rangle < \alpha < \langle\, f \,,\, \mathbf{x}_2 \,\rangle\,.$$

Allora risulta $\mathbf{x}_i \in \mathcal{O}_i$ dove $\mathcal{O}_i$ con $i = 1, 2$ sono gli insiemi debolmente aperti

$$\mathcal{O}_1 := \big\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \;:\; \langle\, f \,,\, \mathbf{x} \,\rangle < \alpha\big\}\,,$$

$$\mathcal{O}_2 := \big\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \;:\; \langle\, f \,,\, \mathbf{x} \,\rangle > \alpha\big\}\,.$$

La conclusione segue dal fatto che $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. □

La convergenza forte di una successione $\{\mathbf{u}_n\} \in \mathcal{X}$ implica quella debole in quanto per la continuità dei funzionali $f \in \mathcal{X}'$ si ha che

$$|\langle\, f \,,\, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty \,\rangle| \leq \|\, f \,\|\, \|\, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty \,\|_{\mathcal{X}}\,, \quad \forall\, f \in \mathcal{X}'\,.$$

Vale la seguente proprietà

Proposizione 7.2. Convergenza del prodotto di dualità. *Siano $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$ e $\{f_n\} \subset \mathcal{X}'$ due successioni tali che*

$$f_n \to f\,, \qquad \mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u}.$$

Allora $\langle\, f_n \,,\, \mathbf{u}_n \,\rangle \to \langle\, f \,,\, \mathbf{u} \,\rangle$.

Dim. Dalla diseguaglianza

$$|\langle f_n , \mathbf{u}_n \rangle - \langle f , \mathbf{u} \rangle| \leq |\langle f_n - f , \mathbf{u}_n \rangle + \langle f , \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \rangle| \leq$$

$$\leq \| f_n - f \|_{\mathcal{X}'} \| \mathbf{u}_n \|_{\mathcal{X}} + \langle f , \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \rangle ,$$

si deduce immediatamente il risultato. □

Un insieme $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ è detto **debolmente chiuso** se contiene tutti i suoi punti limite in senso debole e cioè se

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u}_\infty , \; \{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{A} \; , \mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_\infty \in \mathcal{A} .$$

Poichè la convergenza forte implica quella debole ne segue che

- un insieme debolmente chiuso è anche fortemente chiuso, ma in generale non viceversa.
- In spazi normati di **dimensione finita** la topologia debole e quella forte coincidono e quindi la nozione di convergenza forte e di convergenza debole sono equivalenti (vedi [41] proposizione III.6).

Sussiste inoltre il seguente notevole risultato che fornisce un criterio topologico per stabilire che uno spazio normato ha dimensione finita (vedi [41] osservazioni III.2 e III.4).

Proposizione 7.3. Spazi di dimensione finita. *Se uno spazio di* BANACH $\mathcal{X}$ *è* **riflessivo** *oppure se il suo duale* $\mathcal{X}'$ *è* **separabile** *allora la convergenza forte e quella debole in* $\mathcal{X}$ *coincidono se e solo se lo spazio* $\mathcal{X}$ *è di* **dimensione finita**.

Dim. Se uno spazio di BANACH ha dimensione infinita ed è **riflessivo** oppure se il suo duale $\mathcal{X}'$ è **separabile**, allora si può mostrare che è possibile costruire una successione $\{\mathbf{u}_n\}$ tale che $\| \mathbf{u}_n \|_{\mathcal{X}} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{u}_n) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{X}'$ (vedi [41] osservazione III.4). Tale successione converge quindi debolmente ma non fortemente al vettore nullo. □

Ricordiamo che un funzionale $f : \mathcal{X} \mapsto \Re \cup +\infty$ è detto

- **convesso** se

$$f(\lambda\, \mathbf{u} + (1-\lambda)\, \mathbf{v}) \leq \lambda\, f(\mathbf{u}) + (1-\lambda)\, f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \lambda \in [0,1] \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{X} ,$$

- **inferiormente semicontinuo** se

$$\liminf_{\mathbf{v} \to \mathbf{u}} f(\mathbf{v}) \geq f(\mathbf{u}) \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{X} ,$$

il che equivale a richiedere che per ogni $\lambda \in \Re$ siano chiusi gli insiemi di livello di f

$$\mathcal{A}_\lambda := \{\mathbf{v} \in \mathcal{X} \ : \ f(\mathbf{v}) \le \lambda\},$$

ovvero che sia chiuso l'**epigrafo**

$$\mathrm{epi}\, f := \{[\mathbf{v}, \lambda] \in \mathcal{X} \times \Re \ : \ f(\mathbf{v}) \le \lambda\};$$

- **debolmente inferiormente semicontinuo** se

$$\{\mathbf{u}_n\} \xrightarrow{w} \mathbf{u}_\infty \ \Rightarrow \ \liminf f(\mathbf{u}_n) \ge f(\mathbf{u}_\infty).$$

Ogni funzionale continuo è ovviamente anche inferiormente semi-continuo.

Sussiste la seguente notevole proprietà.

Proposizione 7.4. Forme quadratiche. *Consideriamo una forma bilineare continua* $\mathbf{b} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X} \times \mathcal{X}\}$. *La forma quadratica ad essa associata, se positiva, risulta debolmente inferiormente semicontinua .*

Dim. Infatti sia $\mathbf{b} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X} \times \mathcal{X}\}$ con $\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \ge 0$ e $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$ una successione debolmente convergente a $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X}$. Essendo

$$\begin{cases} \mathbf{b}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \mathbf{b}(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_\infty) + 2\,\mathbf{b}(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty) + \mathbf{b}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty), \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{b}(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty) = 0, \end{cases}$$

risulta

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{b}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \ge \mathbf{b}(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_\infty),$$

ed il risultato è dimostrato. □

Riportiamo nel seguito i risultati concernenti la convergenza debole che sono di maggior rilievo per le applicazioni. Il primo è un famoso risultato dovuto a Mazur [36] . Allievo e stretto collaboratore di Banach è considerato il co-fondatore della scuola Polacca di Analisi Funzionale. A lui sono dovuti molti dei problemi del famoso *Scottish Book* scritto nello *Scottish Café* di Lvov con Banach e gli altri del gruppo..

Proposizione 7.5. Teorema di Mazur. *Ogni insieme chiuso e convesso* $\mathcal{K}$ *in uno spazio normato* $\mathcal{X}$ *è debolmente chiuso.*

[36] Stanislaw Mazur (1905-1981)

Dim. (Vedi [41] teor. III.7.) Dimostriamo che l'insieme $\mathcal{X} \setminus \mathcal{K}$, complementare di $\mathcal{K}$, è debolmente aperto. In virtù della proposizione 5.9 per ogni $\mathbf{x}_o \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{K}$ possiamo trovare un iperpiano chiuso f che separa strettamente $\mathbf{x}_o$ e $\mathcal{K}$ e cioè un funzionale lineare continuo tale che

$$\langle\, f\,,\, \mathbf{x}_o \,\rangle < \alpha < \langle\, f\,,\, \mathbf{x} \,\rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{K}\,.$$

Allora risulta $\mathbf{x}_o \in \mathcal{O}$ dove $\mathcal{O}$ è l'insieme debolmente aperto

$$\mathcal{O} := \big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \;:\; \langle\, f\,,\, \mathbf{x} \,\rangle < \alpha \big\} \subset \mathcal{X} \setminus \mathcal{K}\,.$$

Pertanto $\mathcal{X} \setminus \mathcal{K}$ è debolmente aperto e quindi $\mathcal{K}$ è debolmente chiuso. □

In uno spazio di HILBERT vale il seguente teorema di BANACH-SAKS [37] ([43]):

- Ogni successione **debolmente convergente** ammette una successione estratta tale che la successione dei valori medi converge fortemente allo stesso limite.

Dal teorema di MAZUR si deduce che

Corollario 7.6. Semicontinuità inferiore debole. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio normato. Un funzionale $f \in \mathcal{X}'$ che è convesso ed inferiormente semicontinuo risulta* **debolmente inferiormente semicontinuo**.

Dim. Basta osservare che gli insiemi di livello di f

$$\mathcal{A}_\lambda := \big\{ \mathbf{v} \in \mathcal{X} \;:\; f(\mathbf{v}) \le \lambda \big\}$$

sono debolmente chiusi. Infatti essi risultano chiusi in virtù della inferiormente semicontinuità di f e convessi in virtù della convessità di f. □

Ne segue che

Corollario 7.7. Convergenza debole e limitatezza. *Una successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$ che in uno spazio normato $\mathcal{X}$ converge debolmente ad un elemento $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X}$ è limitata e risulta*

$$\|\, \mathbf{u}_\infty \,\|_{\mathcal{X}} \le \liminf \|\, \mathbf{u}_n \,\|_{\mathcal{X}}\,.$$

[37] STANISLAW SAKS (1897-1942) matematico di famiglia ebrea collaborò con STEINHAUS e BANACH a Varsavia e poi a Lvov dove fu arrestato ed ucciso dalla Gestapo.

Dim. Basta osservare che la funzione $\| \mathbf{u} \|_{\mathcal{X}}$ è convessa e continua e quindi risulta *a fortiori* inferiormente semicontinua. Dal corollario 7.6 segue che $\| \mathbf{u} \|_{\mathcal{X}}$ è debolmente inferiormente semicontinua. □

Una caratterizzazione degli spazi di BANACH riflessivi è fornita dal seguente risultato profondo dovuto ad EBERLEIN e SHMULYAN.

Proposizione 7.8. Proprietà di compattezza debole. *Uno spazio di* BANACH *è riflessivo se e solo se da ogni successione limitata* $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$ *è possibile estrarre una sottosuccessione debolmente convergente ad un elemento di* $\mathcal{X}$ *.*

Dim. Vedi [29], pag.141. □

Si noti la seguente importante proprietà degli operatori compatti (vedi [34], pag.199 e [14], teor. 1 pag. 130).

Proposizione 7.9. Completa continuità. *Siano* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *due spazi normati e sia* $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$ *un operatore lineare compatto. Allora*

$$\boxed{i) \quad \mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u}_\infty \;\Rightarrow\; \mathbf{A}\mathbf{u}_n \to \mathbf{A}\mathbf{u}_\infty \,.}$$

Se $\mathcal{X}$ *è uno spazio di* BANACH *riflessivo tale proprietà implica viceversa che l'operatore lineare* $\mathbf{A}$ *è compatto.*

Dim. Supponiamo che la successione $\{\mathbf{A}\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{Y}$ non converga fortemente a $\mathbf{A}\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{Y}$. Esisterebbe allora una sottosuccessione $\{\mathbf{A}\mathbf{u}_k\} \subset \mathcal{Y}$ tale che $\| \mathbf{A}\mathbf{u}_k - \mathbf{A}\mathbf{u}_\infty \|_{\mathcal{Y}} > \varepsilon > 0$.

Osserviamo quindi che la successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$, essendo debolmente convergente a $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X}$, è limitata in virtù della proposizione 7.7.

Per la compattezza di $\mathbf{A}$ è possibile assumere che $\mathbf{A}\mathbf{u}_k \to \mathbf{y}_\infty$ per cui risulta $\mathbf{A}\mathbf{u}_\infty = \mathbf{y}_\infty$.

Ciò contraddice la condizione $\| \mathbf{A}\mathbf{u}_k - \mathbf{A}\mathbf{u}_\infty \|_{\mathcal{Y}} > \varepsilon > 0$ e dunque prova il primo risultato.

Viceversa supponiamo vera la $i)$ con $\mathcal{X}$ completo e riflessivo.

Allora sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ un insieme limitato e si consideri una successione $\{\mathbf{A}\mathbf{u}_n\} \subseteq \mathbf{A}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{Y}$.

La successione $\{\mathbf{u}_n\} \subseteq \mathcal{B}$ è limitata e quindi per il teorema di EBERLEIN-SHMULYAN ammette una sottosuccessione $\{\mathbf{u}_k\} \subseteq \mathcal{B}$ debolmente convergente ad un elemento $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X}$.

Ma allora per la $i)$ risulta $\mathbf{A}\mathbf{u}_k \to \mathbf{A}\mathbf{u}_\infty$. Ne segue che l'insieme $\mathbf{A}(\mathcal{B})$ è compatto. $\square$

Per le applicazioni sono importanti i seguenti risultati.

Proposizione 7.10. Convergenza forte e convergenza debole. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio di* BANACH *uniformemente convesso e sia $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$ una successione debolmente convergente ad un elemento $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X}$ e tale che*

$$\limsup \| \mathbf{u}_n \|_{\mathcal{X}} \leq \| \mathbf{u}_\infty \|_{\mathcal{X}} .$$

Allora la successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$ converge fortemente a $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X}$.

Dim. Vedi [41], prop. III.30. $\square$

Proposizione 7.11. Continuità debole. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due spazi normati e sia $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$ un operatore lineare continuo. Allora*

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u}_\infty \;\Rightarrow\; \mathbf{A}\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{A}\mathbf{u}_\infty .$$

Dunque ogni operatore lineare fortemente continuo è anche debolmente continuo.

Dim. Per ogni $f \in \mathcal{X}'$ risulta $(f \circ \mathbf{A})(\mathbf{u}) \in \mathcal{X}'$ e pertanto

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u}_\infty \;\Rightarrow\; f(\mathbf{A}\mathbf{u}_n) \to f(\mathbf{A}\mathbf{u}_\infty) .$$

Quindi $\mathbf{A}\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{A}\mathbf{u}_\infty$. $\square$

In uno spazio di HILBERT $\mathcal{H}$ valgono tutte le fondamentali proprietà sopra enunciate. Infatti uno spazio di HILBERT è **riflessivo** ed **uniformemente convesso**.

Questi risultati forniscono uno strumento essenziale per stabilire l'esistenza di soluzioni di problemi lineari e non lineari.

La seguente proposizione ne costituisce un'importante applicazione.

Proposizione 7.12. Minimo di un funzionale convesso. *Sia $\mathcal{K}$ un convesso chiuso dello spazio di* HILBERT *$\mathcal{H}$ e $\phi : \mathcal{K} \mapsto \Re \cup +\infty$ con $\phi \neq +\infty$ un funzionale convesso ed inferiormente semi-continuo su $\mathcal{H}$. Se è soddisfatta una delle condizioni*

- *$\mathcal{K}$ è limitato,*
- *$\mathcal{K}$ non limitato e ϕ soddisfa la seguente condizione di* **crescita all'infinito**

$$\lim_{\| \mathbf{u} \| \to \infty} \phi(\mathbf{u}) = +\infty , \quad \mathbf{u} \in \mathcal{K} ,$$

allora esiste un elemento di $\mathcal{K}$ su cui ϕ attinge il minimo.

Dim. Sia $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{K}$ una successione minimizzante per ϕ, cioè tale che

$$\lim_{n\to\infty} \phi(\mathbf{u}_n) = \inf \big\{ \phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{K} \big\}.$$

La condizione di crescita all'infinito assicura che la successione minimizzante è limitata. Allora la proprietà di compattezza debole, (proposizione 7.8) esiste allora una sottosuccessione, che denoteremo ancora con $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{K}$ debolmente convergente ad un elemento $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{H}$.

Il teorema di MAZUR (proposizione 7.5) assicura quindi che $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{K}$. L'inferiore debole continuità di ϕ (proposizione 7.6) implica infine che

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u}_\infty \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \phi(\mathbf{u}_n) = \liminf_{n\to\infty} \phi(\mathbf{u}_n) = \phi(\mathbf{u}_\infty),$$

e dunque che $\phi(\mathbf{u}_\infty) = \min \big\{ \phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{K} \big\}$. □

Per quanto detto in precedenza il teorema rimane valido se lo spazio $\mathcal{H}$ è uno spazio di BANACH riflessivo.

8. CONVERGENZA DEBOLE STELLA

Sia $\mathcal{X}$ uno spazio normato $\mathcal{X}$. La nozione di convergenza debole può essere introdotta anche nello spazio duale $\mathcal{X}'$ facendo riferimento alla dualità tra $\mathcal{X}'$ ed il biduale $\mathcal{X}''$.

Nello spazio duale $\mathcal{X}'$ è importante introdurre anche una nuova topologia che fa riferimento alla dualità tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$.

- La **topologia debole stella** $\mathcal{T}(\mathcal{X}', \mathcal{X})$ in $\mathcal{X}'$ è la più debole topologia che rende continui i funzionali $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{x}} : \mathcal{X}' \mapsto \Re$ con $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ definiti da $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{x}}(f) := \langle f, \mathbf{x} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{X}'$ (vedi [41] sez. III.4.).

Essa può costruirsi definendo gli aperti di $\mathcal{T}(\mathcal{X}', \mathcal{X})$ nel modo seguente. Si prendono le intersezioni finite delle controimmagini di aperti in $\Re$ tramite i funzionali $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{x}} : \mathcal{X}' \mapsto \Re$ con $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e quindi le unioni qualsiasi di tali intersezioni (vedi [41] sez. III.2.).

In termini di convergenza si ha che

- una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{X}'$ è **debolmente stella convergente** se il limite $\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \mathbf{u} \rangle$ esiste ed è finito per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{X}'$.

La **convergenza debole stella** di una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{X}$ ad un elemento $f_\infty \in \mathcal{X}'$ è quindi definita da

$$f_n \xrightarrow{w^*} f_\infty \iff \lim_{n\to\infty} \langle f_n - f_\infty , \mathbf{u} \rangle = 0 , \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{X} .$$

L'unicità del limite debole stella è conseguenza della seguente proposizione (vedi [41] prop. III.10.).

Proposizione 8.1. Proprietà di separazione. *La topologia debole stella di uno spazio normato $\mathcal{X}$ è separante (*HAUSDORFF*).*

Dim. Siano f_1 e f_1 due funzionali distinti di $\mathcal{X}'$. Essendo $f_1 \neq f_2$ esiste un elemento $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tale che

$$\langle f_1 , \mathbf{x} \rangle < \alpha < \langle f_2 , \mathbf{x} \rangle .$$

Allora $f_i \in \mathcal{O}_i$ dove $\mathcal{O}_i$ con $i = 1, 2$ sono gli insiemi debolmente stella aperti

$$\mathcal{O}_1 := \left\{ f \in \mathcal{X}' \ : \ \langle f , \mathbf{x} \rangle < \alpha \right\} ,$$

$$\mathcal{O}_2 := \left\{ f \in \mathcal{X}' \ : \ \langle f , \mathbf{x} \rangle > \alpha \right\} .$$

La conclusione segue dal fatto che $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. □

Vale la seguente proprietà analoga a quella relativa alla convergenza debole.

Proposizione 8.2. Convergenza del prodotto di dualità. *Siano $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$ e $\{f_n\} \subset \mathcal{X}'$ due successioni tali che*

$$f_n \xrightarrow{w^*} f , \qquad \mathbf{u}_n \to \mathbf{u}.$$

Allora $\langle f_n , \mathbf{u}_n \rangle \to \langle f , \mathbf{u} \rangle$.

Dim. Dalla diseguaglianza

$$|\langle f_n , \mathbf{u}_n \rangle - \langle f , \mathbf{u} \rangle| \leq |\langle f_n - f , \mathbf{u} \rangle + \langle f_n , \mathbf{u} - \mathbf{u}_n \rangle| \leq$$

$$\leq \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \|_{\mathcal{X}} \| f_n \|_{\mathcal{X}'} + \langle f_n - f , \mathbf{u} \rangle .$$

si deduce immediatamente il risultato. □

Poichè in generale risulta $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}''$, la convergenza forte e quella debole in $\mathcal{X}'$ implicano la convergenza debole stella.

La topologia debole stella gode delle seguenti notevoli proprietà.

- Se $\mathbf{\Phi} : \mathcal{X}' \mapsto \Re$ è un funzionale lineare e continuo per la topologia debole stella allora esiste $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tale che $\mathbf{\Phi}(f) := \langle f , \mathbf{x} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{X}'$. (vedi [41] prop. III.13.).
- Ogni iperpiano H chiuso in $\mathcal{X}'$ per la topologia debole stella ha la forma $H = \{ f \in \mathcal{X}' : \langle f , \mathbf{x} \rangle = \alpha \}$ con $\alpha \in \Re$ e $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \setminus \{\mathbf{o}\}$ (vedi [41] coroll. III.14.).

Teorema di BANACH-ALAOGLU-BOURBAKI.

- La sfera $S := \{ f \in \mathcal{X}' : \| f \|_{\mathcal{X}'} \leq 1 \}$ chiusa in $\mathcal{X}'$ per la topologia forte è **compatta** per la topologia debole stella. (vedi [41] teor. III.15.).

NICOLAS BOURBAKI era un generale Napoleonico noto per non aver mai perso una battaglia (passò la frontiera svizzera con tutta la sua armata evitando così di affrontare l'esercito prussiano nella battaglia di Sedan). BOURBAKI è lo pseudonimo scelto verso la fine degli anni '30 da un gruppo di sette giovani matematici francesi:

HENRI CARTAN, CLAUDE CHEVALLEY, JEAN DELSARTE, JEAN DIEUDONNÉ, SZOLEM MANDELBROJT, RENÉ DE POSSEL, ANDRÉ WEIL.

L'intento iniziale era quello di scrivere una versione aggiornata del *Cours d'Analyse* di E. GOURSAT [38] e di prendersi gioco dei matematici parrucconi dell'epoca, facendo tenere ad un attore opportunamente istruito conferenze del celebre N. BOURBAKI professore all'università di NANCAGO (contrazione di NANCY e CHICAGO dove molti di loro avevano insegnato). Il progetto si trasformò poi nella pubblicazione degli *Elément de mathématique* che aveva l'obiettivo di ricostruire tutto l'edificio della matematica a partire da pochi e semplici concetti primitivi.

---

[38] EDOUARD GOURSAT (1858-1936).

9. TEOREMI DI BANACH-STEINHAUS

Il seguente lemma costituisce uno strumento indispensabile per la dimostrazione dei risultati che saranno illustrati in questa sezione (vedi [41] theorem II.1).

Proposizione 9.1. Lemma di BAIRE-HAUSDORFF. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio metrico completo. Valgono le seguente proprietà:*

$i)$ Per ogni successione di insiemi chiusi $\{\mathcal{X}_n\}\,, k = 1, \ldots, \infty$ in $\mathcal{X}$

$$\mathrm{int}\,\mathcal{X}_n = \emptyset \quad \forall\, n \geq 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{int}\,\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_k = \emptyset\,,$$

dove $\mathrm{int}\,\mathcal{X}_n$ è l'interno di $\mathcal{X}_n$ in $\mathcal{X}$ e cioè l'unione della famiglia degli aperti di $\mathcal{X}$ che sono contenuti in $\mathcal{X}_n$.
$ii)$ Per ogni successione $\{\mathcal{O}_n\}\,, n = 1, \ldots, \infty$ di insiemi aperti densi in $\mathcal{X}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \quad \text{è denso in} \quad \mathcal{X}\,.$$

Si osservi l'equivalenza

$$\mathrm{int}\,\mathcal{X}_n = \emptyset \iff \mathcal{O}_n = \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_n \quad \text{denso in} \quad \mathcal{X}\,.$$

Dalla formula di DE MORGAN*:*

$$\mathcal{X} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{X} \setminus \mathcal{O}_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n\,,$$

si evince pertanto che le proprietà $i)$ e $ii)$ sono tra loro equivalenti. □

Come corollario si ha che per ogni una successione di insiemi chiusi $\{\mathcal{X}_n\}\,, n = 1, \ldots, n$ in $\mathcal{X}$

$$\mathcal{X} \neq \emptyset\,, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n = \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \exists\, k \;:\; \mathrm{int}\,\mathcal{X}_k \neq \emptyset\,.$$

Sulla base del lemma di BAIRE [39] -HAUSDORFF è possibile pervenire ad un insieme di famosi risultati che costituiscono il fondamento dell'Analisi Fun-

[39] RENÉ BAIRE (1874-1932).

zionale. Essi sono essenzialmente dovuti al matematico polacco STEFAN BANACH [4]. Ecco un classico importante risultato dovuto a BANACH e H. STEINHAUS [40] .

Proposizione 9.2. Principio di uniforme limitatezza. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio di* BANACH, *$\mathcal{Y}$ uno spazio normato e $\{\mathbf{A}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ una famiglia di operatori lineari e limitati $\mathbf{A}_\alpha \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$, allora*

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \| \mathbf{A}_\alpha \mathbf{x} \| < \infty \,, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \| \mathbf{A}_\alpha \| < \infty \,.$$

dove

$$\| \mathbf{A}_\alpha \| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \{ \| \mathbf{A}_\alpha \mathbf{x} \|_{\mathcal{Y}} \; : \; \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \le 1 \} \,,$$

è la norma nello spazio di BANACH $\mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$. □

Dal principio di uniforme limitatezza segue che

Proposizione 9.3. Successione di operatori. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio di* BANACH, *$\mathcal{Y}$ uno spazio normato e $\{\mathbf{A}_n \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ una famiglia di operatori lineari e limitati $\mathbf{A}_n \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$. Allora l'operatore $\mathbf{A}$ definito da*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} := \lim_{n\to\infty} \| \mathbf{A}_n \mathbf{x} \| \,, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,,$$

è lineare e limitato e risulta

$$\| \mathbf{A} \| \le \liminf_{n\to\infty} \| \mathbf{A}_n \| \,.$$

Dim. La linearità dell'operatore $\mathbf{A}$ è evidente. La successione $\{\| \mathbf{A}_n \mathbf{x} \|\}$ è limitata in virtù della continuità della norma. Dunque $\sup_{n\ge1} \| \mathbf{A}_n \| < \infty$ e quindi per ogni intero $k = 1, 2, \ldots ,$ si ha

$$\| \mathbf{A}_k \mathbf{x} \| \le \sup_{n\ge1} \| \mathbf{A}_n \| \, \| \mathbf{x} \| \,.$$

La continuità della norma impica infine che

$$\| \mathbf{A}\mathbf{x} \| = \lim_{n\to\infty} \| \mathbf{A}_n \mathbf{x} \| \le \liminf_{n\to\infty} \| \mathbf{A}_n \| \, \| \mathbf{x} \| \,, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,,$$

e quindi il risultato. □

[40] HUGO DYONIZY STEINHAUS (1887-1972) di famiglia ebrea, studiò matematica a Göttingen dove si dottorò nel 1911 sotto la supervisione di HILBERT. Fondò poi nel 1916 a Kraków con i più giovani BANACH e NIKODYM una società matematica.

Molti risultati profondi di Analisi Funzionale discendono dal seguente celebrato teorema di BANACH (vedi [41] theorem II.5), anch'esso fondato sul lemma di BAIRE-HAUSDORFF.

Proposizione 9.4. Teorema dell'applicazione aperta. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi di* BANACH *e* $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$ *un operatore lineare continuo e suriettivo. Esiste allora una costante $c > 0$ tale che*

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{Y}} < c \;\Rightarrow\; \exists\, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \;:\; \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} < 1,\; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}\,,$$

ovvero in termini insiemistici

$$\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{o}, c) \subset \mathbf{A}\left(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathbf{o}, 1)\right),$$

dove $\mathcal{B}(\mathbf{o}, c)$ è la palla aperta di raggio c e centro in $\mathbf{o}$. Ne segue che l'operatore $\mathbf{A}$ mappa gli aperti di $\mathcal{X}$ in aperti di $\mathcal{Y}$. □

Per definizione un operatore $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è continuo se le contro-immagini tramite $\mathbf{A}$ di insiemi aperti in $\mathcal{Y}$ sono aperti in $\mathcal{X}$.

Un corollario del teorema dell'applicazione aperta mostra che, se l'operatore agisce tra spazi di BANACH ed è linerare e biunivoco, vale anche la proprietà inversa.

Proposizione 9.5. Teorema dell'applicazione inversa. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi di* BANACH. *Se un operatore lineare continuo $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$ è biunivoco da $\mathcal{X}$ su $\mathcal{Y}$ allora l'operatore inverso è lineare e continuo.*

Dim. Il teorema dell'applicazione aperta implica che se $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathcal{Y}} < c$ allora $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} < 1$. Dunque per omogeneità $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} \le c^{-1}\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathcal{Y}}$ e dunque $\mathbf{A}^{-1}$ è continuo. □

Di grande importanza è la seguente conseguenza del teorema precedente.

Corollario 9.6. Criterio di equivalenza tra norme. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio di* BANACH *per la topologia indotta dalle due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Allora le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti se*

$$\|\mathbf{x}\|_2 \le c\,\|\mathbf{x}\|_1 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,.$$

Dim. Considerando la mappa identica da $\{\mathcal{X}, \| \cdot \|_1\}$ a $\{\mathcal{X}, \| \cdot \|_2\}$, la proposizione 9.5, assicura che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\| \mathbf{x} \|_1 \leq C \| \mathbf{x} \|_2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} ,$$

e pertanto le norme sono equivalenti. □

Si noti che (vedi e.g. [25] teor. 4.4.1)

■ In uno spazio di dimensione finita tutte le norme sono tra loro equivalenti.

Diamo ora le seguenti definizioni. Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi di BANACH.

- Il **nucleo di un operatore lineare** $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è il sottospazio lineare

$$\operatorname{Ker} \mathbf{A} = \big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \ : \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o} \in \mathcal{Y} \big\} \subseteq \mathcal{X} .$$

- L'**immagine di un operatore lineare** $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è il sottospazio lineare

$$\operatorname{Im} \mathbf{A} = \big\{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \ : \ \exists \, \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \big\} \subseteq \mathcal{Y} .$$

- Il **grafico** di un mappa $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ avente dominio $\operatorname{dom} \mathbf{A} \subseteq \mathcal{X}$ è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ definito da

$$\mathcal{G}(\mathbf{A}) \, := \big\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}\} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \ : \ \mathbf{x} \in \ \operatorname{dom} \mathbf{A} \big\} .$$

- Un **operatore lineare chiuso** $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è un operatore lineare il cui grafico è chiuso nello spazio di BANACH $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Un operatore chiuso può essere equivalentemente caratterizzato dalla proprietà

$$\mathbf{x} \in \ \operatorname{dom} \mathbf{A} , \quad \left. \begin{array}{l} \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty \|_{\mathcal{X}} \to 0 \\ \\ \| \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}_\infty \|_{\mathcal{Y}} \to 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ \mathbf{x}_\infty \in \ \operatorname{dom} \mathbf{A} , \quad \mathbf{y}_\infty = \mathbf{A}\mathbf{x}_\infty ,$$

  ovvero richiedendo che il sottospazio lineare $\operatorname{dom} \mathbf{A} \subseteq \mathcal{X}$ sia uno spazio di BANACH per la norma $\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} + \| \mathbf{A}\mathbf{x} \|_{\mathcal{Y}}$.

Ogni operatore lineare continuo $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\big\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\big\}$ è ovviamente chiuso.

Vale la seguente semplice proprietà.

Proposizione 9.7. Continuità e chiusura. *Sia $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ una coppia di spazi lineari e $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ un operatore. Siano quindi $\mathcal{T}_{\mathcal{X}0}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{X}1}$ due topologie su $\mathcal{X}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}0}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}1}$ due topologie su $\mathcal{Y}$, con $\mathcal{T}_{\mathcal{X}0}$ meno fine di $\mathcal{T}_{\mathcal{X}1}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}0}$ meno fine di $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}1}$. Allora se l'operatore $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è continuo rispetto alle topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{X}0}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}0}$ ed è tale che* $\operatorname{dom} \mathbf{A} = \mathcal{X}$*, il grafico $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ è chiuso in $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ rispetto alle topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{X}1}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}1}$.*

Dim. Basta osservare che

$$\mathbf{x}_n \xrightarrow{1} \mathbf{x}_\infty \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_n \xrightarrow{0} \mathbf{x}_\infty\,.$$

Quindi per la proprietà di continuità di $\mathbf{A}$, essendo $\operatorname{dom}\mathbf{A} = \mathcal{X}$, risulta

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}_n \xrightarrow{0} \mathbf{x}_\infty \;\Rightarrow\; \mathbf{A}\mathbf{x}_n \xrightarrow{0} \mathbf{A}\mathbf{x}_\infty\,, \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_n \xrightarrow{1} \mathbf{y}_\infty \;\Rightarrow\; \mathbf{A}\mathbf{x}_n \xrightarrow{0} \mathbf{y}_\infty\,, \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}\mathbf{x}_\infty = \mathbf{y}_\infty\,,$$

in virtù dell'unicità del limite. □

L'importante risultato che segue è anch'esso dovuto a BANACH.

Proposizione 9.8. Teorema del grafico chiuso. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi di* BANACH. *Un operatore lineare chiuso $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ con* $\operatorname{dom}\mathbf{A} = \mathcal{X}$ *è continuo.*

Dim. Si considerino su $\mathcal{X}$ le due norme

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} + \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathcal{Y}} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}}\,.$$

Poichè $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ è chiuso, $\mathcal{X}$ munito della norma $\|\cdot\|_1$ è uno spazio di BANACH. In virtù della proposizione 9.6, essendo $\|\mathbf{x}\|_1 \ge \|\mathbf{x}\|_2$, le due norme sono equivalenti ed esiste pertanto una costante c tale che $\|\mathbf{x}\|_1 \le c\,\|\mathbf{x}\|_2$ e cioè $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathcal{Y}} \le c\,\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}}$. □

Un esempio importante di operatori chiusi è fornito dagli operatori differenziali nel senso delle distribuzioni, come sarà mostrato nella proposizione II.3.2. Si ha inoltre

Proposizione 9.9. Chiusura dell'operatore duale. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi di* BANACH *e $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ un operatore lineare con* $\operatorname{dom}\mathbf{A}$ *denso in $\mathcal{X}$. Allora l'operatore duale $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$ è operatore lineare chiuso e tra i grafici di $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ e $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$ sussistono le seguenti relazioni*

$$\mathcal{G}(\mathbf{A}') = \big[\mathbf{V}\,\mathcal{G}(\mathbf{A})\big]^{\perp}\,, \quad \mathbf{V}'\mathcal{G}(\mathbf{A}') = \mathcal{G}(\mathbf{A})^{\perp}\,,$$

dove $\mathbf{V} \in \mathrm{L}\big\{\mathcal{X}\times\mathcal{Y};\mathcal{Y}\times\mathcal{X}\big\}$ e $\mathbf{V}' \in \mathrm{L}\big\{\mathcal{Y}'\times\mathcal{X}';\mathcal{X}'\times\mathcal{Y}'\big\}$ sono gli operatori duali, lineari continui e suriettivi definiti da

$$\mathbf{V}\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} = \{-\mathbf{y},\mathbf{x}\}\,, \quad \mathbf{V}'\{\mathbf{y}',\mathbf{x}'\} = \{\mathbf{x}',-\mathbf{y}'\}\,.$$

Dim. La relazione di dualità $\langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle$ può scriversi

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \{\mathbf{y}', \mathbf{A}'\mathbf{y}'\}_{\mathcal{Y}'\times\mathcal{X}'} \,,\, \{-\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}\}_{\mathcal{Y}\times\mathcal{X}} \,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom} \mathbf{A} \iff \\
\iff &\langle\, \{\mathbf{y}', \mathbf{A}'\mathbf{y}'\}_{\mathcal{Y}'\times\mathcal{X}'} \,,\, [\mathbf{V}\{\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}\}]_{\mathcal{Y}\times\mathcal{X}} \,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom} \mathbf{A} \,,
\end{aligned}
$$

ed equivale pertanto alla condizione di ortogonalità $\mathcal{G}(\mathbf{A}') = \big[\mathbf{V}\, \mathcal{G}(\mathbf{A})\big]^{\perp}$.

Il grafico di $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$ è quindi chiuso in $\mathcal{Y}' \times \mathcal{X}'$.

Riscrivendo la relazione di dualità nella forma

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \{\mathbf{A}'\mathbf{y}', -\mathbf{y}'\}_{\mathcal{X}'\times\mathcal{Y}'} \,,\, \{\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom} \mathbf{A} \iff \\
\iff &\langle\, [\mathbf{V}'\{\mathbf{y}', \mathbf{A}'\mathbf{y}'\}]_{\mathcal{X}'\times\mathcal{Y}'} \,,\, \{\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{dom} \mathbf{A} \,,
\end{aligned}
$$

si perviene alla condizione di ortogonalità $\mathbf{V}'\mathcal{G}(\mathbf{A}') = \big[\mathcal{G}(\mathbf{A})\big]^{\perp}$. □

Analogamente si dimostra che

Proposizione 9.10. Chiusura dell'operatore aggiunto. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi di* HILBERT *e $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ un operatore lineare con $\operatorname{dom} \mathbf{A}$ denso in $\mathcal{X}$. Allora l'operatore aggiunto $\mathbf{A}^* : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{X}$ è operatore lineare chiuso.* □

Ricordando le definizioni introdotte nella sezione 6.6, dalla proposizione 9.10 segue che

- un operatore **autoaggiunto** $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ è chiuso in quanto $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

Inoltre dalla proposizione 9.8 si evince che

- un operatore **simmetrico** $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ con $\operatorname{dom} \mathbf{A} = \mathcal{X}$ è **limitato** ed **autoaggiunto**.

E' facile verificare che

Proposizione 9.11. Nucleo di un operatore chiuso. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi di* BANACH *e $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ un operatore lineare chiuso. Allora il nucleo*

$$
\operatorname{Ker} \mathbf{A} := \big\{ \mathbf{x} \in \operatorname{dom} \mathbf{A} \;:\; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o} \big\} \,,
$$

è un sottospazio lineare chiuso in $\mathcal{X}$. □

Sussiste poi il seguente importante risultato.

Proposizione 9.12. Relazioni tra nucleo ed immagine. *Siano* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *spazi normati,* $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ *un operatore lineare chiuso con* $\mathrm{dom}\,\mathbf{A}$ *denso in* $\mathcal{X}$ *e* $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$ *l'operatore duale. Allora*

$$\begin{cases} i) & (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} \supseteq \overline{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'}\,, \\ ii) & (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}')^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}}\,. \end{cases}$$

Se $\mathcal{X}$ *è riflessivo (e dunque è uno spazio di* BANACH *riflessivo) risulta*

$$iii) \quad (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'}\,.$$

Dim. La proposizione 5.18 fornisce le relazioni

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}')^{\perp}\,, \\ \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}' = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\perp}\,. \end{cases}$$

Prendendo i complementi ortogonali si ottiene

$$\begin{cases} i) & (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}')^{\perp\perp} \supset \overline{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'}\,, \\ ii) & (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}')^{\perp} = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}}\,. \end{cases}$$

Se $\mathcal{X}$ è riflessivo la proposizione 5.12 assicura che $(\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}')^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'}$ e quindi che $(\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'}$. □

Ecco una interessante applicazione della proposizione 9.12.

Proposizione 9.13. Iniezioni continue e dense. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio normato e* $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ *la relativa topologia. Sia quindi* $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ *un sottospazio lineare denso in* $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{X}}\}$. *Se* $\mathcal{S}$ *è uno spazio di* BANACH *riflessivo per una norma che induce in* $\mathcal{S}$ *una topologia* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ *più forte di quella indotta da* $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{X}}\}$*, allora*

$$\boxed{\mathcal{S} \subset \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathcal{X}' \subset \mathcal{S}'}$$

con **iniezioni continue e dense**.

Dim. Denotiamo con $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{L}\{\mathcal{S};\mathcal{X}\}$ l'iniezione canonica continua di $\{\mathcal{S},\mathcal{T}_{\mathcal{S}}\}$ in $\{\mathcal{X},\mathcal{T}_{\mathcal{X}}\}$. La proposizione 5.16 assicura che l'operatore duale $\boldsymbol{\mu}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{X}';\mathcal{S}'\}$ è continuo. Essendo poi $\operatorname{dom}\boldsymbol{\mu} = \mathcal{S}$, dalla *iii)* della proposizione 9.12 si deduce che

$$\overline{\operatorname{Im}\boldsymbol{\mu}'} = (\operatorname{Ker}\boldsymbol{\mu})^{\perp} = \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{S}}^{\perp} = \mathcal{S}'\,.$$

Dunque l'immagine di $\boldsymbol{\mu}'$ è densa in $\mathcal{S}'$. Se inoltre $\mathcal{S}$ è denso in $\{\mathcal{X},\mathcal{T}_{\mathcal{X}}\}$ si ha

$$\overline{\operatorname{Im}\boldsymbol{\mu}} = \mathcal{X} = (\operatorname{Ker}\boldsymbol{\mu}')^{\perp} \;\Rightarrow\; \operatorname{Ker}\boldsymbol{\mu}' = \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{X}'}\,,$$

e quindi $\boldsymbol{\mu}'$ è iniettiva. □

Se $\mathcal{X}$ ed $\mathcal{X}'$ sono spazi di HILBERT esiste tra essi un isomorfismo isometrico in base al teorema di RIESZ-FRÉCHET. Identificando $\mathcal{X}$ ed $\mathcal{X}'$ la proposizione 9.13 si specializza nel seguente risultato.

Proposizione 9.14. Iniezioni continue e dense. *Sia $\mathcal{S}$ uno spazio di* HILBERT *con iniezione continua e densa in uno spazio di* HILBERT *pivot $\mathcal{X}$. Allora*

$$\boxed{\mathcal{S} \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{S}'}$$

con iniezioni continue e dense. Il **prodotto di dualità** *su $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ è identificato con l'unica estensione per continuità del prodotto interno in $\mathcal{X}$.* □

Osservazione 9.1. L'dentificazione $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ esclude quella $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ in quanto altrimenti si giungerebbe all'assurdo che $\mathcal{S} = \mathcal{X} = \mathcal{X}' = \mathcal{S}'$. ■

9.1. Forme bilineari ed operatori associati

Siano $\mathcal{X},\mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y},\mathcal{Y}'$ due coppie di spazi di HILBERT duali. Consideriamo una forma bilineare continua $\mathbf{a}$ definita su $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}'$

$$|\,\mathbf{a}(\mathbf{x},\mathbf{y}')\,| \leq C\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{y}'\,\|_{\mathcal{Y}'} \quad \forall\,\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \forall\,\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'\,.$$

La norma di $\mathbf{a} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X},\mathcal{Y}'\}$ è per definizione

$$\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}'} := \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{X},\mathbf{y}'\in\mathcal{Y}'} \frac{|\,\mathbf{a}(\mathbf{x},\mathbf{y}')\,|}{\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{y}'\,\|_{\mathcal{Y}'}} \leq C\,.$$

Alla forma bilineare $\mathbf{a}$ sono associati due operatori lineari continui in dualità $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$ e $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}';\mathcal{X}'\}$ mediante l'identità

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},\mathbf{y}') = \langle\, \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \forall\, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}' \,.$$

Dalla proposizione 5.18 sappiamo che valgono le relazioni di ortogonalità

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}')^{\perp} \,, \quad \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}' = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\perp} \,.$$

Prendendo i complementi ortogonali si ha

$$(\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}')^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'} \,, \quad (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}')^{\perp} = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}} \,.$$

Ne segue che le relazioni di ortogonalità

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{A}' = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} \,, \quad \mathrm{Im}\,\mathbf{A} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}')^{\perp} \,,$$

sussistono se e solo se rispettivamente $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'$ e $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ sono chiusi.

Vedremo nel seguito che tali condizioni sono tra loro equivalenti.

Dalle proposizioni 4.3 e 5.16 sappiamo che la continuità è equivalente alla limitatezza e che le norme di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ sono eguali, per cui possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} C\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} &\ge \|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}'} \quad && \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,, \\ C\,\|\,\mathbf{y}'\,\|_{\mathcal{Y}'} &\ge \|\,\mathbf{A}'\mathbf{y}'\,\|_{\mathcal{X}'} \quad && \forall\, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'\,. \end{aligned}$$

Notiamo inoltre che, denotando le norme negli spazi di HILBERT quozienti $\mathcal{X}/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ and $\mathcal{Y}'/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'$ con

$$\begin{aligned} \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} &:= \inf\{\|\,\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\,\|_{\mathcal{X}} \;:\; \boldsymbol{\xi} \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}\}\,, \\ \|\,\mathbf{y}'\,\|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} &:= \inf\{\|\,\mathbf{y}'-\boldsymbol{\eta}\,\|_{\mathcal{Y}'} \;:\; \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'\}\,, \end{aligned}$$

le condizioni di limitatezza possono riscriversi

$$\begin{aligned} C\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} &\ge \|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}} \quad && \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,, \\ C\,\|\,\mathbf{y}'\,\|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} &\ge \|\,\mathbf{A}'\mathbf{y}'\,\|_{\mathcal{X}'} \quad && \forall\, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}\,. \end{aligned}$$

Alternativamente le norme negli spazi quozienti possono anche scriversi in termini dei proiettori

- $\mathbf{P} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X},;\mathcal{X}\}$ proiettore ortogonale sul sottospazio $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \subseteq \mathcal{X}$,
- $\mathbf{Q}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}',;\mathcal{Y}'\}$ proiettore ortogonale sul sottospazio $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}' \subseteq \mathcal{Y}'$,

nella forma

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} = \| \mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \,, \quad \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} = \| \mathbf{y}' - \mathbf{Q}'\mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'} \,.$$

Si noti che per i proiettori ortogonali $\mathbf{P}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{X}'; \mathcal{X}'\}$ e $\mathbf{Q} \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}; \mathcal{Y}\}$ duali di $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}'$ risulta

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{P}' = (\mathrm{Ker}\,\mathbf{P})^{\perp} = (\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\oplus\perp} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{X}}^{-1}\,(\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\oplus\oplus} = (\mathrm{Im}\,\mathbf{A}')^{\oplus} \subseteq \mathcal{X}' \,,$$

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{Q} = (\mathrm{Ker}\,\mathbf{Q}')^{\perp} = (\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}')^{\oplus\perp} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}')^{\oplus\oplus} = (\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\oplus} \subseteq \mathcal{Y} \,,$$

dove $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{X}} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X}'; \mathcal{X}\}$ e $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}} \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}'; \mathcal{Y}\}$ sono gli isomorfismi isometrici di RIESZ-FRÉCHET.
La diseguaglianza di SCHWARZ fornisce

$$a) \quad \| \mathbf{A}\mathbf{x} \|_{\mathcal{Y}} \, \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \geq |\langle \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle| \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \forall\, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}',$$

$$b) \quad \| \mathbf{A}'\mathbf{y}' \|_{\mathcal{X}'} \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \geq |\langle \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x} \rangle| \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \forall\, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'.$$

Il seguente risultato sarà richiamato nella proposizione 9.16

Lemma 9.15. *Siano $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'$ spazi di* HILBERT *duali e $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$ e $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}'; \mathcal{X}'\}$ una coppia di operatori duali. Allora*

- *Se $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ è chiuso, esiste un $\mathbf{x}_o \in \mathcal{X}$ tale che*

$$i) \quad \| \mathbf{A}\mathbf{x}_o \|_{\mathcal{Y}} \, \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} = |\langle \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x}_o \rangle| \quad \forall\, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}' \,.$$

- *Se $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'$ è chiuso, esiste un $\mathbf{y}'_o \in \mathcal{Y}'$ tale che*

$$ii) \quad \| \mathbf{A}'\mathbf{y}'_o \|_{\mathcal{X}'} \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} = |\langle \mathbf{A}'\mathbf{y}'_o \,,\, \mathbf{x} \rangle| \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,.$$

Dim. Dimostriamo la $i)$ in quanto alla $ii)$ si perviene in modo analogo.
Ricordiamo che $\| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} = \| \mathbf{y}' - \mathbf{Q}'\mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'}$ con $\mathbf{y}' - \mathbf{Q}'\mathbf{y}' \in (\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}')^{\oplus}$.
La chiusura di $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ assicura che $(\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}')^{\oplus} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}}^{-1}\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$. Ne segue che esiste $\mathbf{x}_o \in \mathcal{X}$ tale che $\mathbf{y}' - \mathbf{Q}'\mathbf{y}' = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}_o)$. Si ha pertanto

$$\| \mathbf{y}' - \mathbf{Q}'\mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'} = \| \mathbf{A}\mathbf{x}_o \|_{\mathcal{Y}} \,,$$

$$\langle \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x}_o \rangle = (\mathbf{y}' \,,\, \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}}^{-1}\,\mathbf{A}\mathbf{x}_o)_{\mathcal{Y}'} = (\mathbf{y}' - \mathbf{Q}'\mathbf{y}' \,,\, \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{Y}}^{-1}\,\mathbf{A}\mathbf{x}_o)_{\mathcal{Y}'} = \| \mathbf{A}\mathbf{x}_o \|_{\mathcal{Y}}^2 \,,$$

e quindi vale la $i)$. □

9.2. Operatori con immagine chiusa

Una fondamentale proprietà degli operatori lineari consiste nella chiusura della loro immagine. E′ bene fare attenzione a non confondere la proprietà di chiusura dell'immagine con quella della chiusura del grafico. Nessuna delle due implica l'altra.

Una completa caratterizzazione degli operatori lineari chiusi che hanno immagine chiusa sarà fornita nelle proposizioni 11.15 e 11.16.

Diamo qui di seguito una semplice dimostrazione del celebrato teorema della immagine chiusa di BANACH limitandoci a considerare operatori lineari continui tra spazi di HILBERT. Ciò è sufficiente per le più principali applicazioni.

Una trattazione più generale relativa agli operatori lineari chiusi tra spazi di HILBERT sarà svolta nella sezione 11 sulla base di un accurato studio della caratterizzazione della proprietà di chiusura della somma di due sottospazi lineari chiusi.

9.2.1. Una dimostrazione elementare del teorema dell'immagine chiusa

Si dimostra ora un risultato di S.BANACH che è di fondamentale importanza nello stabilire l'esistenza della soluzione di un problema lineare. Una trattazione per operatori chiusi tra spazi di BANACH può trovarsi in [29], [41] (vedi la successiva proposizione 11.17).

Si fornisce qui una trattazione più semplice per operatori lineari e continui tra spazi di HILBERT. Nelle successive proposizioni 11.15 e 11.16 è illustrata la versione più generale valida per operatori chiusi tra spazi di HILBERT.

Si noti che, come sarà messo in luce, quando gli spazi sono di HILBERT è possibile pervenire ad un risultato più preciso che non è conseguibile nel contesto più ampio degli spazi di BANACH.

Proposizione 9.16. Teorema dell'immagine chiusa. *Siano $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'$ coppie di spazi di* HILBERT *duali. Allora per ogni coppia di operatori duali $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$ e $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}';\mathcal{X}'\}$ le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti*

$i)$ $\quad \mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ chiuso in $\mathcal{Y} \iff \mathrm{Im}\,\mathbf{A} = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}')^{\perp}$,

$ii)$ $\quad \mathrm{Im}\,\mathbf{A}'$ chiuso in $\mathcal{X}' \iff \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp}$,

$iii)$ $\quad \|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}} \geq c\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \qquad \forall\,\mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$iv)\quad \| \mathbf{A}'\mathbf{y}' \|_{\mathcal{X}'} \geq c \, \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \qquad \forall \, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}' \,,$

con c *costante positiva.*

Dim. Dimostrazione dell'implicazione $\boxed{\; i) \;\Rightarrow\; iii) \;}$.

Il sottospazio lineare $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ sia chiuso in $\mathcal{Y}$. Consideriamo quindi tra gli spazi di HILBERT $\mathcal{X}/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ e $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ l'operatore lineare $\mathbb{A} \in L\big\{\mathcal{X}/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A};\, \mathrm{Im}\,\mathbf{A}\big\}$ definito da

$$\mathbb{A}(\mathbf{x} + \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}) := \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \forall \, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,.$$

Essendo l'operatore $\mathbb{A}$ biunivoco, il teorema dell'applicazione inversa assicura che anche l'operatore inverso è continuo e la $iii)$ è dimostrata.

Dimostrazione dell'implicazione $\boxed{\; iii) \;\Rightarrow\; i) \;}$.

Consideriamo una successione di CAUCHY $\{\mathbf{A}\mathbf{x}_n\} \subset \mathrm{Im}\,\mathbf{A}$. La $iii)$ fornisce

$$\| \mathbf{A}\mathbf{x}_n - \mathbf{A}\mathbf{x}_k \|_{\mathcal{Y}} \to 0 \;\Rightarrow\; \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \to 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \exists \, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,:\, \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \to 0 \,.$$

Per la continuità di $\mathbf{A}$ si ha $\| \mathbf{A}\mathbf{x}_n - \mathbf{A}\mathbf{x} \|_{\mathcal{Y}} \to 0$ e quindi la chiusura di $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$.

Un analogo ragionamento conduce all'equivalenza tra $ii)$ and $iv)$.

Rimane da mostrare che $i), iii)$ and $ii), iv)$ sono equivalenti e che la costante $c > 0$ in $iii)$ e $iv)$ è la stessa.
Assumendo la $iii)$ segue che $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ è chiuso in $\mathcal{Y}$ e si ha che

$$\| \mathbf{A}\mathbf{x}_o \|_{\mathcal{Y}} \, \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \geq c \, \| \mathbf{x}_o \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \, \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \quad \forall \, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}' \,.$$

Dal lemma 9.15 si trae quindi che

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{A}'\mathbf{y}' \|_{\mathcal{X}'} \, \| \mathbf{x}_o \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \geq | \langle \mathbf{A}'\mathbf{y}' \,,\, \mathbf{x}_o \rangle | = | \langle \mathbf{y}' \,,\, \mathbf{A}\mathbf{x}_o \rangle | = \\ &= \| \mathbf{A}\mathbf{x}_o \|_{\mathcal{Y}} \, \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \geq c \, \| \mathbf{x}_o \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \, \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \quad \forall \, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}' \,, \end{aligned}$$

e pertanto segue la $iv)$. L'implicazione inversa si dimostra in modo analogo. $\square$

9.2.2. Condizione INF-SUP

Si ricordi la definizione di norma in uno spazio duale

$$\| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'} := \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \frac{|\langle \mathbf{y}' , \mathbf{y} \rangle|}{\| \mathbf{y} \|_{\mathcal{Y}}} , \quad \| \mathbf{A}'\mathbf{y}' \|_{\mathcal{X}'} := \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{|\langle \mathbf{A}'\mathbf{y}' , \mathbf{x} \rangle|}{\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}}}$$

dove l'annullarsi del denominatore è escluso.

Le condizioni equivalenti di chiusura $iii)$ e $iv)$ della proposizione 9.16 possono allora riscriversi

$$iii) \quad \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}')}{\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'}} = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sup_{\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}')}{\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'}} \geq c > 0,$$

$$iv) \quad \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}}} = \inf_{\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}')}{\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'}} \geq c > 0.$$

Osservazione 9.2. Ognuna delle diseguaglianze $iii)$ e $iv)$ implica l'altra e pertanto esse equivalgono alla seguente **condizione inf-sup**

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sup_{\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}')}{\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'}} = \inf_{\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}')}{\| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}}} > 0 \,.$$

Infatti, denotando rispettivamente con $\text{inf-sup}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$ e $\text{inf-sup}\,(\mathbf{y}, \mathbf{x}')$ le $iii)$ e $iv)$, la proposizione 9.16 assicura che

$$\text{inf-sup}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \geq \alpha > 0 \iff \text{inf-sup}\,(\mathbf{y}', \mathbf{x}) \geq \alpha > 0 \,.$$

Ne segue che ponendo $\alpha = \text{inf-sup}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}') > 0$ si ha

$$\text{inf-sup}\,(\mathbf{y}', \mathbf{x}) \geq \text{inf-sup}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}') > 0.$$

In modo analogo si evince che $\text{inf-sup}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \geq \text{inf-sup}\,(\mathbf{y}', \mathbf{x}) > 0$ e l'asserto è dimostrato. ■

Essendo la chiusura di $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ equivalente alla chiusura di $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'$ tale proprietà è in effetti da attribuirsi alla forma bilineare $\mathbf{a}$ e diremo in tal caso che la forma $\mathbf{a}$ è **chiusa** in $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}'$.

9.3. Dualità tra spazi quoziente e sottospazi di uno spazio di Hilbert

Mostriamo un'interessante applicazione del teorema della immagine chiusa. Assegnata una coppia $\{\mathcal{H}, \mathcal{H}'\}$ di spazi di HILBERT duali, siano

- $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{H}$,
- $\mathcal{S}'$ lo spazio di HILBERT duale di $\mathcal{S}$.

Sia $\mathbf{P} \in \mathrm{L}\{\mathcal{H};\mathcal{H}\}$ il proiettore ortogonale su $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$. Consideriamo quindi la **restrizione canonica** da $\mathcal{H}$ su $\mathcal{S}$ definita dall'operatore suriettivo $\mathbf{\Pi} \in \mathrm{L}\{\mathcal{H};\mathcal{S}\}$ tale che

$$\mathbf{\Pi}\,\mathbf{v} = \mathbf{P}\,\mathbf{v}\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H}\,.$$

La proprietà di contrazione caratteristica dei proiettori (vedi proposizione 6.3) assicura che $\|\,\mathbf{\Pi v}\,\|_{\mathcal{H}} \le \|\,\mathbf{v}\,\|_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$. Risulta inoltre

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Pi} = \mathcal{S}^{\oplus}\,, \qquad \mathrm{Im}\,\mathbf{\Pi} = \mathcal{S}\,.$$

Definiamo quindi **estensione canonica** da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{H}'$ l'operatore lineare continuo $\mathbf{\Pi}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{S}';\mathcal{H}'\}$ duale di $\mathbf{\Pi} \in \mathrm{L}\{\mathcal{H};\mathcal{S}\}$

$$\langle\, \mathbf{\Pi}'\,\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{v}\,\rangle = \langle\, \mathbf{p}'\,,\,\mathbf{\Pi}\,\mathbf{v}\,\rangle\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H} \quad \forall\, \mathbf{p}' \in \mathcal{S}'\,.$$

L'estensione $\mathbf{\Pi}'$ è detta anche **estensione per azzeramento** su $\mathcal{S}^{\oplus}$ in quanto

$$\langle\, \mathbf{\Pi}'\,\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{v}\,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{S}^{\oplus} \quad \forall\, \mathbf{p}' \in \mathcal{S}'\,.$$

Poichè $\mathrm{Im}\,\mathbf{\Pi} = \mathcal{S}$ il teorema dell'immagine chiusa assicura che anche $\mathrm{Im}\,\mathbf{\Pi}'$ è chiusa in $\mathcal{H}'$ e che risulta

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Pi}' = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{\Pi})^{\perp} = \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{S}'}\,, \qquad \mathrm{Im}\,\mathbf{\Pi}' = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Pi})^{\perp} = \mathcal{S}^{\oplus\perp}\,.$$

Dalla proposizione 6.6 si deduce che $\mathrm{Im}\,\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi}'\,\mathcal{S}' = \mathcal{S}^{\oplus\perp} = \mathcal{S}^{\perp\oplus} = \boldsymbol{\mu}^{-1}\mathcal{S}$.

Si ha inoltre

Lemma 9.17. Isometria canonica. *L'estensione canonica* $\mathbf{\Pi}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{S}';\mathcal{H}'\}$ *instaura un isomorfismo isometrico tra gli spazi di* HILBERT $\mathcal{S}'$ *e* $\mathrm{Im}\,\mathbf{\Pi}'$.

Dim. Dobbiamo solo dimostrare che $\mathbf{\Pi}'$ è una isometria. Osserviamo che

$$\|\,\mathbf{\Pi}'\mathbf{p}'\,\|_{\mathcal{H}'} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{H}} \frac{\langle\, \mathbf{\Pi}'\,\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{v}\,\rangle}{\|\,\mathbf{v}\,\|_{\mathcal{H}}} \ge \sup_{\mathbf{v_P}\in\mathcal{S}} \frac{\langle\, \mathbf{\Pi}'\,\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{v_P}\,\rangle}{\|\,\mathbf{v_P}\,\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{\mathbf{v_P}\in\mathcal{S}} \frac{\langle\, \mathbf{p}'\,,\,\mathbf{v_P}\,\rangle}{\|\,\mathbf{v_P}\,\|_{\mathcal{H}}} = \|\,\mathbf{p}'\,\|_{\mathcal{S}'}\,,$$

$$\|\,\mathbf{\Pi}'\mathbf{p}'\,\|_{\mathcal{H}'} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{H}} \frac{\langle\, \mathbf{\Pi}'\,\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{v}\,\rangle}{\|\,\mathbf{v}\,\|_{\mathcal{H}}} \le \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{H}} \frac{\langle\, \mathbf{\Pi}'\,\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{v}\,\rangle}{\|\,\mathbf{\Pi v}\,\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{\mathbf{v_P}\in\mathcal{S}} \frac{\langle\, \mathbf{p}'\,,\,\mathbf{\Pi}\,\mathbf{v}\,\rangle}{\|\,\mathbf{\Pi}\,\mathbf{v}\,\|_{\mathcal{H}}} = \|\,\mathbf{p}'\,\|_{\mathcal{S}'}\,,$$

e dunque $\|\,\mathbf{\Pi}'\mathbf{p}'\,\|_{\mathcal{H}'} = \|\,\mathbf{p}'\,\|_{\mathcal{S}'} \quad \forall\, \mathbf{p}' \in \mathcal{S}'$. $\square$

Possiamo adesso dimostrare un importante risultato.

Lemma 9.18. Isomorfismi isometrici. *Saino* $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ *spazi di* HILBERT *duali,* $\mathcal{S}$ *un sottospazio lineare chiuso di* $\mathcal{H}$ *e* $\mathcal{S}'$ *lo spazio di* HILBERT *duale di* $\mathcal{S}$. *Allora*

$$\begin{cases} i) & \dfrac{\mathcal{H}'}{\mathcal{S}^{\perp}} \equiv \mathcal{S}' \,, \\ ii) & \left(\dfrac{\mathcal{H}}{\mathcal{S}}\right)' \equiv \mathcal{S}^{\perp} \,, \end{cases}$$

dove il simbolo $\equiv$ *indica che esiste un isomorfismo isometrico tra i due spazi.*

Dim. Dimostriamo la $i)$. In forza della proposizione 6.11 esiste un isomorfismo isometrico $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}'/\mathcal{S}^{\perp}; \mathcal{S}^{\perp\oplus}\right\}$. In virtù del lemma 9.17 risulta $\mathbf{\Pi}'\,\mathcal{S}' = \mathcal{S}^{\perp\oplus}$ e quindi possiamo scrivere

$$i) \quad \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{S}^{\perp}} = (\boldsymbol{\theta}^{-1}\,\mathbf{\Pi}')\,\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}' \,.$$

Per dimostrare la $ii)$ sostituiamo $\mathcal{H}$ ad $\mathcal{H}'$ e $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\perp\perp}$ a $\mathcal{S}^{\perp}$ così che $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}^{\perp\perp})'$ diventa $(\mathcal{S}^{\perp})'$. Si perviene in tal modo alla relazione

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{S}} \equiv (\mathcal{S}^{\perp})' \,,$$

e considerando i duali si ottiene $ii)$. □

Osservazione 9.3. La trattazione originale presentata in questa sezione è una variante di quella svolta in [28] alla sezione 2.1.7.

Quest'ultima è basata su una procedura che può riassumersi come segue. Si considera l'iniezione canonica $\boldsymbol{\pi} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{S}; \mathcal{H}\right\}$ e l'operatore duale di restrizione $\boldsymbol{\pi}' \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}'; \mathcal{S}'\right\}$ legati dalla relazione

$$\langle\, \mathbf{v}' \,,\, \boldsymbol{\pi}\mathbf{p} \,\rangle = \langle\, \boldsymbol{\pi}'\mathbf{v}' \,,\, \mathbf{p} \,\rangle \,, \quad \forall\, \mathbf{p} \in \mathcal{S} \,.$$

Risultando $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\pi} = \{\mathbf{o}\} \subset \mathcal{S}$, $\operatorname{Im}\boldsymbol{\pi} = \mathcal{S}$, il teorema dell'immagine chiusa assicura che $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\pi}' = (\operatorname{Im}\boldsymbol{\pi})^{\perp} = \mathcal{S}^{\perp}$, $\operatorname{Im}\boldsymbol{\pi}' = (\operatorname{Ker}\boldsymbol{\pi})^{\perp} = \mathcal{S}'$. Pertanto $\boldsymbol{\pi}' \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}'/\mathcal{S}^{\perp}; \mathcal{S}'\right\}$ è biunivoca e si dimostra che è una isometria. ■

L'isomorfismo isometrico $i)$ della proposizione 9.18 consente in particolare di pervenire ad un importante criterio di chiusura (vedi proposizione 11.10).

10. SUPPLEMENTARI TOPOLOGICI

Come applicazione dei risultati della sezione precedente mostriamo alcune importanti proprietà della decomposizione di uno spazio lineare come somma di sottospazi lineari. Premettiamo le seguenti definizioni.

- Diremo che due sottospazi lineari $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di uno spazio lineare $\mathcal{X}$ sono **supplementari algebrici** se lo spazio $\mathcal{X}$ è la loro somma diretta e scriveremo
$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \dotplus \mathcal{B} \iff \begin{cases} \mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathcal{B}\,, \\ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\mathbf{o}\}\,. \end{cases}$$

- Diremo che due sottospazi lineari **chiusi** $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di uno spazio di BANACH $\mathcal{X}$ sono **supplementari topologici** se lo spazio $\mathcal{X}$ è la loro somma diretta e scriveremo
$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \dotplus \mathcal{B} \iff \begin{cases} \mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathcal{B}\,, \\ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\mathbf{o}\}\,. \end{cases}$$

- Diremo che un sottospazio lineare ha **codimensione** n se ammette un supplementare algebrico di dimensione finita n.

Un operatore lineare $\mathbf{P} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X};\mathcal{X}\right\}$ è un **proiettore continuo** se è idempotente e cioè se $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Allora è evidente che due sottospazi lineari chiusi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di uno spazio di BANACH $\mathcal{X}$ sono supplementari topologici se e solo se esistono due **proiettori** $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}$ e $\mathbf{P}_{\mathcal{B}}$ lineari e continui tali che
$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_{\mathcal{A}}\mathbf{x} + \mathbf{P}_{\mathcal{B}}\mathbf{x} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,.$$

Infatti la proprietà $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\mathbf{o}\}$ assicura che ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ si può scrivere in modo unico come $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ con $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$. Inoltre, in forza del lemma 11.1, la chiusura di $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{X}$ assicura che esiste una costante c tale che
$$c\,\|\,\mathbf{P}_{\mathcal{A}}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} \le \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}\,, \quad c\,\|\,\mathbf{P}_{\mathcal{B}}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} \le \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}\,,$$
e pertanto i proiettori lineari $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}$ e $\mathbf{P}_{\mathcal{B}}$ sono limitati.

In uno spazio di HILBERT ogni sottospazio lineare chiuso ammette un supplementare topologico (basta prendere il complemento ortogonale). Ciò non accade in uno spazio di BANACH anche se riflessivo ([41] cap. 2, oss.

8). Sussiste infatti il seguente risultato di LINDENSTRAUSS-TZAFRIRI ([41] teor. V.14).

Proposizione 10.1. Suppplementari topologici. *Uno spazio di* BANACH *in cui ogni sottospazio chiuso ammette un supplementare topologico è di* HILBERT, *esiste cioè uno norma hilbertiana equivalente alla norma iniziale.* □

In uno spazio normato $\mathcal{X}$ i sottospazi di dimensione finita ammettono invece sempre un supplementare topologico. Lo strumento dimostrativo è basato sulla nozione di **base duale**.

- Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ un sottospazio lineare di dimensione finita n e $\{\mathbf{e}_i\,, i = 1, \ldots, n\}$ una base di $\mathcal{A}$.

- Diremo **base duale** della base $\{\mathbf{e}_i\,, i = 1, \ldots, n\}$ la base $\{\mathbf{e}^i\,, i = 1, \ldots, n\}$ costituita dai funzionali lineari $\mathbf{e}^i \in \mathcal{A}'$ definiti dalla proprietà caratteristica

$$\langle\, \mathbf{e}^i\,,\, \mathbf{e}_k \,\rangle = \delta^i{}_k\,,$$

che equivale alla proprietà

$$\langle\, \mathbf{e}^i\,,\, \mathbf{x} \,\rangle := x^i\,, \quad \forall\, \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i\, \mathbf{e}_i \in \mathcal{A}\,.$$

In virtù del teorema di HAHN proposizione 5.4 è possibile estendere (in modo non univoco) i funzionali lineari $\{\mathbf{e}^i \in \mathcal{A}'\,, i = 1, \ldots, n\}$ a funzionali lineari continui $\{f^i \in \mathcal{X}'\,, i = 1, \ldots, n\}$ tali che

$$\langle\, f^i\,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{e}^i\,,\, \mathbf{x} \,\rangle \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{A}\,, \quad \|\, f^i \,\|_{\mathcal{X}'} = \|\, \mathbf{e}^i \,\|_{\mathcal{A}'}\,.$$

I funzionali $\{f^i \in \mathcal{X}'\,, i = 1, \ldots, n\}$ godono quindi anch'essi della proprietà caratteristica

$$\langle\, f^i\,,\, \mathbf{e}_k \,\rangle = \delta^i{}_k\,,$$

e costituiscono una **base duale** di $\{\mathbf{e}_i\,, i = 1, \ldots, n\}$ in $\mathcal{X}'$.

- Viceversa, sia $\mathcal{N} \subset \mathcal{X}'$ un sottospazio lineare di dimensione finita n e $\{f^i \in \mathcal{X}'\,, i = 1, \ldots, n\}$ una base di $\mathcal{N}$.

  Allora esiste una base duale $\{\mathbf{e}_i\,, i = 1, \ldots, n\}$ in $\mathcal{X}$. Per mostrarlo si osservi che è suriettiva l'applicazione lineare $\mathbf{F} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X}; \Re^n\right\}$ definita da

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \left\{\langle\, f^1\,,\, \mathbf{x} \,\rangle, \ldots, \langle\, f^n\,,\, \mathbf{x} \,\rangle\right\}.$$

Infatti se $\boldsymbol{\alpha}_o \in \Re^n \setminus \mathrm{Im}\,\mathbf{F}$ poniamo $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_o - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha}_o$ con $\boldsymbol{\Pi}$ proiettore ortogonale su $\mathrm{Im}\,\mathbf{F}$ in $\Re^n$. Allora il vettore non nullo $\boldsymbol{\alpha} = \{\, \alpha^i \in \Re^n \,,\ i = 1, \dots, n\}$ è tale che

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \,\langle\, f^i \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = 0 \,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,,$$

contro l'ipotesi di indipendenza lineare dei funzionali $\{\, f^i \in \mathcal{X}' \,,\ i = 1, \dots, n\}$.

La suriettività di $\mathbf{F}$ assicura che esiste un insieme $\{\, \mathbf{e}_k \in \mathcal{X} \,,\ k = 1, \dots, n\}$ di vettori tali che

$$\langle\, f^i \,,\, \mathbf{e}_k \,\rangle = \delta^i{}_k \,,$$

e tale insieme è linearmente indipendente in quanto

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \,\mathbf{e}_k = 0 \ \Rightarrow\ \langle\, f^i \,,\, \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \,\mathbf{e}_k \,\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \,\langle\, f^i \,,\, \mathbf{e}_k \,\rangle = \alpha^i = 0 \quad \forall\ i = 1, \dots, n \,.$$

Possiamo ora dimostrare un primo risultato.

Proposizione 10.2. Dimensione finita. *In uno spazio normato $\mathcal{X}$ ogni sottospazio lineare $\mathcal{A}$ di dimensione finita n ammette un supplementare topologico.*

Dim. Sia $\{\mathbf{e}_i \,, i = 1, \dots, n\}$ una base di $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{N} \subset \mathcal{X}'$ il sottospazio lineare generato da una **base duale** $\{f^i \in \mathcal{X}' \,, i = 1, \dots, n\}$ in $\mathcal{X}'$.

Il sottospazio lineare chiuso

$$\mathcal{N}^{\perp} \,:=\, \bigcap_{i=1}^{n} \,\mathrm{Ker}\, f^i \subset \mathcal{X} \,,$$

è allora un supplementare topologico di $\mathcal{A}$. Risulta infatti

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{N}^{\perp} = \big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{A} \,:\, \langle\, f^i \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n \big\} = \{\mathbf{o}\} \,.$$

Definendo quindi il proiettore

$$\mathbf{P}_{\mathcal{A}}\mathbf{x} \,:=\, \sum_{k=1}^{n} \langle\, f^k \,,\, \mathbf{x} \,\rangle\, \mathbf{e}_k \in \mathcal{A} \,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,,$$

si ha che

$$\langle\, f^i \,,\, \mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{A}}\mathbf{x} \,\rangle = \langle\, f^i \,,\, \mathbf{x} \,\rangle - \langle\, f^i \,,\, \mathbf{e}_k \,\rangle \langle\, f^k \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = 0 \,.$$

Pertanto $\mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{A}}\mathbf{x} \in \mathcal{N}^{\perp}$ e dunque $\mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathcal{N}^{\perp}$ con somma diretta. □

Vale anche il risultato simmetrico.

Proposizione 10.3. Codimensione finita. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio normato ed* $\mathcal{X}'$ *lo spazio duale. Se* $\mathcal{N} \subset \mathcal{X}'$ *è un sottospazio lineare generato da un insieme finito* $\{ f^i \in \mathcal{X}' , i = 1, \ldots, n\}$ *di funzionali lineari continui linearmente indipendenti, allora il sottospazio lineare chiuso*

$$\mathcal{N}^{\perp} := \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f^i \subset \mathcal{X} ,$$

ammette un supplementare topologico $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ *di dimensione* n.

Dim. Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ il sottospazio generato da una base $\{ \mathbf{e}_k \in \mathcal{X} , k = 1, \ldots, n\}$ duale della base $\{ f^i \in \mathcal{X}' , i = 1, \ldots, n\}$ di $\mathcal{N}$. Procedendo allora come nella proposizione 10.2 si deduce che

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{N}^{\perp} = \{\mathbf{o}\} , \quad \mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathcal{N}^{\perp} ,$$

e pertanto che $\mathcal{X} = \mathcal{A} \dot{+} \mathcal{N}^{\perp}$. □

Si noti anche il seguente risultato.

Proposizione 10.4. Chiusura dei sottospazi di codimensione finita. *In uno spazio normato* $\mathcal{X}$ *ogni sottospazio lineare* $\mathcal{B}$ *di codimensione finita* n *è il complemento ortogonale di un sottospazio lineare* $\mathcal{N} \in \mathcal{X}'$ *di dimensione finita* n *e quindi è chiuso. Si ha cioè che*

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B} , \quad \dim \mathcal{A} = n \;\Rightarrow\; \exists\, \mathcal{N} \subset \mathcal{X}' , \quad \dim \mathcal{N} = n , \quad \mathcal{B} = \mathcal{N}^{\perp} .$$

Dim. Sia $\mathcal{X} = \mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B}$ con $\{\mathbf{e}_i , i = 1, \ldots, n\}$ base di $\mathcal{A}$ che definisce le componenti

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \, \mathbf{e}_i , \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{A} ,$$

ed $\{f^i \in \mathcal{X}' , i = 1, \ldots, n\}$ la base duale in $\mathcal{X}'$ ottenuta mediante l'estensione per azzeramento su $\mathcal{B}$ dei funzionali della base duale $\{\mathbf{e}^i , i = 1, \ldots, n\}$ in $\mathcal{A}'$. Essendo $x^i = \langle\, \mathbf{e}^i , \mathbf{x} \,\rangle$ possiamo dare la definizione

$$\langle\, f^i , \mathbf{x} \,\rangle := \begin{cases} x^i & \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{A} , \\ 0 & \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{B} . \end{cases}$$

L'estensione non altera la norma dei funzionali in quanto

$$\| f^i \|_{\mathcal{X}'} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{|\langle f^i , \mathbf{x} \rangle|}{\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}}} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \frac{|\langle \mathbf{e}^i , \mathbf{x} \rangle|}{\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}}} = \| \mathbf{e}^i \|_{\mathcal{A}'} .$$

Al risultato si perviene infine osservando che $\mathcal{B} = \mathcal{N}^{\perp}$. Infatti è palese che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}^{\perp}$. Viceversa $\mathbf{x} \in \mathcal{N}^{\perp} \ \Rightarrow \ x^i = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \ \Rightarrow \ \mathbf{x} \in \mathcal{B}$ per cui $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{N}^{\perp}$. □

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ spazi normati in dualità.

- Diremo che due sottospazi lineari **chiusi** $\mathcal{A} \in \mathcal{X}$ e $\mathcal{N} \in \mathcal{X}'$ sono **sottospazi duali** se valgono le relazioni

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{A} \cap \mathcal{N}^{\perp} = \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{X}} , \\ \mathcal{N} \cap \mathcal{A}^{\perp} = \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{X}'} . \end{cases}}$$

Ne segue che

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{X} = \mathcal{A} \dotplus \mathcal{N}^{\perp} , \\ \mathcal{X}' = \mathcal{N} \dotplus \mathcal{A}^{\perp} . \end{cases}}$$

Definiamo i proiettori lineari associati a tali decomposizioni

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathcal{A}} , \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P}_{\mathcal{N}^{\perp}} \quad \text{in} \quad \mathcal{X} , \\ \mathbf{P}' = \mathbf{P}_{\mathcal{N}} , \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{P}_{\mathcal{A}^{\perp}} \quad \text{in} \quad \mathcal{X}' . \end{cases}$$

Si ha che

Proposizione 10.5. Sottospazi duali. *In uno spazio normato $\mathcal{X}$ se un sottospazio lineare $\mathcal{A} \in \mathcal{X}$ ha dimensione finita n anche ogni sottospazio duale $\mathcal{N} \in \mathcal{X}'$ ha dimensione finita n.*

Dim. Sia $\{\mathbf{e}_i , i = 1, \ldots, n\}$ una base di $\mathcal{A}$ che definisce le componenti

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \, \mathbf{e}_i \quad \forall \, \mathbf{x} \in \mathcal{A} ,$$

ed $\{f^i \in \mathcal{X}' , i = 1, \ldots, n\}$ la famiglia linearmente indipendente di funzionali di $\mathcal{X}'$ definiti da

$$\langle f^i , \mathbf{x} \rangle := \begin{cases} x^i & \forall \, \mathbf{x} \in \mathcal{A} , \\ 0 & \forall \, \mathbf{x} \in \mathcal{N}^{\perp} . \end{cases}$$

Allora per ogni $\mathbf{x}' \in \mathcal{N}$ e per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ risulta

$$\langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{P}\mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \sum_{i=1}^{n} x^i \,\mathbf{e}_i \,\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{e}_i \,\rangle \langle\, f^i \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = x'_i \langle\, f^i \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \,,$$

dove $x'_i := \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{e}_i \,\rangle$ e quindi

$$\mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{n} x'_i \, f^i \,.$$

La famiglia $\{f^i \in \mathcal{X}' \,, i = 1, \dots, n\}$ è dunque una base di $\mathcal{N}$. □

Se $\mathcal{X}$ è uno spazio di HILBERT, è possibile scambiare il ruolo giocato dai sottospazi lineari chiusi $\mathcal{A} \in \mathcal{X}$ e $\mathcal{N} \in \mathcal{X}'$ nella proposizione 10.5.

Valgono poi le relazioni di dualità

$$\boxed{\begin{aligned} &\langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{P}\mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{P}'\mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \quad \forall\, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}' \,, \\ &\langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{Q}\mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{Q}'\mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \quad \forall\, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}' \,. \end{aligned}}$$

Infatti, posto

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{P}\mathbf{x})^i \, \mathbf{e}_i \,, \quad \mathbf{P}'\mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{P}'\mathbf{x}')_i \, f^i \,,$$

risulta

$$(\mathbf{P}\mathbf{x})^i = \langle\, f^i \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \,, \quad (\mathbf{P}'\mathbf{x}')_i = \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{e}_i \,\rangle \,,$$

e quindi

$$\langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{P}\mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{P}\mathbf{x})^i \, \mathbf{e}_i \,\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{e}_i \,\rangle \langle\, f^i \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \,,$$

$$\langle\, \mathbf{P}'\mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{P}'\mathbf{x}')_i \, f^i \,,\, \mathbf{x} \,\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{e}_i \,\rangle \langle\, f^i \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \,,$$

Analogamente si dimostra che

$$\langle\, \mathbf{x}' \,,\, \mathbf{Q}\mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{Q}'\mathbf{x}' \,,\, \mathbf{x} \,\rangle \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \quad \forall\, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}' \,.$$

11. PROPRIETA' DI CHIUSURA

Dal teorema dell'applicazione aperta, proposizione 9.4, si deduce il seguente fondamentale risultato (vedi [41] teorema II.8).

Lemma 11.1. Limitazione delle componenti. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio di* BANACH *e* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ *e* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ *sottospazi lineari chiusi tali che la loro somma* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *è chiusa. Esiste allora una costante* $c > 0$ *tale che ogni* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}+\mathcal{B}$ *ammette una decomposizione del tipo*

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \text{con } \mathbf{a} \in \mathcal{A}\,,\ \mathbf{b} \in \mathcal{B}\,, \quad c\,\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}} \leq \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}\,, \quad c\,\|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} \leq \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}\,.$$

Dim. Dotiamo lo spazio prodotto $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ della norma

$$\|\,\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\,\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} := \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} + \|\,\mathbf{y}\,\|_{\mathcal{X}}\,.$$

L'operatore lineare $\mathbf{A} \in L\big\{\mathcal{X} \times \mathcal{X}; \mathcal{X}\big\}$ definito da

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} := \mathbf{x} + \mathbf{y}\,,$$

è allora continuo e suriettivo.

La proposizione 9.4 assicura allora che esiste una costante $c > 0$ tale che ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{A}+\mathcal{B}$ con $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} < c$ può essere scritto $\mathbf{x} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$ con $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ e $\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}} + \|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} < 1$. Per omogeneità si ha quindi che $\mathbf{x} \in \mathcal{A}+\mathcal{B}$ ammette la decomposizione $\mathbf{x} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$ con $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ e $\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}} + \|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} \leq c^{-1}\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}}$. □

La proprietà di decomposizione dimostrata nel lemma 11.1 può essere equivalentemente formulata come segue.

Lemma 11.2. Formulazione alternativa. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio di* BANACH *e* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ *e* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ *sottospazi lineari chiusi tali che la loro somma* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *è chiusa. Esiste allora una costante* $c > 0$ *tale che*

$$i_1) \qquad \forall\,\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} \in \mathcal{A}\times\mathcal{B} \quad \exists\,\boldsymbol{\rho}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathcal{A}\cap\mathcal{B} \;:\; \begin{cases} \|\,\mathbf{a}+\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} \geq c\,\|\,\mathbf{a}+\boldsymbol{\rho}\,\|_{\mathcal{X}}\,, \\ \|\,\mathbf{a}+\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} \geq c\,\|\,\mathbf{b}-\boldsymbol{\rho}\,\|_{\mathcal{X}}\,. \end{cases}$$

Se la somma $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *è diretta, e cioè se* $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \{\mathbf{o}\}$, *allora* $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{o}$ *e quindi si ha che*

$$i_2) \qquad \begin{cases} \|\,\mathbf{a}+\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} \geq c\,\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}}\,, \\ \|\,\mathbf{a}+\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} \geq c\,\|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}}\,, \end{cases}$$

per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ *e* $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$. □

Un'ulteriore formulazione equivalente ai lemmi 11.1 e 11.2 può essere fornita se lo spazio $\mathcal{X}$ è uno spazio di HILBERT.

Lemma 11.3. La proprietà di angolo finito. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio di* HILBERT *e* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ *e* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ *sottospazi lineari chiusi tali che la loro somma* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *è chiusa. Esiste allora una costante* $0 < \theta < 1$ *tale che*

$$ii_1) \quad \sup_{\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} \; \inf_{\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \frac{(\mathbf{a}+\boldsymbol{\rho}\,,\,\mathbf{b}-\boldsymbol{\rho})_{\mathcal{X}}}{\|\,\mathbf{a}+\boldsymbol{\rho}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{b}+\boldsymbol{\rho}\,\|_{\mathcal{X}}} \le \theta < 1\,.$$

Se la somma $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *è diretta, e cioè se* $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \{\mathbf{o}\}$*, allora* $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{o}$ *e quindi la formula si semplifica in*

$$ii_2) \quad \sup_{\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} \frac{(\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b})_{\mathcal{X}}}{\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}}} \le \theta < 1\,,$$

che equivale a ciascuna delle diseguaglianze

$$ii_3) \quad \begin{cases} \|\,\boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{A}}\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} \le \theta\,\|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} & \forall\,\mathbf{b}\in\mathcal{B}\,, \\ \|\,\boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{B}}\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}} \le \theta\,\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}} & \forall\,\mathbf{a}\in\mathcal{A}\,, \end{cases} \qquad 0 < \theta < 1\,,$$

dove $\boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{B}}$ *sono i proiettori ortogonali su* $\mathcal{A}$ *and* $\mathcal{B}$*. La chiusura di* $\mathcal{A}\dotplus\mathcal{B}$ *esprime quindi la richiesta che l'angolo tra i sottospazi lineari* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *sia inferiormente limitato da una quantità positiva.*

Dim. Basta dimostrare che le $ii)$ equivalgono alle $i)$ della proposizione 11.2. Per semplificare l'esposizione assumeremo che $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \{\mathbf{o}\}$.

$\boxed{i) \;\Rightarrow\; ii)}$ Posto $\alpha^2 = c^2/2$ si ha

$$\|\,\lambda\,\mathbf{a}+\mathbf{b}\,\|^2_{\mathcal{X}} \ge \alpha^2\left(\|\,\lambda\,\mathbf{a}\,\|^2_{\mathcal{X}} + \|\,\mathbf{b}\,\|^2_{\mathcal{X}}\right) \quad \forall\,\lambda\in\Re\,,$$

e dunque

$$\lambda^2\,(1-\alpha^2)\,\|\,\mathbf{a}\,\|^2_{\mathcal{X}} + (1-\alpha^2)\,\|\,\mathbf{b}\,\|^2_{\mathcal{X}} + 2\,\lambda\,(\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b})_{\mathcal{X}} \ge 0 \quad \forall\,\lambda\in\Re\,.$$

Imponendo che il discriminante sia non positivo si ottiene la diseguaglianza

$$|\,(\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b})_{\mathcal{X}}\,| \le (1-\alpha^2)\,\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}}\,,$$

che equivale alla $ii)$ con $\theta = 1-\alpha^2 = 1-c^2/2$.

$\boxed{ii) \Rightarrow i)}$ Se vale la $ii)$ e cioè $|\,(\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b})_{\mathcal{X}}\,| \le \theta\,\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}}$, si ha

$$
\begin{aligned}
\|\,\mathbf{a}+\mathbf{b}\,\|^2_{\mathcal{X}} &= \|\,\mathbf{a}\,\|^2_{\mathcal{X}} + \|\,\mathbf{b}\,\|^2_{\mathcal{X}} + 2\,(\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b})_{\mathcal{X}} \ge \\
&\ge \|\,\mathbf{a}\,\|^2_{\mathcal{X}} + \|\,\mathbf{b}\,\|^2_{\mathcal{X}} - 2\,\theta\,\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} \ge \\
&\ge \begin{cases} (1-\theta^2)\,\|\,\mathbf{a}\,\|^2_{\mathcal{X}}\,, \\ (1-\theta^2)\,\|\,\mathbf{b}\,\|^2_{\mathcal{X}}\,, \end{cases}
\end{aligned}
$$

in quanto $\big(\,\|\,\theta\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}} - \|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}}\,\big)^2 = \theta^2\,\|\,\mathbf{a}\,\|^2_{\mathcal{X}} + \|\,\mathbf{b}\,\|^2_{\mathcal{X}} - 2\,\theta\,\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} \ge 0$.

La diseguaglianza

$$
(\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b})_{\mathcal{X}} = (\mathbf{a}\,,\,\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}}\mathbf{b})_{\mathcal{X}} \le \|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}}\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} \le \theta\,\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}}\,\|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}}\,,
$$

mostra che ciascuna delle $ii_3)$ implica la $ii_2)$. Viceversa la diseguaglianza

$$
\|\,\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}}\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}} = \sup_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}} \frac{(\mathbf{a}\,,\,\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}}\mathbf{b})_{\mathcal{X}}}{\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}}} = \sup_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}} \frac{(\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b})_{\mathcal{X}}}{\|\,\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}}} \le \theta\,\|\,\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}}\,,
$$

mostra che la $ii_2)$, implica ciascuna delle $ii_3)$. □

La dimostrazione dell'implicazione $ii) \Rightarrow i)$ è dedotta da [49], quella dell'implicazione $i) \Rightarrow ii)$ è originale.

Dal lemma 11.1 si deduce la seguente proprietà concernente le distanze dai sottospazi lineari $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e dalla loro intersezione.

Lemma 11.4. Diseguaglianze tra le distanze. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio di* HILBERT *e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ sottospazi lineari chiusi tali che la loro somma $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ è chiusa. Esiste allora una costante $k > 0$ tale che*

$$
\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \le \|\,\mathbf{x}-\mathbf{a}\,\|_{\mathcal{X}} + k\,\|\,\mathbf{a}+\mathbf{b}\,\|_{\mathcal{X}}\,, \quad \forall\,\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}\,,
$$

dove $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ giocano un ruolo simmetrico. Si ha quindi che

$$
\begin{cases}
i) & \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \le \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} + k\,\|\,\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} & \forall\,\mathbf{x}\in\mathcal{X}\,, \\
ii) & \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \le \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} + k\,\|\,\mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} & \forall\,\mathbf{x}\in\mathcal{X}\,, \\
iii) & \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \le (1+k)\,\big(\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} + \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}\big) & \forall\,\mathbf{x}\in\mathcal{X}\,,
\end{cases}
$$

dove $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}}$ e $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}}$ sono i proiettori ortogonali su $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ in $\mathcal{X}$.

Dim. La proposizione 11.2, posto $k = c^{-1}$, assicura che per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ esiste $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ tale che $\| \mathbf{a} + \boldsymbol{\rho} \|_{\mathcal{X}} \le k \| \mathbf{a} + \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}}$ e quindi

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \le \| \mathbf{x} + \boldsymbol{\rho} \|_{\mathcal{X}} \le \| \mathbf{x} - \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} + \| \mathbf{a} + \boldsymbol{\rho} \|_{\mathcal{X}} \le \| \mathbf{x} - \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} + k \| \mathbf{a} + \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \,.$$

Posto $\mathbf{a} = \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x}$ e prendendo l'estremo inferiore rispetto a $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ si ottiene la diseguaglianza $i)$. Analogamente per la $ii)$.

La $iii)$ si ottiene dalla $i)$ mediante la diseguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} &\le \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} + k \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} \le \| \mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} + k \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} + \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \le \\
&\le \| \mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} + k \| \mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} + k \| \mathbf{x} - \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \le \\
&\le (1 + k) \| \mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} + k \| \mathbf{x} - \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \,,
\end{aligned}$$

e prendendo l'estremo inferiore rispetto a $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$. □

Le $i)$ e $ii)$ della proposizione 11.4 sono dovute all'autore [52].
La $iii)$ è dimostrata in [41] corollario II.9 con riferimento a spazi di BANACH.

Le figg 11.1 e 11.2 forniscono una illustrazione grafica della proposizione 11.4.

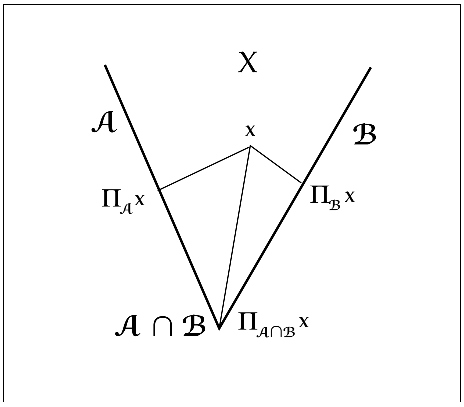
Osservazione 11.1. Per ogni coppia $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ si ha

$$(\| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2)^{1/2} \le \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \| \le \sqrt{2} \, (\| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2)^{1/2}$$

e pertanto le diseguaglianze nella proposizione 11.4 possono scriversi anche

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} &\le \bar{c} \left(\| \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} + \| \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} \right) & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \\
\| \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} &\le \bar{k} \left(\| \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} + \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} \right) & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \\
\| \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} &\le \bar{k} \left(\| \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} + \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \|^2_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} \right) & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X},
\end{aligned}$$

con ovvia definizione delle costanti. ■



$$\| \mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} + \| \mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \geq$$

$$\geq \; c^{-1} \, \| \mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

Fig. 11.1

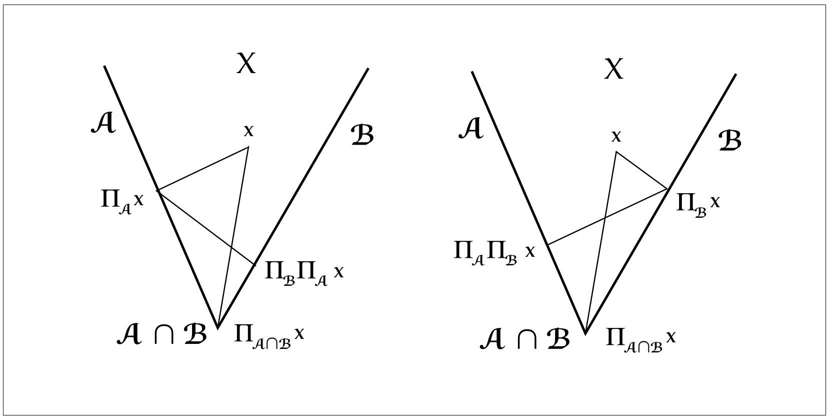


Fig. 11.2

Lemma 11.5. Chiusura delle proiezioni. *Siano* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *sottospazi lineari chiusi di uno spazio di* HILBERT $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{A}^{\oplus}, \mathcal{B}^{\oplus}$ *i complementi ortogonali in* $\mathcal{X}$ *. Denotiamo con* $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}}, \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}}$ *i proiettori ortogonali su* $\mathcal{A}$ *and* $\mathcal{B}$ *e con* $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^{\oplus}} = \mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}}$, $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}^{\oplus}} = \mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}}$ *i proiettori complementari su* $\mathcal{A}^{\oplus}$ *and* $\mathcal{B}^{\oplus}$ *. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

$$\begin{cases} i) \quad \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \text{chiuso in } \mathcal{X} \,, \\[2ex] ii) \quad \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \leq \; c^{-1} \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} + (1 + c^{-1}) \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \\[2ex] iii) \begin{cases} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^{\oplus}} \mathcal{B} \quad \text{chiuso in } \mathcal{X} \iff \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^{\oplus}} \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \geq \; c \, \| \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \quad \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B} \,, \\ \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}^{\oplus}} \mathcal{A} \quad \text{chiuso in } \mathcal{X} \iff \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}^{\oplus}} \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} \geq \; c \, \| \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} \,, \end{cases} \end{cases}$$

Dim. L'implicazione $i) \Rightarrow ii)$ è stata dimostrata nella proposizione 11.4. Dimostriamo che $ii) \Rightarrow iii)$. Poichè i sottospazi lineari $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ giocano un ruolo simmetrico è sufficiente provare che $ii) \iff iii_1)$.

Ponendo $\mathbf{x} = \mathbf{b} \in \mathcal{B}$ nella $ii)$ si ha

$$\| \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \leq c^{-1} \| \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} \quad \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B},$$

che, essendo $\mathcal{A} = \operatorname{Ker} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus}$, è equivalente a

$$\| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \geq c \| \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}/(\operatorname{Ker} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \cap \mathcal{B})} \quad \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B},$$

che per la proposizione 9.16 è equivalente alla chiusura di $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \mathcal{B}$.
Dimostriamo ora che $iii) \Rightarrow i)$. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{A} + \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ si ha

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}, \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$$

e quindi $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \boldsymbol{\beta}$.

Se $\{\mathbf{x}_n\}$ è una successione di CAUCHY in $\mathcal{X}$ si ha

$$| \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k |^2 = | \boldsymbol{\alpha}_n + \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\beta}_n - (\boldsymbol{\alpha}_k + \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\beta}_k) |^2 + | \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \boldsymbol{\beta}_n - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \boldsymbol{\beta}_k |^2 \to 0.$$

La successione $\{\mathbf{x}_n\}$ converge ad un $\mathbf{x}_\infty \in \mathcal{X}$ ed, essendo $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ chiusi in $\mathcal{X}$, le successioni $\{\boldsymbol{\alpha}_n + \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\beta}_n\}$ e $\{\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \boldsymbol{\beta}_n\}$ convergono ad $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}$ e $\boldsymbol{\alpha}^\oplus \in \mathcal{A}^\oplus$ e dunque

$$\mathbf{x}_\infty = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^\oplus.$$

La chiusura $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \mathcal{B}$ implica che $\boldsymbol{\alpha}^\oplus \in \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \mathcal{B}$. Esiste allora un $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$ tale che $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^\oplus$ e possiamo scrivere

$$\mathbf{x}_\infty = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{A}, \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}.$$

Ogni punto limite $\mathbf{x}_\infty$ appartiene dunque a $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ che è pertanto chiuso. □

La proposizione 11.5 è dovuta all'autore.

La seguente diretta conseguenza della lemma 11.5 è utile nelle applicazioni.

Proposizione 11.6. Condizione sufficiente di chiusura. *La somma di due sottospazi lineari chiusi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di uno spazio di* HILBERT *$\mathcal{X}$ è chiusa se è uguale alla somma di due sottospazi lineari chiusi di cui almeno uno è di dimensione finita. Più in generale $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ è chiuso se è esprimibile come somma di uno di dimensione finita e di un'altro incluso in $\mathcal{A}$ od in $\mathcal{B}$.*

Dim. Basta osservare che la proiezione ortogonale su di un sottospazio di dimensione finita ha dimensione finita e pertanto è un sottospazio chiuso. □

Le relazioni di ortogonalità che seguono sono fondamentali.

Proposizione 11.7. Relazioni di ortogonalità. *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due sottospazi lineari di uno spazio normato $\mathcal{X}$ e $\mathcal{A}^\perp$, $\mathcal{B}^\perp$ i loro complementi ortogonali nello spazio normato duale $\mathcal{X}'$. Allora*

$$\boxed{\begin{cases} i) & \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp = (\mathcal{A}+\mathcal{B})^\perp\,, \\ ii) & (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp \supseteq \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp\,, \\ iii) & (\mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp)^\perp = (\mathcal{A}+\mathcal{B})^{\perp\perp} \supseteq \mathcal{A}+\mathcal{B}\,, \end{cases}}$$

ed inoltre

$$\boxed{iv) \quad (\mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp)^\perp = \mathcal{A}+\mathcal{B} \iff \mathcal{A}+\mathcal{B} \quad \text{chiuso in } \mathcal{X}\,.}$$

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono sottospazi lineari chiusi in $\mathcal{X}$ si ha poi che

$$\boxed{\begin{cases} v) & \mathcal{A}\cap\mathcal{B} = (\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp)^\perp\,, \\ vi) & (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp = (\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp)^{\perp\perp} \supseteq \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp\,, \\ vii) & (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp \iff \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp \quad \text{chiuso in } \mathcal{X}'\,. \end{cases}}$$

Dim. Se $\mathcal{A}$ è un sottoinsieme dello spazio normato $\mathcal{X}$ risulta $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{\perp\perp}$. Se $\mathcal{A}$ è un sottospazio lineare di $\mathcal{X}$ si ha $\mathcal{A}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{A}}$ dove $\overline{\mathcal{A}}$ è la chiusura di $\mathcal{A}$ (vedi proposizione 5.12). La $i)$ e la $ii)$ sono evidenti. La $iii)$ si ottiene prendendo i complementi ortogonali in $i)$. La $iv)$ è una diretta conseguenza della $iii)$.

Per dimostrare la $v)$ si osservi che $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq (\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp)^\perp$ in quanto per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ ed $\mathbf{f} \in (\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp)$ si ha $\langle\, \mathbf{f}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle = 0$. L'inclusione inversa segue dall'ovvia inclusione $\mathcal{A}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$ così che $(\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp)^\perp \subseteq \mathcal{A}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Analogamente $(\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp)^\perp \subseteq \mathcal{B}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ e pertanto $(\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp)^\perp \subseteq \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. La $vi)$ segue prendendo i complementi ortogonali nella $v)$ e la $vii)$ è una diretta conseguenza della $vi)$. □

Presentiamo ora un risultato più profondo (vedi [41] teorema II.15 per una dimostrazione in spazi di BANACH).

Proposizione 11.8. Chiusura della somma dei complementi ortogonali. *Siano* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *due sottospazi lineari di uno spazio di* HILBERT $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{A}^\perp$, $\mathcal{B}^\perp$ *i loro complementi ortogonali nello spazio di* HILBERT *duale* $\mathcal{X}'$. *Allora*

$$\mathcal{A}+\mathcal{B} \quad \text{chiuso in } \mathcal{X} \iff \mathcal{A}^\perp+\mathcal{B}^\perp \quad \text{chiuso in } \mathcal{X}',$$

e la costante che compare nella decomposizione stabilita dal lemma fondamentale 11.1, rimane invariata sostituendo $\mathcal{A}^\perp$ *e* $\mathcal{B}^\perp$ *al posto di* $\mathcal{A}$ *e di* $\mathcal{B}$ *rispettivamente.*

Dim. In forza del lemma 11.7 risulta

$i)$ $\quad \mathcal{A}+\mathcal{B}$ chiuso $\iff \mathcal{A}+\mathcal{B} = (\mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp)^\perp$,

$ii)$ $\quad \mathcal{A}^\perp+\mathcal{B}^\perp$ chiuso $\iff \mathcal{A}^\perp+\mathcal{B}^\perp = (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp$.

$\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ Essendo $(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp \supseteq \mathcal{A}^\perp+\mathcal{B}^\perp$ dimostriamo che

$$(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp+\mathcal{B}^\perp.$$

Consideriamo un funzionale $\mathbf{f} \in (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp \subseteq \mathcal{X}'$ ed una qualsiasi decomposizione di un elemento $\mathbf{x}\in\mathcal{A}+\mathcal{B}$ come somma $\mathbf{x}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ con $\mathbf{a}\in\mathcal{A}$ e $\mathbf{b}\in\mathcal{B}$. Definiamo quindi il funzionale lineare $\phi_\mathbf{b}$ on $\mathcal{A}+\mathcal{B}$

$$\langle \phi_\mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle := \langle \mathbf{f}, \mathbf{a} \rangle \quad \forall \mathbf{x}\in\mathcal{A}+\mathcal{B}.$$

Notiamo che la definizione è indipendente dalla decomposizione di $\mathbf{x}$ in quanto $\mathbf{f}\in(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp$. Risulta quindi $\langle \phi_\mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{b}\in\mathcal{B}$.

Il funzionale $\phi_\mathbf{b}$ è continuo. Infatti $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ è chiuso per ipotesi e pertanto il lemma 11.2 assicura che

$$\forall \{\mathbf{a},\mathbf{b}\} \in \mathcal{A}\times\mathcal{B} \quad \exists \boldsymbol{\rho}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathcal{A}\cap\mathcal{B} \ : \ \begin{cases} \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_\mathcal{X} \geq c\,\|\mathbf{a}+\boldsymbol{\rho}\|_\mathcal{X}, \\ \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_\mathcal{X} \geq c\,\|\mathbf{b}-\boldsymbol{\rho}\|_\mathcal{X}. \end{cases}$$

Essendo $\mathbf{f}\in(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp$ e $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$, risulta $\langle \mathbf{f}, \mathbf{a}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{a}+\boldsymbol{\rho}(\mathbf{a},\mathbf{b})\rangle$ e quindi

$$\begin{aligned} |\langle \phi_\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}\rangle| = |\langle \mathbf{f}, \mathbf{a}\rangle| = |\langle \mathbf{f}, \mathbf{a}+\boldsymbol{\rho}(\mathbf{a},\mathbf{b})\rangle| \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{X}'}\,\|\mathbf{a}+\boldsymbol{\rho}(\mathbf{a},\mathbf{b})\|_\mathcal{X} \leq \\ \leq c^{-1}\,\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{X}'}\,\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_\mathcal{X}. \end{aligned}$$

Estendiamo $\phi_\mathbf{b}$ ad un funzionale $\mathbf{f}_\mathbf{b}\in\mathcal{X}'$ continuo su tutto $\mathcal{X}$ ponendo

$$\langle \mathbf{f}_\mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle := \langle \phi_\mathbf{b}, \boldsymbol{\Pi}\mathbf{x}\rangle \quad \forall \mathbf{x}\in\mathcal{X},$$

con $\mathbf{\Pi}$ proiettore ortogonale su $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ in $\mathcal{X}$. Si ha quindi

$$|\langle \mathbf{f_b}, \mathbf{x} \rangle| = |\langle \boldsymbol{\phi}_\mathbf{b}, \mathbf{\Pi x} \rangle| \le c^{-1} \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{X}'} \|\mathbf{\Pi x}\|_{\mathcal{X}} \le c^{-1} \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{X}'} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

Osserviamo infine che risulta

$$\mathbf{f_b} \in \mathcal{B}^\perp, \quad \mathbf{f_a} := \mathbf{f} - \mathbf{f_b} \in \mathcal{A}^\perp.$$

Dunque $\mathbf{f} = \mathbf{f_a} + \mathbf{f_b} \in \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$ e l'inclusione è dimostrata.

Se nella diseguaglianza

$$|\langle \mathbf{f_b}, \mathbf{x} \rangle| \le c^{-1} \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{X}'} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X},$$

poniamo $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}$ con $\overline{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ tale che $\langle \mathbf{f_b}, \overline{\mathbf{x}} \rangle = \|\mathbf{f_b}\|_{\mathcal{X}'} \|\overline{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{X}}$ e procediamo in modo analogo per $\mathbf{f_a}$, si perviene alle diseguaglianze

$$c\|\mathbf{f_b}\|_{\mathcal{X}'} \le \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{X}'}, \quad c\|\mathbf{f_a}\|_{\mathcal{X}'} \le \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{X}'},$$

che sono perfettamente analoghe a quelle del lemma 11.1. Quest'ultima osservazione è dovuta all'autore.

L'implicazione $ii) \Rightarrow i)$ si dimostra in modo analogo facendo ricorso all'isomorfismo isometrico di RIESZ-FRÉCHET tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$. $\square$

Una ulteriore caratterizzazione della proprietà di chiusura della somma di due sottospazi lineari chiusi è fornita dal seguente risultato dovuto all'autore.

Proposizione 11.9. Un'equivalenza tra proprietà di chiusura. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio di* BANACH *e $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sottospazi lineari di $\mathcal{X}$ con $\mathcal{B}$ chiuso.*
Allora $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ è chiuso in $\mathcal{X}$ se e solo se il sottospazio lineare $(\mathcal{A}+\mathcal{B})/\mathcal{B}$ è chiuso nello spazio quoziente $\mathcal{X}/\mathcal{B}$.

Dim. Se $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ è chiuso in $\mathcal{X}$ esso è uno spazio di BANACH per la topologia indotta da $\mathcal{X}$ e pertanto il sottospazio lineare $(\mathcal{A}+\mathcal{B})/\mathcal{B}$ è chiuso nello spazio di BANACH $\mathcal{X}/\mathcal{B}$.

Sia ora $(\mathcal{A}+\mathcal{B})/\mathcal{B}$ chiuso in $\mathcal{X}/\mathcal{B}$. Una successione di CAUCHY $\{\mathbf{a}_n+\mathbf{b}_n\}$ con $\mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ and $\mathbf{b}_n \in \mathcal{B}$ converge ad un elemento $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e dobbiamo mostrare che $\mathbf{x} \in \mathcal{A}+\mathcal{B}$. A tal fine osserviamo che

$$\|\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n - \mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} \ge \inf_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} \|\mathbf{a}_n - \mathbf{x} + \mathbf{b}\|_{\mathcal{X}} = \|\mathbf{a}_n - \mathbf{x}\|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}.$$

La chiusura di $(\mathcal{A}+\mathcal{B})/\mathcal{B}$ assicura che la successione $\{\mathbf{a}_n + \mathcal{B}\} \subset (\mathcal{A}+\mathcal{B})/\mathcal{B}$ converge a $\mathbf{x}+\mathcal{B} \in (\mathcal{A}+\mathcal{B})/\mathcal{B}$. Ne segue che $\mathbf{x} \in \mathcal{A}+\mathcal{B}$. $\square$

Dalle proposizioni 5.13, 11.9 e 11.17 si deduce un criterio di chiusura dell'immagine di un operatore prodotto. Il risultato è dovuto all'autore.

Proposizione 11.10. Operatori prodotto. *Siano* $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ *spazi lineari normati e* $\mathcal{H}$ *uno spazio di* BANACH. $\mathbf{F} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$ *e* $\mathbf{G} \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y};\mathcal{H}\}$ *operatori lineari continui e* $\mathbf{F}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}';\mathcal{X}'\}$, $\mathbf{G}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{H}';\mathcal{Y}'\}$ *i loro duali.*
Assumiamo che $\mathrm{Im}\,\mathbf{F} \subseteq \mathcal{Y}$ *sia spazio di* BANACH *per la topologia indotta da* $\mathcal{Y}$. *Sussiste allora l'equivalenza*

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Im}\,(\mathbf{G}\,\mathbf{F}) \quad \text{chiuso in } \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \\ (\mathrm{Ker}\,\mathbf{G} \cap \mathrm{Im}\,\mathbf{F})^{\perp} = (\mathrm{Ker}\,\mathbf{G})^{\perp} + (\mathrm{Im}\,\mathbf{F})^{\perp} = \mathrm{Im}\,\mathbf{G}' + \mathrm{Ker}\,\mathbf{F}' \quad \text{chiuso in } \mathcal{Y}'\,. \end{array}}$$

Dim. In virtù della proposizione 5.13, tra lo spazio di BANACH $(\mathrm{Im}\,\mathbf{F})'$ duale di $\mathrm{Im}\,\mathbf{F}$ e lo spazio di BANACH $\mathcal{Y}'/(\mathrm{Im}\,\mathbf{F})^{\perp}$ esiste un isomorfismo isometrico che rende i due spazi lineari topologicamente equivalenti.

Consideriamo quindi

- l'operatore $\mathbf{G}_o \in \mathrm{L}\{\mathrm{Im}\,\mathbf{F};\mathcal{H}\}$ restrizione di $\mathbf{G} \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y};\mathcal{H}\}$ allo spazio di BANACH $\mathrm{Im}\,\mathbf{F} \subseteq \mathcal{Y}$, definito da

$$\mathbf{G}_o\mathbf{y} := \mathbf{G}\mathbf{y} \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathrm{Im}\,\mathbf{F}\,,$$

- e l'operatore duale $\mathbf{G}'_o \in \mathrm{L}\{\mathcal{H}';(\mathrm{Im}\,\mathbf{F})'\} \equiv \mathrm{L}\{\mathcal{H}';\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{F}'\}$ che, essendo $(\mathrm{Im}\,\mathbf{F})^{\perp} = \mathrm{Ker}\,\mathbf{F}'$, può essere definito come

$$\mathbf{G}'_o\mathbf{h}' := \mathbf{G}'\mathbf{h}' + \mathrm{Ker}\,\mathbf{F}' \quad \forall\, \mathbf{h}' \in \mathcal{H}\,.$$

Infatti risulta

$$\begin{aligned} \langle\, \mathbf{G}'_o\mathbf{h}', \mathbf{y}\,\rangle &= \langle\, \mathbf{G}'\mathbf{h}' + \mathrm{Ker}\,\mathbf{F}', \mathbf{y}\,\rangle := \langle\, \mathbf{G}'\mathbf{h}' + \mathbf{y}'_o, \mathbf{y}\,\rangle = \\ &= \langle\, \mathbf{G}'\mathbf{h}', \mathbf{y}\,\rangle = \langle\, \mathbf{h}', \mathbf{G}_o\mathbf{y}\,\rangle \quad \forall\, \mathbf{y}'_o \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{F}' \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathrm{Im}\,\mathbf{F}\,. \end{aligned}$$

Il teorema dell'immagine chiusa, proposizione 11.17, mostra quindi che

- $\mathrm{Im}\,\mathbf{G}_o = \mathrm{Im}\,\mathbf{G}\mathbf{F}$ è chiuso nello spazio di BANACH $\mathcal{H}$ se e solo se

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{G}'_o = (\mathrm{Im}\,\mathbf{G}' + \mathrm{Ker}\,\mathbf{F}')/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{F}'\,,$$

  è chiuso nello spazio di BANACH $\mathcal{Y}'/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{F}'$.

Tale proprietà è infine equivalente alla chiusura di $\mathrm{Im}\,\mathbf{G}' + \mathrm{Ker}\,\mathbf{F}'$ in $\mathcal{Y}'$ in virtù della proposizione 11.9. $\square$

Osservazione 11.2. Si noti che la proposizione 11.10 fornisce un esempio in cui la somma dei due sottospazi lineari $\mathrm{Im}\,\mathbf{G}'$ e $\mathrm{Ker}\,\mathbf{F}'$ è chiusa nello spazio di BANACH $\mathcal{Y}'$ anche se il sottospazio $\mathrm{Im}\,\mathbf{G}'$ non è chiuso. ■

Proposizione 11.11. Un criterio di chiusura dell'immagine del prodotto tra operatori. *Siano* $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{H}$ *spazi di* BANACH *e* $\mathbf{F} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$, $\mathbf{G} \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y};\mathcal{H}\}$ *operatori lineari continui. Sussiste allora l'implicazione*

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{Im}\,\mathbf{G} \quad \text{chiuso in } \mathcal{H}\,, \\ \mathrm{Im}\,\mathbf{F} \quad \text{chiuso in } \mathcal{Y}\,, \\ \mathrm{Ker}\,\mathbf{G} = \{\mathbf{o}\}\,, \end{cases} \Rightarrow \quad \mathrm{Im}\,(\mathbf{G}\,\mathbf{F}) \quad \text{chiuso in } \mathcal{H}\,.}$$

Dim. Dalla proposizione 11.17 segue che la chiusura delle immagini degli operatori $\mathbf{F} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$ e $\mathbf{G} \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y};\mathcal{H}\}$ equivale alle diseguaglianze

$$\begin{cases} \|\,\mathbf{G}\mathbf{y}\,\|_{\mathcal{H}} \ge c_{\mathbf{G}}\,\|\,\mathbf{y}\,\|_{\mathcal{Y}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{G}}\,, & \forall\, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\,, \\ \|\,\mathbf{F}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}} \ge c_{\mathbf{F}}\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{F}}\,, & \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,. \end{cases}$$

Se $\mathrm{Ker}\,\mathbf{G} = \{\mathbf{o}\}$ allora si deduce che vale la diseguaglianza

$$\|\,\mathbf{G}\mathbf{F}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{H}} \ge c_{\mathbf{G}}\,\|\,\mathbf{F}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}} \ge c_{\mathbf{G}}\,c_{\mathbf{F}}\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{F}}\,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,,$$

che, essendo $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{G}\mathbf{F}) = \mathrm{Ker}\,\mathbf{F}$, equivale alla chiusura di $\mathrm{Im}\,(\mathbf{G}\,\mathbf{F})$ in $\mathcal{H}$. □

Dimostriamo ora un'equivalenza tra proprietà di chiusura che è di basilare importanza in meccanica delle strutture.

Proposizione 11.12. Teorema fondamentale della meccanica. *Sia* $\mathcal{X}$ *uno spazio normato,* $\mathcal{H}$ *uno spazio di* BANACH, $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{H}\}$ *un operatore lineare continuo e* $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{H}';\mathcal{X}'\}$ *il duale. Consideriamo quindi un sottospazio lineare* $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ *che sia uno spazio di* BANACH *per la topologia indotta da* $\mathcal{X}$, *l'operatore* $\mathbf{A}_{\mathcal{L}} \in \mathrm{L}\{\mathcal{L};\mathcal{H}\}$ *restrizione di* $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{H}\}$ *ad* $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ *e l'operatore duale* $\mathbf{A}'_{\mathcal{L}} \in \mathrm{L}\{\mathcal{H}';\mathcal{L}'\}$. *Allora sussiste l'equivalenza*

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{L}} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{L}})^{\perp} \subseteq \mathcal{H}' \iff \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' + \mathcal{L}^{\perp} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathcal{L})^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'.}$$

Dim. Supponiamo che sia $\boxed{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{L}} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{L}})^{\perp}\,.}$

Notiamo preliminarmente che ogni funzionale $\mathbf{x}'_{\mathcal{L}} = \mathbf{A}'_{\mathcal{L}}\mathbf{h}' \in \mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}'$ con $\mathbf{h}' \in \mathcal{H}'$ può essere esteso ad un funzionale $\mathbf{x}'_{\mathbf{h}} \in \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' \subseteq \mathcal{X}'$ definito da

$$\mathbf{x}'_{\mathbf{h}} := \mathbf{A}'\mathbf{h}' \in \mathcal{X}' \iff \langle\, \mathbf{x}'_{\mathbf{h}}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle := \langle\, \mathbf{h}'\,,\, \mathbf{A}\mathbf{x}\,\rangle \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,.$$

Assegnato quindi un qualsiasi funzionale $\mathbf{x}' \in (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathcal{L})^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'$ possiamo considerarne la restrizione $\mathbf{x}'_{\mathcal{L}} \in (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{L}})^{\perp}$ definita da

$$\langle\, \mathbf{x}'_{\mathcal{L}}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle := \langle\, \mathbf{x}'\,,\, \mathbf{x}\,\rangle \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{L}\,.$$

Per ipotesi risulta $\mathbf{x}'_{\mathcal{L}} \in \mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}'$. Posto allora $\mathbf{x}'_{\mathcal{L}} = \mathbf{A}'_{\mathcal{L}}\mathbf{h}'$ con $\mathbf{h}' \in \mathcal{H}'$ consideriamone l'estensione $\mathbf{x}'_{\mathbf{h}} = \mathbf{A}'\mathbf{h}' \subseteq \mathcal{X}'$ ed osserviamo che

$$\langle\, \mathbf{x}' - \mathbf{x}'_{\mathbf{h}}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle = \langle\, \mathbf{x}'_{\mathcal{L}} - \mathbf{x}'_{\mathcal{L}}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{L} \iff \mathbf{x}' - \mathbf{x}'_{\mathbf{h}} \in \mathcal{L}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'\,.$$

Ponendo $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_{\mathbf{h}} + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_{\mathbf{h}})$ si ha quindi che

$$\mathbf{x}' \in (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathcal{L})^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'\,, \quad \mathbf{x}'_{\mathbf{h}} \in \mathrm{Im}\,\mathbf{A}'\,, \quad \mathbf{x}' - \mathbf{x}'_{\mathbf{h}} \in \mathcal{L}^{\perp}\,.$$

Possiamo pertanto affermare che $(\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathcal{L})^{\perp} \subseteq \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' + \mathcal{L}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'$.

Osservando infine che $(\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathcal{L})^{\perp} \supseteq (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} + \mathcal{L}^{\perp} \supseteq \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' + \mathcal{L}^{\perp}$ si perviene all'eguaglianza

$$(\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathcal{L})^{\perp} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} + \mathcal{L}^{\perp} = \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' + \mathcal{L}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'\,.$$

Viceversa assumiamo che sia $\boxed{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}' + \mathcal{L}^{\perp} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathcal{L})^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'\,.}$

Consideriamo un funzionale $\mathbf{x}'_{\mathcal{L}} \in (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{L}})^{\perp} \subseteq \mathcal{L}'$. Il teorema di HAHN-BANACH consente di considerarne un'estensione $\mathbf{x}' \in (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathcal{L})^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'$.

In forza dell'ipotesi risulta

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\rho}\,, \quad \mathbf{x}'_{\mathbf{h}} \in \mathrm{Im}\,\mathbf{A}'\,,\ \boldsymbol{\rho} \in \mathcal{L}^{\perp}\,,$$

e quindi

$$\exists\, \mathbf{h}' \in \mathcal{H}' \ :\ \mathbf{A}'\mathbf{h}' = \mathbf{x}'_{\mathbf{h}} \iff \langle\, \mathbf{x}'_{\mathbf{h}}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle = \langle\, \mathbf{h}'\,,\, \mathbf{A}\mathbf{x}\,\rangle \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,.$$

Ne segue che

$$\langle\, \mathbf{x}'\,,\, \mathbf{x}\,\rangle = \langle\, \mathbf{x}'_{\mathbf{h}}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle = \langle\, \mathbf{h}'\,,\, \mathbf{A}\mathbf{x}\,\rangle \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{L}\,.$$

Dunque $\mathbf{x}'_{\mathcal{L}} = \mathbf{A}'_{\mathcal{L}}\mathbf{h}' \in \mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{L}}$ per cui $(\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{L}})^{\perp} \subseteq \mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{L}}$.

Essendo $(\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{L}})^{\perp} \supseteq \mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{L}}$ risulta $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{L}} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{L}})^{\perp}$. □

Osservazione 11.3. La proposizione 11.12 fornisce un ulteriore esempio in cui la somma di due sottospazi lineari $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'$ e $\mathcal{L}^{\perp}$ è chiusa nello spazio di BANACH $\mathcal{X}'$ anche se il sottospazio $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'$ non è chiuso.

Si noti a tal proposito che le condizioni

$$
\begin{array}{lllll}
i) & \mathrm{Im}\,\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \mathbf{A}\mathcal{L} \ \text{ chiuso in } \mathcal{H} & \iff & \|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{H}} \geq c\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}\cap\mathcal{L}} & \forall\,\mathbf{x}\in\mathcal{L} \\
ii) & \mathrm{Im}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathcal{X} \ \text{ chiuso in } \mathcal{H} & \iff & \|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{H}} \geq c\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} & \forall\,\mathbf{x}\in\mathcal{X}\,,
\end{array}
$$

non sono equivalenti ed anzi che nessuna di esse implica l'altra.

Si noti inoltre che dalla dimostrazione della proposizione 11.12 si evince che

$$
\boxed{\begin{array}{l}
\mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{L}} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{L}})^{\perp} \subseteq \mathcal{H}' \iff \\
\mathrm{Im}\,\mathbf{A}' + \mathcal{L}^{\perp} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} + \mathcal{L}^{\perp} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}\cap\mathcal{L})^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'.
\end{array}}
$$

In forza del teorema dell'immagine chiusa sussiste l'equivalenza

$$
\boxed{\mathbf{A}\mathcal{L} \ \text{chiuso in}\ \mathcal{H} \iff \mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{L}} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{L}})^{\perp} \subseteq \mathcal{H}'\,,}
$$

e dunque dalla proposizione 11.12 segue anche l'equivalenza

$$
\boxed{\begin{array}{l}
\mathbf{A}\mathcal{L} \ \text{chiuso in}\ \mathcal{H} \iff \\
(\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}\cap\mathcal{L})^{\perp} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} + \mathcal{L}^{\perp} = \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' + \mathcal{L}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}'\,,
\end{array}}
$$

ma ciò non implica che $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}' = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp}$. ■

Osservazione 11.4.

In meccanica delle strutture si presenta la seguente situazione caratteristica.

In uno spazio normato $\mathcal{X}$ sia $\mathcal{G} \subset \mathcal{X}$ un sottospazio lineare che è uno spazio di BANACH per la topologia indotta da $\mathcal{X}$ e tale che la restrizione $\mathbf{A}_{\mathcal{G}} \in \mathrm{L}\{\mathcal{G};\mathcal{H}\}$ di $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{H}\}$ soddisfi le proprietà

$$
\boxed{\begin{array}{l}
a)\ \ \mathrm{Im}\,\mathbf{A}_{\mathcal{G}} = \mathbf{A}\mathcal{G} \ \text{ chiuso in } \mathcal{H} \iff \|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{H}} \geq c\,\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}\cap\mathcal{G}} \quad \forall\,\mathbf{x}\in\mathcal{G}\,, \\
b)\ \ \dim\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{G}} < +\infty\,.
\end{array}}
$$

Allora il teorema dell'immagine chiusa in spazi di BANACH, proposizione 11.17, assicura che

$$
\boxed{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}_{\mathcal{G}} = \mathbf{A}\mathcal{G} \ \text{ chiuso in } \mathcal{H} \iff \mathrm{Im}\,\mathbf{A}'_{\mathcal{G}} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_{\mathcal{G}})^{\perp}\,.}
$$

Se $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ è un sottospazio lineare chiuso in $\mathcal{G}$, dal teorema fondamentale, proposizione 11.12, si deduce l'equivalenza

$$\boxed{\mathbf{A}\mathcal{L} \text{ chiuso in } \mathcal{H} \iff (\operatorname{Ker} \mathbf{A}_{\mathcal{G}} \cap \mathcal{L})^{\perp} = (\operatorname{Ker} \mathbf{A}_{\mathcal{G}})^{\perp} + \mathcal{L}^{\perp} \subseteq \mathcal{G}' \,,}$$

che per la proposizione 11.8, formulata in spazi di BANACH, equivale a

$$\boxed{\mathbf{A}\mathcal{L} \text{ chiuso in } \mathcal{H} \iff \operatorname{Ker} \mathbf{A}_{\mathcal{G}} + \mathcal{L} \text{ chiuso in } \mathcal{G} \,.}$$

Poichè $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{A}_{\mathcal{G}} < +\infty$ la chiusura di $\operatorname{Ker} \mathbf{A}_{\mathcal{G}} + \mathcal{L}$ sussiste in forza della proposizione 11.6 per ogni sottospazio lineare chiuso $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$.

Condizioni equivalenti alle due condizioni caratteristiche $a)$ e $b)$ sono discusse in dettaglio nella successiva sezione 12. ■

I risultati di chiusura enunciati in precedenza sono adoperati nelle applicazioni per stabilire la buona posizione dei problemi lineari e cioè l'esistenza di soluzioni per ogni valore dei dati che soddisfi la condizione variazionale di ortogonalità alle soluzioni del problema duale omogeneo.

La proprietà di chiusura della somma di due sottospazi lineari chiusi è spesso invocata sotto una delle diverse forme equivalenti in cui essa può essere espressa.

E' pertanto utile riassumere qui di seguito tali condizioni. Le prossime due proposizioni si riferiscono rispettivamente al caso generale ed al caso particolare (ma importante) in cui la somma dei due sottospazi lineari chiusi è diretta.

Proposizione 11.13. Condizioni equivalenti di chiusura. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio di* HILBERT *e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ sottospazi lineari chiusi in $\mathcal{X}$. Allora le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti:*

$$
\begin{cases}
i) \quad \mathcal{A}+\mathcal{B} \quad \text{chiuso in } \mathcal{X} \iff \mathcal{A}+\mathcal{B} = (\mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp)^\perp \,, \\[2mm]
ii) \quad (\mathcal{A}+\mathcal{B})/\mathcal{B} \quad \text{chiuso in } \mathcal{X}/\mathcal{B} \,, \\[2mm]
iii) \quad \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp \quad \text{chiuso in } \mathcal{X}' \iff \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^\perp \,, \\[2mm]
iv) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A}, \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B}, \ \exists \boldsymbol{\rho}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathcal{A}\cap\mathcal{B} \ : \begin{cases} \| \mathbf{a}+\mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \geq c \| \mathbf{a} + \boldsymbol{\rho} \|_{\mathcal{X}} \,, \\ \| \mathbf{a}+\mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \geq c \| \mathbf{b} - \boldsymbol{\rho} \|_{\mathcal{X}} \,, \end{cases} \\[2mm]
v) \quad \sup_{\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} \ \inf_{\rho\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \dfrac{(\mathbf{a}+\boldsymbol{\rho}\,,\, \mathbf{b}-\boldsymbol{\rho})_{\mathcal{X}}}{\| \mathbf{a}+\boldsymbol{\rho} \|_{\mathcal{X}} \, \| \mathbf{b}+\boldsymbol{\rho} \|_{\mathcal{X}}} \leq \theta = 1 - c^2/2 < 1 \,, \\[4mm]
vi) \quad \begin{cases} \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \leq \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} + c^{-1} \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \\[2mm] \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \leq \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} + c^{-1} \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \end{cases} \\[4mm]
vii) \quad \begin{cases} \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \leq c^{-1} \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} + (1+c^{-1}) \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \\[2mm] \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \leq c^{-1} \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} + (1+c^{-1}) \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \end{cases} \\[4mm]
viii) \quad \begin{cases} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \mathcal{B} \ \text{chiuso in } \mathcal{X} \iff \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^\oplus} \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \geq c \| \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \quad \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B} \,, \\[2mm] \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}^\oplus} \mathcal{A} \ \text{chiuso in } \mathcal{X} \iff \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}^\oplus} \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} \geq c \| \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} \,. \end{cases}
\end{cases}
$$

Tutte le diseguaglianze espresse in termini di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ valgono invariate e con gli stessi valori delle costanti esprimendole in termini di $\mathcal{A}^\perp$ e $\mathcal{B}^\perp$.

Dim. Le equivalenze $i) \iff ii) \iff iii)$ sono state dimostrate nelle proposizioni 11.4 e 11.9 .

Le implicazioni $i) \Rightarrow iv) \iff v) \Rightarrow vi) \iff vii)$ sono state dimostrate nelle proposizioni 11.2, 11.3 e 11.4.

Le implicazioni $vii) \Rightarrow viii) \Rightarrow i)$ sono state dimostrate nella proposizione 11.5.

L'ultima affermazione segue dalla proposizione 11.8. □

Proposizione 11.14. Condizioni equivalenti di chiusura. *Sia $\mathcal{X}$ uno spazio di* Hilbert *e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ sottospazi lineari chiusi in $\mathcal{X}$ tali che la la somma $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ è diretta. Allora le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti:*

$$
\begin{cases}
i) & \mathcal{A} \dotplus \mathcal{B} \;\; \text{chiuso in } \mathcal{X} \iff \mathcal{A} \dotplus \mathcal{B} = (\mathcal{A}^{\perp} \cap \mathcal{B}^{\perp})^{\perp} \,, \\[2mm]
ii) & \mathcal{A}^{\perp} + \mathcal{B}^{\perp} \;\; \text{chiuso in } \mathcal{X}' \iff \mathcal{A}^{\perp} + \mathcal{B}^{\perp} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\perp} \,, \\[2mm]
iii) & \begin{cases} \| \mathbf{a} + \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \geq c \, \| \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} \\ \| \mathbf{a} + \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \geq c \, \| \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \end{cases} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} \,, \quad \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B} \,, \\[2mm]
vi) & \begin{cases} \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \leq \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} + c^{-1} \, \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \\ \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \leq \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} + c^{-1} \, \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \end{cases} \\[2mm]
vii) & \begin{cases} \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \leq c^{-1} \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} + (1 + c^{-1}) \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \\ \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \leq c^{-1} \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} + (1 + c^{-1}) \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,, \end{cases} \\[2mm]
iv) & \sup_{\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} \dfrac{(\mathbf{a} \,, \mathbf{b})_{\mathcal{X}}}{\| \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} \, \| \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}}} \leq \theta = 1 - c^2/2 < 1 \,, \\[2mm]
v) & \begin{cases} \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}} \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \leq \theta \, \| \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} & \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B} \,, \\ \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}} \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} \leq \theta \, \| \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} & \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} \,, \end{cases} \quad 0 < \theta < 1 \,, \\[2mm]
iv) & \sup_{\{\mathbf{a}_{\oplus},\mathbf{b}\} \in \mathcal{A}^{\oplus} \times \mathcal{B}} \dfrac{(\mathbf{a}_{\oplus} \,, \mathbf{b})_{\mathcal{X}}}{\| \mathbf{a}_{\oplus} \|_{\mathcal{X}} \, \| \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}}} = \sup_{\{\mathbf{a},\mathbf{b}_{\oplus}\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}^{\oplus}} \dfrac{(\mathbf{a} \,, \mathbf{b}_{\oplus})_{\mathcal{X}}}{\| \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} \, \| \mathbf{b}_{\oplus} \|_{\mathcal{X}}} \geq c > 0 \,, \\[2mm]
viii) & \begin{cases} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^{\oplus}} \mathcal{B} \;\text{chiuso in } \mathcal{X} \iff \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{A}^{\oplus}} \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} \geq c \, \| \mathbf{b} \|_{\mathcal{X}} & \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B} \,, \\ \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}^{\oplus}} \mathcal{A} \;\text{chiuso in } \mathcal{X} \iff \| \mathbf{\Pi}_{\mathcal{B}^{\oplus}} \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} \geq c \, \| \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} & \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} \,. \end{cases}
\end{cases}
$$

Dim. Basta specializzare le proprietà enunciate nella proposizione 11.13 tenendo presente che $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\mathbf{o}\}$. □

Osservazione 11.5. Un'importante applicazione delle condizioni equivalenti concernenti la chiusura della somma di due sottospazi lineari chiusi è la seguente.

Nella ricerca di una soluzione approssimata di un problema lineare si considerano famiglie infinite, ad un parametro, di sottospazi lineari di dimensione finita costituiti dai campi che interpolano le variabili del problema.

Nel Metodo degli Elementi Finiti (**M.E.F.**) la famiglia di sottospazi lineari interpolanti dipende da un parametro che misura la massima dimensione degli elementi.

Le condizioni sufficienti per la convergenza della soluzione approssimata a quella del problema originario riportate in letteratura consistono nel richiedere che valgano talune diseguaglianze con costanti indipendenti dalla dimensione degli elementi.

Alla luce dei risultati di chiusura riportati in questa sezione si riconosce che tali diseguaglianze sono equivalenti a richiedere che la somma di due sottospazi lineari di dimensione finita sia uniformemente chiusa al tendere al limite del parametro della famiglia.

Una condizione di questo tipo è nota in letteratura col nome di condizione di (LADYZHENSKAYA-BABUŠKA-BREZZI) (in sigla **LBB**). [24], [31], [32], [48]. ■

11.1. Il teorema dell'immagine chiusa per operatori non limitati

In forza delle proposizioni 11.7 e 11.8 è possibile formulare il teorema della immagine chiusa con un enunciato più generale di quello adottato nella proposizione 9.16.

La dimostrazione che segue fa riferimento a spazi di HILBERT ma il risultato sussiste, con una dimostrazione più difficile, anche in spazi di BANACH (vedi [41] teorema II.18).

Proposizione 11.15. Teorema dell'immagine chiusa. *Siano $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'$ spazi di* HILBERT *duali. Si consideri un operatore lineare chiuso $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ con $\operatorname{dom} \mathbf{A}$ denso in $\mathcal{X}$ ed il duale $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$. Si ha allora che*

$$\operatorname{Ker} \mathbf{A}' = (\operatorname{Im} \mathbf{A})^{\perp}, \quad \operatorname{Ker} \mathbf{A} = (\operatorname{Im} \mathbf{A}')^{\perp},$$

e le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti

$$\begin{cases} i) & \operatorname{Im} \mathbf{A} \;\; \text{chiuso in } \mathcal{Y}, \\ ii) & \operatorname{Im} \mathbf{A}' \;\; \text{chiuso in } \mathcal{X}', \\ iii) & \operatorname{Im} \mathbf{A} = (\operatorname{Ker} \mathbf{A}')^{\perp}, \\ iv) & \operatorname{Im} \mathbf{A}' = (\operatorname{Ker} \mathbf{A})^{\perp}. \end{cases}$$

Dim. Definiamo gli spazi prodotto in dualità

$$\mathbb{X} := \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\,, \quad \mathbb{X}' := \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}'\,,$$

ed i seguenti sottospazi lineari

$$\begin{cases} \mathcal{A} \ := \mathcal{G}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{X}\,, & \mathcal{B} \ := \mathcal{X} \times \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{Y}} \subset \mathbb{X}\,, \\ \mathcal{A}^{\perp} := \big[\mathcal{G}(\mathbf{A})\big]^{\perp} \subset \mathbb{X}'\,, & \mathcal{B}^{\perp} := \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{X}'} \times \mathcal{Y}' \subset \mathbb{X}'\,. \end{cases}$$

Osserviamo che dalla proposizione 9.9 si trae

$$\mathcal{A}^{\perp} = \big[\mathcal{G}(\mathbf{A})\big]^{\perp} = \mathbf{V}'\mathcal{G}(\mathbf{A}') = \big\{\{\mathbf{A}'\mathbf{y}', -\mathbf{y}'\} \in \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}' \ : \ \mathbf{y}' \in \ \mathrm{dom}\,\mathbf{A}'\big\}\,.$$

E′ allora facile verificare che

$$\begin{cases} \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \ = \ \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \times \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{Y}} \subseteq \mathbb{X}\,, \\ \mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{X} \times \ \mathrm{Im}\,\mathbf{A} \subseteq \mathbb{X}\,, \\ \mathcal{A}^{\perp} \cap \mathcal{B}^{\perp} = \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{X}'} \times \ \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}' \subseteq \mathbb{X}'\,, \\ \mathcal{A}^{\perp} + \mathcal{B}^{\perp} = \ \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' \times \mathcal{Y}' \subseteq \mathbb{X}'\,. \end{cases}$$

La proprietà $i)$ della proposizione 11.7 mostra che vale la relazione di ortogonalità

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}' = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\perp} \iff \mathcal{A}^{\perp} \cap \mathcal{B}^{\perp} = (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\perp}\,.$$

Il sottospazio lineare $\mathcal{B}$ è evidentemente chiuso in in $\mathbb{X}$. Anche il sottospazio lineare $\mathcal{A} = \mathcal{G}(\mathbf{A})$ risulta chiuso in $\mathbb{X}$ in quanto $\mathbf{A}$ è per ipotesi un operatore chiuso.

Dunque la proprietà $v)$ della proposizione 11.7 mostra che vale la relazione di ortogonalità

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = (\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}')^{\perp} \iff \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = (\mathcal{A}^{\perp} + \mathcal{B}^{\perp})^{\perp}\,.$$

Dalla proposizione 11.8 si deducono allora le equivalenze

$$\begin{gathered} \mathrm{Im}\,\mathbf{A} \ \text{ chiuso in } \mathcal{Y} \iff \mathcal{A} + \mathcal{B} \ \text{ chiuso in } \mathbb{X} \iff \\ \iff \mathcal{A}^{\perp} + \mathcal{B}^{\perp} \ \text{ chiuso in } \mathbb{X}' \iff \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' \ \text{ chiuso in } \mathcal{X}'\,. \end{gathered}$$

Le proprietà $iv)$ e $vii)$ della proposizione 11.7 consentono poi di estendere tali equivalenze alle relazioni

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\,\mathbf{A} = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}')^{\perp} \iff \mathcal{A} + \mathcal{B} = (\mathcal{A}^{\perp} \cap \mathcal{B}^{\perp})^{\perp}\,, \\ \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' = (\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp} \iff \mathcal{A}^{\perp} + \mathcal{B}^{\perp} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\,)^{\perp}\,, \end{cases}$$

e ciò conclude la dimostrazione. □

Proposizione 11.16. Operatori chiusi con immagine chiusa. *Siano* $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ *e* $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'$ *spazi di* HILBERT *duali. Un operatore lineare chiuso* $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ *ha immagine chiusa in* $\mathcal{X}$ *se e solo se vale la diseguaglianza*

$$\| \mathbf{A}\mathbf{x} \|_{\mathcal{Y}} \ge c \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A} \subseteq \mathcal{X} .$$

Se inoltre $\mathrm{dom}\,\mathbf{A}$ *è denso in* $\mathcal{X}$ *l'operatore duale* $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$ *è chiuso e le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti*

$$\begin{cases} i) & \mathrm{Im}\,\mathbf{A} \;\; \text{chiuso in } \mathcal{X} , \\ ii) & \| \mathbf{A}\mathbf{x} \|_{\mathcal{Y}} \ge c \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A} \subseteq \mathcal{X} , \\ iii) & \mathrm{Im}\,\mathbf{A}' \;\; \text{chiuso in } \mathcal{X}' , \\ iv) & \| \mathbf{A}'\mathbf{y}' \|_{\mathcal{X}'} \ge c \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \quad \forall \mathbf{y}' \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A}' \subseteq \mathcal{Y}' . \end{cases}$$

Dim. Adottiamo le notazioni della proposizione 11.15:

$$\mathcal{A} = \mathcal{G}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{X} , \quad \mathcal{B} = \mathcal{X} \times \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{Y}} .$$

I sottospazi lineari $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{A} = \mathcal{G}(\mathbf{A})$ sono chiusi in $\mathbb{X}$ in quanto $\mathbf{A}$ è per ipotesi un operatore chiuso.

Mostriamo che $\boxed{\, i) \Rightarrow ii) \,}$.

Se vale la $i)$ Il sottospazio lineare $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{X} \times \mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ è chiuso in $\mathbb{X}$ e quindi, in forza della proposizione 11.4 e ricordando che $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \times \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, risulta

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}\big\{\mathbf{x}, \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}\big\} &= \mathrm{dist}\big\{\{\mathbf{x}, \mathbf{o}\}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}\,\big\} \le \\ &\le c^{-1} \,\mathrm{dist}\big\{\{\mathbf{x}, \mathbf{o}\}, \mathcal{A}\big\} + (1 + c^{-1}) \,\mathrm{dist}\big\{\{\mathbf{x}, \mathbf{o}\}, \mathcal{B}\big\} = \\ &= c^{-1} \,\mathrm{dist}\big\{\{\mathbf{x}, \mathbf{o}\}, \mathcal{A}\big\} + (1 + c^{-1}) \,\mathrm{dist}\big\{\{\mathbf{x}, \mathbf{o}\}, \mathcal{X} \times \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{Y}}\big\} = \\ &= c^{-1} \,\mathrm{dist}\big\{\{\mathbf{x}, \mathbf{o}\}, \big\{\{\boldsymbol{\xi}, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\} \;:\; \boldsymbol{\xi} \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A}\big\}\big\} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A} , \end{aligned}$$

in quanto $\mathrm{dist}\big\{\{\mathbf{x}, \mathbf{o}\}, \mathcal{X} \times \{\mathbf{o}\}_{\mathcal{Y}}\big\} = 0$. In definitiva risulta

$$\mathrm{dist}\big\{\mathbf{x}, \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}\big\} \le c^{-1} \;\inf \big\{\| \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \|_{\mathcal{X}} + \| \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \|_{\mathcal{Y}} \mid \boldsymbol{\xi} \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A}\big\} ,$$

e ponendo $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$ si deduce che $\| \mathbf{A}\mathbf{x} \|_{\mathcal{Y}} \ge c \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A}$.

Mostriamo ora che $\boxed{\, ii) \Rightarrow i) \,}$.

Sia $\{\mathbf{Ax}_n\}$ una successione di CAUCHY in $\operatorname{Im}\mathbf{A} \subseteq \mathcal{Y}$ con $\|\mathbf{Ax}_n - \mathbf{y}_\infty\|_\mathcal{Y} \to 0$. Risulta allora $\|\mathbf{Ax}_n - \mathbf{Ax}_m\|_\mathcal{Y} \geq c\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_\mathcal{X} \to 0$. Sia $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_\infty\|_\mathcal{X} \to 0$. Allora la proprietà di chiusura del grafico di $\mathbf{A}$:

$$\left.\begin{aligned} &\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty\|_\mathcal{X} \to 0\,, \\ &\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}_\infty\|_\mathcal{Y} \to 0\,, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{x}_\infty \in \operatorname{dom}\mathbf{A}\,, \quad \mathbf{y}_\infty = \mathbf{Ax}_\infty\,,$$

assicura che $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ è chiuso in $\mathcal{Y}$.

Analogamente si dimostra che $\boxed{iii) \iff iv)}$.

L'equivalenza tra $i)$ e $iii)$ è conseguenza della proposizione 11.15. L'eguaglianza delle costanti che compaiono nelle diseguaglianze $ii)$ e $iv)$ si trae dalla proposizione 11.8 che fa appello all'isomorfismo isometrico di RIESZ-FRÉCHET. □

In spazi di BANACH il teorema dell'immagine chiusa ha la seguente formulazione (vedi [29] VII.5, [41] teor. II.18 e osserv. 20).

Proposizione 11.17. Teorema dell'immagine chiusa in spazi di BANACH. *Siano $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'$ coppie di spazi di* BANACH *duali. Allora per ogni coppia di operatori duali $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$ e $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}';\mathcal{X}'\}$ le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti*

$i)$ $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ chiuso in $\mathcal{Y} \iff \operatorname{Im}\mathbf{A} = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}')^\perp$,

$ii)$ $\operatorname{Im}\mathbf{A}'$ chiuso in $\mathcal{X}' \iff \operatorname{Im}\mathbf{A}' = (\operatorname{Ker}\mathbf{A})^\perp$,

$iii)$ $\|\mathbf{Ax}\|_{\mathcal{Y}'} \geq c_\mathbf{A}\,\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}/\operatorname{Ker}\mathbf{A}} \qquad \forall\,\mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$iv)$ $\|\mathbf{A}'\mathbf{y}'\|_{\mathcal{X}'} \geq c_{\mathbf{A}'}\,\|\mathbf{y}'\|_{\mathcal{Y}'/\operatorname{Ker}\mathbf{A}'} \qquad \forall\,\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'$,

con $c_\mathbf{A}$, $c_{\mathbf{A}'}$ costanti positive. □

Osservazione 11.6. Si noti che l'eguaglianza delle costanti $c_\mathbf{A}$ e $c_{\mathbf{A}'}$ dimostrata nella proposizione 11.16 non è qui perseguibile in quanto basata sull'isomorfismo isometrico di RIESZ-FRÉCHET tra uno spazio di HILBERT ed il duale. ■

12. DISEGUALIANZE ASTRATTE

Un risultato astratto dovuto a LUC TARTAR (non pubblicato, vedi [35] pag. 25 e [38] pag. 126) fornisce uno strumento estremamente utile per stabilire risultati di chiusura e di stima dell'errore di soluzioni approssimate.

Le due sottosezioni che seguono sono rispettivamente dedicate a presentare le dimostrazioni del lemma di TARTAR e di un nuovo risultato il quale stabilisce che sussiste anche l'implicazione inversa.

12.1. Il lemma di TARTAR

Premettiamo un semplice risultato che verrà richiamato nella prossima proposizione.

Proposizione 12.1. *Sia H uno spazio di* BANACH *e $\mathcal{A} \subset H$ un sottospazio lineare chiuso che ammette un supplementare topologico $\mathcal{S}$. Allora detto $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}$ il proiettore su $\mathcal{A}$ subordinato alla decomposizione $H = \mathcal{A} \dotplus \mathcal{S}$ risulta*

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \geq \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} \geq c \| \mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} , \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} .$$

Dim. Poichè $\mathbf{P}_{\mathcal{A}} \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A}$ dalla proposizione 11.1 segue che

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \|_{\mathcal{X}} \geq c \| (\mathbf{x} - \mathbf{a}) - \mathbf{P}_{\mathcal{A}} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \|_{\mathcal{X}} = c \| \mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} , \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} , \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} ,$$

che equivale a

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathcal{A}} \geq c \| \mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} .$$

Il risultato segue quindi osservando che la prima diseguaglianza è banale. □

Proposizione 12.2. Lemma di TARTAR**.** *Sia H uno spazio di* BANACH *riflessivo, E, E_o spazi lineari normati e $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{H; E\}$ un operatore lineare limitato. Se esiste un operatore lineare limitato $\mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\{H; E_o\}$ tale che*

$$\begin{cases} i) \quad \mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\{H; E_o\} \quad \text{è compatto} , \\ ii) \quad \| \mathbf{A}\mathbf{u} \|_E + \| \mathbf{A}_o \mathbf{u} \|_{E_o} \geq \alpha \| \mathbf{u} \|_H \quad \forall \mathbf{u} \in H , \end{cases}$$

allora risulta

$$\begin{cases} a) \quad \dim (\operatorname{Ker} \mathbf{A}) < +\infty \quad \text{in} \quad H , \\ b) \quad \| \mathbf{A}\mathbf{u} \|_E \geq c_{\mathbf{A}} \| \mathbf{u} \|_{H/\operatorname{Ker} \mathbf{A}} \quad \forall \mathbf{u} \in H \ \Rightarrow \ \operatorname{Im} \mathbf{A} \quad \text{chiuso in} \quad H . \end{cases}$$

Dim. Si noti preliminarmente che la $ii)$ implica che $\operatorname{Ker}\mathbf{A} \cap \operatorname{Ker}\mathbf{A}_o = \{\mathbf{o}\}$.

Iniziamo col mostrare che il sottospazio lineare chiuso $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ è di dimensione finita. A tal fine osserviamo che dalla $ii)$ si ha

$$\mathbf{u} \in \operatorname{Ker}\mathbf{A} \;\Rightarrow\; \|\,\mathbf{A}_o\mathbf{u}\,\|_{E_o} \geq \alpha\,\|\,\mathbf{u}\,\|_H .$$

Dunque dalla proposizione 7.9 e dalla proprietà di **compattezza** $i)$ si deduce che

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u}_\infty \quad \text{in } H\,, \\ &\{\mathbf{u}_n\} \subset \operatorname{Ker}\mathbf{A}\,, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|\,\mathbf{A}_o(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty)\,\|_{E_o} \to 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\,\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty\,\|_H \to 0\,,$$

e pertanto la proposizione 7.3, stante la riflessività spazio di BANACH H, impone che $\dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A}) < \infty$.

Supponiamo ora che la $b)$ sia falsa. Esisterebbe allora una successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset H$ tale che

$$\|\,\mathbf{u}_n\,\|_{H/\operatorname{Ker}\mathbf{A}} = 1\,, \quad \|\,\mathbf{A}\mathbf{u}_n\,\|_E \to 0.$$

Essendo $\dim\operatorname{Ker}\mathbf{A} < +\infty$ in virtù della proposizione 10.2 esiste un supplementare topologico $\mathcal{S}$ di $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ e sia $\mathbf{P_A}$ il proiettore su $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ subordinato alla decomposizione $H = \mathcal{A} \dotplus \mathcal{S}$. La proposizione 12.1 assicura che

$$1 = \|\,\mathbf{u}_n\,\|_{H/\operatorname{Ker}\mathbf{A}} \geq c\,\|\,\mathbf{u}_n - \mathbf{P_A}\mathbf{u}_n\,\|_H .$$

La successione $\{\mathbf{u}_n - \mathbf{P_A}\mathbf{u}_n\}$ è dunque limitata in H. La compattezza dell'operatore $\mathbf{A}_o \in L\{H; E_o\}$ assicura quindi che è possibile estrarre dalla successione $\{\mathbf{A}_o(\mathbf{u}_n - \mathbf{P_A}\mathbf{u}_n)\}$ una successione $\{\mathbf{A}_o(\mathbf{u}_k - \mathbf{P_A}\mathbf{u}_k)\}$ che è di CAUCHY in E_o. Inoltre, per ipotesi, la successione $\{\mathbf{A}\mathbf{u}_n\}$ è convergente in E e pertanto la diseguaglianza $ii)$ implica che la successione $\{\mathbf{u}_k - \mathbf{P_A}\mathbf{u}_k\}$ è di CAUCHY in H. La completezza dello spazio di BANACH H assicura allora che essa converge ad un limite $\mathbf{u}_\infty \in H$. Ma la successione $\{\mathbf{A}\mathbf{u}_n\}$ converge a zero in E e dunque $\mathbf{u}_\infty \in \operatorname{Ker}\mathbf{A}$.

Ne segue che $\mathbf{P_A}\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_\infty \in \operatorname{Ker}\mathbf{A}$ e dalla diseguaglianza $ii)$ si evince che

$$\alpha\,\|\,\mathbf{u}_k\,\|_{H/\operatorname{Ker}\mathbf{A}} \leq \|\,\mathbf{A}\mathbf{u}_k\,\|_E + \|\,\mathbf{A}_o(\mathbf{u}_k - \mathbf{P_A}\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_\infty)\,\|_F \to 0\,,$$

e ciò è assurdo in quanto $\|\,\mathbf{u}_k\,\|_{H/\operatorname{Ker}\mathbf{A}} = 1$. Vale quindi la diseguaglianza $b)$.

Per mostrare infine che la diseguaglianza $b)$ implica la chiusura di $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ consideriamo una successione $\{\mathbf{Au}_n\}$ convergente in $\operatorname{Im}\mathbf{A} \subseteq E$ e notiamo che dalla $b)$ segue che

$$\|\,\mathbf{Au}_n - \mathbf{Au}_k\,\|_E \to 0 \;\Rightarrow\; \|\,\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_k\,\|_{H/\operatorname{Ker}\mathbf{A}} \to 0\,.$$

La completezza di H implica quella di $H/\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ (vedi sezione I.4.7) e ciò assicura che esiste $\mathbf{u}_\infty \in H/\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ tale che

$$\|\,\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty\,\|_{H/\operatorname{Ker}\mathbf{A}} \to 0\,.$$

La continuità di $\mathbf{A}$ conduce infine alla conclusione che

$$\|\,\mathbf{Au}_n - \mathbf{Au}_\infty\,\|_E \to 0\,,$$

e pertanto alla proprietà di chiusura di $\operatorname{Im}\mathbf{A}$. □

Osservazione 12.1. La proposizione 12.2 è riportata in [38] richiamando la dimostrazione e l'enunciato riportati in [35] in cui lo spazio H è assunto essere un arbitrario spazio di BANACH (anche non riflessivo).

In tale contesto non è però possibile dimostrare la proprietà $a)$ in quanto il criterio di dimensionalità finita enunciato nella proposizione 7.3 non sussiste in un arbitrario spazio di BANACH H.

Un controesempio è fornito dal teorema di SCHUR il quale stabilisce che, nello spazio di BANACH di dimensione infinita $H = l^1$ costituito dalle successioni reali assolutamente convergenti, ogni successione debolmente convergente è fortemente convergente (vedi [29] V.1 teorema 5 e [41] osservazione III.4).

Si noti inoltre che la dimostrazione della proprietà $b)$ proposta in [35] invoca la possibilità di estrarre una successione debolmente convergente da una limitata. In forza del teorema di EBERLEIN-SHMULYAN, proposizione 7.8, tale possibilità richiede l'ipotesi che lo spazio di BANACH H sia riflessivo.

La dimostrazione di $b)$ qui proposta non richiede che lo spazio di BANACH H sia riflessivo. Essa fa ricorso ad una argomentazione diversa (e più semplice) basata sulla proprietà di completezza e comunicata all'autore dal prof. RENATO FIORENZA. ■

12.2. Inverso del lemma di TARTAR

Mostriamo ora che il lemma di TARTAR può essere completato stabilendo che vale anche l'implicazione inversa. Le proposizioni di questa sezione sono dovute all'autore [54].

Iniziamo con lo stabilire una utile diseguaglianza che è una variante di quella dimostrata in [52].

Lemma 12.3. Diseguaglianza di proiezione. *Sia H uno spazio di* BANACH *e E ed F spazi lineari normati. Siano inoltre $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{H;E\}$ e $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\{H;F\}$ operatori lineari limitati tali che*

$$\begin{cases} i) \quad \| \mathbf{Au} \|_E \geq c_{\mathbf{A}} \| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} & \forall\, \mathbf{u} \in H\,, \\ ii) \quad \| \mathbf{Lu} \|_F \geq c_{\mathbf{L}} \| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}} & \forall\, \mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}\,. \end{cases}$$

Se inoltre il sottospazio $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ ammette un un supplementare topologico $\mathcal{S}$, detto $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$ il proiettore su $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ subordinato alla decomposizione $H = \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \dotplus \mathcal{S}$, risulta

$$a) \quad \| \mathbf{Au} \|_E + \| \mathbf{L\,u} \|_F \geq \alpha_{\mathbf{L}} \| \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}} \quad \forall\, \mathbf{u} \in H\,.$$

Dim. Se $a)$ fosse falsa si potrebbe trovare una successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset H$ tale che

$$\| \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}} = 1\,, \quad \| \mathbf{Au}_n \|_E \to 0\,, \quad \| \mathbf{Lu}_n \|_F \to 0\,.$$

Ora dalla $i)$ e dalla proposizione 12.1 segue che

$$\| \mathbf{Au}_n \|_E \to 0 \;\Rightarrow\; \| \mathbf{u}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n \|_H \to 0\,.$$

Inoltre risulta

$$\begin{cases} \| \mathbf{L} \| \, \| \mathbf{u}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n \|_H \geq \| \mathbf{L}(\mathbf{u}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n) \|_F\,, \\ \| \mathbf{LP}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n \|_F \leq \| \mathbf{L}(\mathbf{u}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n) \|_F + \| \mathbf{Lu}_n \|_F\,. \end{cases}$$

Dunque $\| \mathbf{LP}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n \|_F \to 0$ e per la $ii)$

$$\| \mathbf{LP}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n \|_F \geq \| \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}} \;\Rightarrow\; \| \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}} \to 0\,,$$

il che è assurdo in quanto $\| \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_n \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}} = 1$. □

Lemma 12.4. Una diseguaglianza astratta. *Sia* H *uno spazio di* BANACH *e* E, F *spazi lineari normati. Siano inoltre* $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{H; E\}$ *e* $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\{H; F\}$ *operatori lineari limitati tali che*

$$\begin{cases} i) \quad \| \mathbf{Au} \|_E \geq c_{\mathbf{A}} \| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} & \forall\, \mathbf{u} \in H\,, \\ ii) \quad \| \mathbf{Lu} \|_F \geq c_{\mathbf{L}} \| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}} & \forall\, \mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}\,, \\ iii) \quad \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} + \mathrm{Ker}\,\mathbf{L} \quad \text{chiuso in} \quad H\,. \end{cases}$$

Assumiamo inoltre che il sottospazio $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ *ammetta un un supplementare topologico* $\mathcal{S}$. *Allora risulta*

$$\| \mathbf{Au} \|_E + \| \mathbf{Lu} \|_F \geq \alpha_{\mathbf{L}} \| \mathbf{u} \|_{H/(\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathrm{Ker}\,\mathbf{L})}\,.$$

Dim. Sommando la $i)$ e la $a)$ della proposizione 12.3 si ottiene

$$\| \mathbf{Au} \|_E + \| \mathbf{L\,u} \|_F \geq \alpha_o \Big(\| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} + \| \mathbf{P_A u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}} \Big) \quad \forall\, \mathbf{u} \in H\,.$$

In virtù della proposizione 11.4 la $iii)$ implica che

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{P_A u} \|_H + k \| \mathbf{P_A u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}} \geq c \| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathrm{Ker}\,\mathbf{L}}\,, \quad \forall\, \mathbf{u} \in H\,.$$

Ricordando che $\| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \geq c \| \mathbf{u} - \mathbf{P}_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \|_H \quad \forall\, \mathbf{u} \in H$ si ottiene il risultato.
□

La prossima proposizione fornisce il risultato chiave che consente di pervenire al converso del lemma di TARTAR.

Proposizione 12.5. Lemma inverso. *Sia* H *uno spazio di* BANACH *ed* F, E *spazi lineari normati. Sia inoltre* $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{H; E\}$ *un operatore lineare limitato tale che*

$$\begin{cases} a) \quad \dim \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} < +\infty\,, \\ b) \quad \| \mathbf{Au} \|_E \geq c_{\mathbf{A}} \| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} & \forall\, \mathbf{u} \in H\,. \end{cases}$$

Allora per ogni $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\{H; F\}$ *risulta*

$$\| \mathbf{Au} \|_E + \| \mathbf{Lu} \|_F \geq \alpha_{\mathbf{L}} \| \mathbf{u} \|_{H/(\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathrm{Ker}\,\mathbf{L})} \quad \forall\, \mathbf{u} \in H\,.$$

Dim. Basta osservare che ogni sottospazio di dimensione finita ammette un un supplementare topologico in H e che la condizione $a)$ implica la validità delle $ii)$ e $iii)$ della proposizione 12.4 per ogni $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\{H;F\}$. $\square$

Osservazione 12.2. Si noti che se E è uno spazio di BANACH il teorema 11.16 assicura che

$$\|\mathbf{Au}\|_E \geq c\,\|\mathbf{u}\|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \quad \forall\,\mathbf{u} \in H \iff \mathrm{Im}\,\mathbf{A} \quad \text{chiuso in } \; E\,.$$

In uno spazio normato non completo vale invece solo l'implicazione da sinistra verso destra. $\blacksquare$

Possiamo ora concludere enunciando una proposizione che riassume i risultati presentati in questa sezione e consente di completare il lemma di TARTAR con l'asserzione inversa e con l'equivalenza ad una nuova proprietà.

Proposizione 12.6. Diseguaglianze astratte equivalenti. *Sia H uno spazio di* BANACH *riflessivo, E, F spazi lineari normati e $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{H;E\}$ un operatore lineare limitato.*
Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

$$\mathbb{P}_1) \quad \boxed{\begin{cases} \dim \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} < +\infty\,, \\ \|\mathbf{Au}\|_E \geq c_{\mathbf{A}}\,\|\mathbf{u}\|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \quad \forall\,\mathbf{u} \in H\,. \end{cases}}$$

$$\mathbb{P}_2) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Esiste un operatore compatto } \mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\{H;E_o\} \\ \text{tale che } \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}_o = \{\mathbf{o}\} \text{ e} \\ \|\mathbf{Au}\|_E + \|\mathbf{A}_o\mathbf{u}\|_{E_o} \geq \alpha\,\|\mathbf{u}\|_H \quad \forall\,\mathbf{u} \in H\,. \end{array}}$$

$$\mathbb{P}_3) \quad \boxed{\begin{array}{l} \dim \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} < +\infty\,, \\ \|\mathbf{Au}\|_E + \|\mathbf{Lu}\|_F \geq \alpha_{\mathbf{L}}\,\|\mathbf{u}\|_{H/(\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \cap \mathrm{Ker}\,\mathbf{L})} \quad \forall\,\mathbf{u} \in H\,, \\ \text{per ogni } \mathbf{L} \in \mathrm{L}\{H;F\}\,. \end{array}}$$

Dim. Osserviamo che

- l'operatore di proiezione su un sottospazio lineare di dimensione finita è compatto (proposizione 4.5).

Possiamo quindi assumere che $\mathbf{A}_o$ sia il proiettore $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$ sul sottospazio lineare di dimensione finita $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \subset H$ subordinato ad una decomposizione $H = \mathcal{A} \dot{+} \mathcal{S}$.

Si ha dunque che

- $\mathbb{P}_3 \Rightarrow \mathbb{P}_1$ ponendo $\mathbf{L} = \mathbf{O}$.
- $\mathbb{P}_1 \Rightarrow \mathbb{P}_3$ per la proposizione 12.5 (Lemma inverso).
- $\mathbb{P}_3 \Rightarrow \mathbb{P}_2$ ponendo $\mathbf{L} = \mathbf{P}_{\mathbf{A}}$.
- $\mathbb{P}_2 \Rightarrow \mathbb{P}_1$ per la proposizione 12.2 (Lemma di TARTAR).

Si noti che quest'ultima è l'unica implicazione che richiede la riflessività dello spazio di BANACH E. □

I risultati astratti presentati in questa sezione trovano applicazione nella dimostrazione delle fondamentali diseguaglianze che saranno illustrate nella sezione II.6. Essi consentono infatti di dedurre in modo diretto le diseguaglianze di POINCARÉ [41] e di KORN ed i risultati di approssimazione della sezione II.7.

12.3. Lemmi lineare e bilineare

I risultati che seguono sono una diretta conseguenza del lemma di TARTAR e trovano anch'essi applicazione in teoria dell'approssimazione. In particolare essi saranno richiamati nelle proposizioni II.7.4 e II.7.5 della sezione II.7.

Lemma 12.7. Lemma lineare. *Siano H, E, F spazi lineari normati e siano $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{H;E\}$ e $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\{H;F\}$ operatori lineari limitati tali che*

$$\begin{cases} i) \quad \| \mathbf{A}\mathbf{u} \|_E \geq c_{\mathbf{A}} \| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \quad \forall\, \mathbf{u} \in H , \\ ii) \quad \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathbf{L} , \end{cases}$$

allora risulta

$$\| \mathbf{L} \| \, \| \mathbf{A}\mathbf{u} \|_E \geq c_{\mathbf{A}} \| \mathbf{L}\mathbf{u} \|_F \quad \forall\, \mathbf{u} \in H .$$

---

[41] HENRI POINCARÉ (1854-1912) professore alla Sorbona, fisico e matematico dotato di grandissima intuizione, ha dato amplissimi contributi alla teoria del potenziale ed allo studio anche qualitativo delle equazioni differenziali.

Dim. Basta osservare che

$$\| \mathbf{L} \| \, \| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \geq \| \mathbf{L} \| \, \| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}} \geq \| \mathbf{Lu} \|_F \quad \forall \, \mathbf{u} \in H \, ,$$

in quanto per la $ii)$ risulta $\| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \geq \| \mathbf{u} \|_{H/\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}}$. □

Lemma 12.8. *Sia H uno spazio di* BANACH *riflessivo e E, E_o, F spazi lineari normati. Siano inoltre $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{H; E\}$, $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\{H; F\}$ e $\mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\{H; E_o\}$ operatori lineari limitati tali che*

$$\begin{cases} i) & \mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\{H; E_o\} \quad \text{è compatto} \, , \\ ii) & \| \mathbf{Au} \|_E + \| \mathbf{A}_o \mathbf{u} \|_{E_o} \geq \alpha \, \| \mathbf{u} \|_H \quad \forall \, \mathbf{u} \in H \, , \\ iii) & \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathbf{L} \, , \end{cases}$$

allora esiste una costante $c_{\mathbf{A}}$ tale che

$$\| \mathbf{L} \| \, \| \mathbf{Au} \|_E \geq c_{\mathbf{A}} \, \| \mathbf{Lu} \|_F \quad \forall \, \mathbf{u} \in H \, .$$

Dim. E′ una diretta conseguenza della proposizione 12.2 e del lemma 12.7. □

Ecco infine una semplice estensione del lemma 12.7 alle forme bilineari.

Lemma 12.9. Lemma bilineare. *Siano $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, E, F spazi lineari normati e sia $\mathbf{a} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$ una forma bilineare continua ed $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}'\}$, $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}; \mathcal{X}'\}$ operatori lineari duali ad essa associati tramite l'identità*

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \, \mathbf{Ax} \, , \, \mathbf{y} \, \rangle = \langle \, \mathbf{A}'\mathbf{y}' \, , \, \mathbf{x} \, \rangle \quad \forall \, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad \forall \, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \, .$$

Siano inoltre $\mathbf{E} \in \mathrm{L}\{\mathcal{X}; E\}$, $\mathbf{F} \in \mathrm{L}\{\mathcal{Y}; F\}$ due operatori lineari continui tali che

$$\begin{aligned} i) & \quad \| \mathbf{Ex} \|_E \geq c_{\mathbf{E}} \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{E}} \quad \forall \, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \, , \\ ii) & \quad \| \mathbf{Fy} \|_F \geq c_{\mathbf{F}} \, \| \mathbf{y} \|_{\mathcal{Y}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{F}} \quad \forall \, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \, , \\ iii) & \quad \mathrm{Ker}\,\mathbf{E} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \, , \\ iv) & \quad \mathrm{Ker}\,\mathbf{F} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}' \, , \end{aligned}$$

allora risulta

$$\| \mathbf{a} \| \, \| \mathbf{Ex} \|_E \, \| \mathbf{Fy} \|_F \geq c_{\mathbf{E}} \, c_{\mathbf{F}} \, | \, \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, | \quad \forall \, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad \forall \, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \, .$$

Dim. Osserviamo che in virtù della $iii)$ risulta

$$\| \mathbf{Ax} \|_{\mathcal{Y}'} \le \| \mathbf{A} \| \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \le \| \mathbf{A} \| \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{E}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,,$$

per cui dalla $i)$ si evince che

$$c_{\mathbf{E}} \| \mathbf{Ax} \|_{\mathcal{Y}'} \le \| \mathbf{A} \| \, \| \mathbf{Ex} \|_{E} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \,,$$

che sostituita nella diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ

$$| \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | = | \langle \mathbf{Ax} \,, \mathbf{y} \rangle | \le \| \mathbf{Ax} \|_{\mathcal{Y}'} \| \mathbf{y} \|_{\mathcal{Y}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \,,$$

fornisce

$$| \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \le c_{\mathbf{E}}^{-1} \| \mathbf{A} \| \, \| \mathbf{Ex} \|_{E} \| \mathbf{y} \|_{\mathcal{Y}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}'} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \,.$$

Per la $iv)$ segue quindi che

$$| \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \le c_{\mathbf{E}}^{-1} \| \mathbf{A} \| \, \| \mathbf{Ex} \|_{E} \| \mathbf{y} \|_{\mathcal{Y}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{F}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \,,$$

e dalla $ii)$ che

$$| \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \le c_{\mathbf{E}}^{-1} c_{\mathbf{F}}^{-1} \| \mathbf{A} \| \, \| \mathbf{Ex} \|_{E} \| \mathbf{Fx} \|_{F} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \,.$$

Per concludere basta notare che $\| \mathbf{a} \| = \| \mathbf{A} \| = \| \mathbf{A}' \|$. Infatti

$$\| \mathbf{a} \| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \frac{| \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |}{\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \| \mathbf{y} \|_{\mathcal{Y}}} = \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \left[\frac{1}{\| \mathbf{y} \|_{\mathcal{Y}}} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{| \langle \mathbf{Ax} \,, \mathbf{y} \rangle |}{\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}}} \right] =$$

$$= \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \left[\frac{1}{\| \mathbf{y} \|_{\mathcal{Y}}} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{| \langle \mathbf{A}'\mathbf{y} \,, \mathbf{x} \rangle |}{\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}}} \right] = \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \frac{\| \mathbf{A}'\mathbf{y} \|}{\| \mathbf{y} \|_{\mathcal{Y}}} = \| \mathbf{A}' \| \,.$$

Analogamente si mostra che $\| \mathbf{a} \| = \| \mathbf{A} \|$. $\square$

II – SPAZI FUNZIONALI

1. MISURA E INTEGRAZIONE

Una chiara esposizione dei concetti e dei risultati più importanti della teoria della misura e dell'integrazione è fornita in [45].

La nozione di integrale dipende da quella di misura.

La definizione di **misura** richiede di precisare l'insieme degli oggetti su cui essa è definita e le proprietà caratteristiche.

A tal fine consideriamo un insieme Ω ed una famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di Ω. Se valgono le proprietà

$$\begin{cases} \Omega \in \mathcal{M}\,, \\ \mathcal{P} \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}^{\mathcal{C}} = \Omega \setminus \mathcal{P} \in \mathcal{M} \\ \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \in \mathcal{M}\,, \end{cases}$$

la famiglia $\mathcal{M}$ è detta un'**algebra** di sottoinsiemi.

La famiglia $\mathcal{M}$ è detta poi una σ**-algebra** di sottoinsiemi se valgono le proprietà

$$\begin{cases} \Omega \in \mathcal{M}\,, \\ \mathcal{P} \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}^{\mathcal{C}} = \Omega \setminus \mathcal{P} \in \mathcal{M} \\ \mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{M}\,, \quad \alpha = 1, 2, \ldots \;\Rightarrow\; \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{M}\,. \end{cases}$$

L'ultima proprietà è detta di σ**-additività**.

Poichè

$$\bigcap_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{P}_\alpha = \left[\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{C}} \right]^{\mathcal{C}} ,$$

una σ-algebra $\mathcal{M}$ è chiusa anche rispetto all'intersezione numerabile (o finita).

- La coppia $\{\Omega, \mathcal{M}\}$ è detta uno **spazio misurabile**.

- I sottoinsiemi di Ω che appartengono ad $\mathcal{M}$ sono detti **misurabili**.
- Una funzione $\mu : \Omega \to [0, \infty]$ è detta una **misura** se è numerabilmente additiva (σ**-additiva**) sullo spazio misurabile $\{\Omega, \mathcal{M}\}$ e cioè se per ogni successione $\{\mathcal{P}_\alpha\}$ di insiemi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti si ha

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{P}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mu(\mathcal{P}_\alpha)\,.$$

- La terna $\{\Omega, \mathcal{M}, \mu\}$ è detta uno **spazio mensurale**.

> • Lo spazio mensurale $\{\Omega, \mathcal{M}, \mu\}$ è detto σ**-finito** se Ω è esprimibile come una unione numerabile di elementi $\mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{M}$ tali che $\mu(\mathcal{P}_\alpha) < \infty$ per $\alpha = 1, 2, \ldots$.

Gli insiemi $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ per cui risulta $\mu(\mathcal{P}) = 0$ sono detti **insiemi di misura nulla** o **insiemi trascurabili**.

Se una proprietà vale ovunque in Ω fatta eccezione per un insieme di misura nulla si dice che essa vale **quasi ovunque** (q.o.) in Ω.

In uno spazio mensurale $\{\Omega, \mathcal{M}, \mu\}$ vale la seguente proprietà.

- Se $\{\mathcal{P}_n\}$ è una successione crescente (decrescente) di elementi di $\mathcal{M}$ risulta

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(\mathcal{P}_n)\,, \quad \left(\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(\mathcal{P}_n)\right)\,.$$

Sia $\{\Omega, \mathcal{M}\}$ uno spazio misurabile e sia $f : \Omega \to \{-\infty, +\infty\}$ una funzione definita su Ω.

- La funzione f è detta **misurabile** se, per ogni $a \in \Re$, è misurabile il suo insieme di livello a, cioè

$$\{\mathbf{x} \in \Omega \,:\, f(\mathbf{x}) > a\}\,.$$

Tale condizione equivale a richiedere che sia misurabile uno degli insiemi

$$\{\mathbf{x} \in \Omega \,:\, f(\mathbf{x}) \geq a\}\,, \quad \{\mathbf{x} \in \Omega \,:\, f(\mathbf{x}) \leq a\}\,, \quad \{\mathbf{x} \in \Omega \,:\, f(\mathbf{x}) < a\}\,.$$

Le funzioni **misurabili** godono delle seguenti proprietà.

- f misurabile $\Rightarrow -f\,,\ |\,f\,|$ misurabili.
- Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili, sono misurabili anche le funzioni

$$f_1(\mathbf{x}) := \inf_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})\,, \quad f_3(\mathbf{x}) := \liminf_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})\,,$$
$$f_2(\mathbf{x}) := \sup_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})\,, \quad f_4(\mathbf{x}) := \limsup_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})\,.$$

- $f\,,\ g$ misurabili $\Rightarrow$ $\max\{f,g\}\,,\ \min\{f,g\}\,,\ f+g\,,\ f\,g$ misurabili. In particolare se f è misurabilile, sono misurabili le sue parti, positiva e negativa

$$f^+ = \max\{f,0\}\,, \quad f^- = -\min\{f,0\}\,.$$

Equivalentemente può dirsi che una funzione f è **misurabile** se

$$\mathcal{O} \in \Re \ \text{aperto} \quad \Rightarrow \ f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{M}\,.$$

Introduciamo ora la definizione di integrale.

Per ogni sottoinsieme $\mathcal{P} \subseteq \Omega$ la funzione

$$\chi_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \chi(\mathcal{P}\,;\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathcal{P}\,, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{P}\,, \end{cases}$$

è detta la **funzione caratteristica** dell'insieme $\mathcal{P}$.

Una funzione $s : \Omega \mapsto \Re$ è detta una **funzione semplice** se assume

- valore costante e finito su ciascun insieme di una famiglia finita $\{\mathcal{P}_i\,,\ i = 1,\ldots,n\}$ di sottoinsiemi di Ω μ-misurabili disgiunti,
- valore nullo su $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}_\alpha$.

Ogni funzione semplice è una combinazione lineare di funzioni caratteristiche:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i\, \chi(\mathcal{P}_i\,;\mathbf{x})\,, \quad i \neq j \ \Rightarrow \ c_i \neq c_j\,,$$

dove $\mathcal{P}_i = \{\mathbf{x} \in \Omega \ : \ s(\mathbf{x}) = c_i\}$.

Se una funzione semplice s definita in Ω è misurabile e $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ poniamo

$$\mathbf{I}_{\mathcal{P}}(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_i) \,,$$

escludendo dalla sommatoria i termini con $c_i = 0$.

In corrispondenza di ogni funzione $f : \Omega \mapsto \Re$ esiste una successione s_n di funzioni semplici tali che

$$\lim_{n \to \infty} s_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \, \mathbf{x} \in \Omega \,.$$

Se f è misurabile anche le s_n possono essere scelte misurabili. Infatti per $f \geq 0$ possiamo porre

$$s_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n\,2^n} \frac{i-1}{2^n} \, \chi(\mathcal{A}_{ni}\,; \mathbf{x}) + n \, \chi(\mathcal{B}_n\,; \mathbf{x}) \,,$$

dove

$$\mathcal{A}_{ni} = \Big\{ \mathbf{x} \in \Omega \ : \ \frac{i-1}{2^n} \leq f(\mathbf{x}) \leq \frac{i}{2^n} \Big\} \,, \quad \mathcal{B}_n = \Big\{ \mathbf{x} \in \Omega \ : \ f(\mathbf{x}) \geq n \Big\} \,.$$

Se la funzione f è limitata, la convergenza di s_n ad f è uniforme.

Per ogni funzione definita in Ω non negativa e misurabile f definiamo

- l'**integrale** di f rispetto alla misura μ esteso all'insieme $\mathcal{P}$:

$$\int_{\mathcal{P}} f(\mathbf{x}) \; \mathrm{d}\mu = \sup_{s} \Big\{ \mathbf{I}_{\mathcal{P}}(s) \mid 0 \leq s(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \, \mathbf{x} \in \mathcal{P} \Big\} \,.$$

Nel seguito useremo anche i simboli semplificati

$$\int_{\mathcal{P}} f(\mathbf{x}) \,, \qquad \int_{\mathcal{P}} f \,,$$

per denotare l'integrale.

Se f è una funzione misurabile in Ω si pone $f = f^+ - f^-$ e si considerano gli integrali

$$\int_{\mathcal{P}} f^+ \; \mathrm{d}\mu \,, \quad \int_{\mathcal{P}} f^- \; \mathrm{d}\mu \,.$$

Se almeno uno di essi è finito, l'**integrale** di f è definito mediante la somma

$$\int_{\mathcal{P}} f \, d\mu \, := \int_{\mathcal{P}} f^+ \, d\mu - \int_{\mathcal{P}} f^- \, d\mu \, .$$

- La funzione f definita q.o. su Ω è detta μ**-integrabile** o μ**-sommabile** su Ω se entrambi gli integrali a secondo membro sono finiti.

E' fondamentale il seguente teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Proposizione 1.1. Teorema della convergenza monotona, di BEPPO LEVI. *Sia* $\{f_n\}$ *una successione crescente di funzioni non negative e misurabili in* $\{\Omega, \mathcal{M}, \mu\}$. *Risulta*

$$\int_{\mathcal{P}} f(\mathbf{x}) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{P}} f_n(\mathbf{x}) \, d\mu \, , \quad \forall \mathcal{P} \in \mathcal{M} \, ,$$

dove $f(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})$ *per* $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. □

Il teorema della convergenza monotona consente di dimostrare l'additività dell'integrale e precisamente che (vedi [45], teorema 12)

- Se $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ con $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ allora $f = f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ e risulta

$$\int_{\mathcal{P}} f \, d\mu = \int_{\mathcal{P}} f_1 \, d\mu + \int_{\mathcal{P}} f_2 \, d\mu \, .$$

Si ha dunque che

- Le funzioni μ-**integrabili** su Ω formano uno spazio lineare $\mathcal{L}^1(\Omega)$ e l'integrale è una funzione lineare su tale spazio. La funzione

$$\| f \|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} := \int_{\Omega} | f | \, \mathrm{d}\mu \,,$$

definisce una norma in $\mathcal{L}^1(\Omega)$.

Le principali proprietà delle funzioni integrabili sono le seguenti.

Sia $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$, allora:

- Se f è μ-misurabile e limitata su $\mathcal{P}$ e $\mu(\mathcal{P}) < \infty$ allora $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$.
- Se f è μ-misurabile su $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ e $| f | \le g \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ allora $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$.
- Se f è μ-misurabile e $\mu(\mathcal{P}) = 0$ allora $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ e risulta

$$\int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu = 0 \,.$$

- Se $\mu(\mathcal{P}) < \infty$ e se $a \le f(\mathbf{x}) \le b \quad \forall \, \mathbf{x} \in \mathcal{P}$ allora $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ e risulta

$$a \, \mu(\mathcal{P}) \le \int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu \le b \, \mu(\mathcal{P}) \,.$$

- Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ e $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ allora $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$.
- Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ e $\alpha \in \Re$ allora $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ e risulta

$$\int_{\mathcal{P}} \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu .$$

- Se $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ con $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}$ si ha

$$\int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu \le \int_{\mathcal{P}} g \, \mathrm{d}\mu .$$

- Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ con $f(\mathbf{x}) \ge 0$ q.o. su $\mathcal{P}$ si ha

$$\int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu \ge 0 , \quad \text{con} \int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu = 0 \iff f = 0 \quad \text{q.o. su} \quad \mathcal{P} .$$

- Se $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ allora

$$\int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu = 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathcal{M} \Rightarrow f = 0 \quad \text{q.o. su} \quad \Omega .$$

- Sia f una funzione non negativa e μ-misurabile su Ω. La funzione

$$\nu(\mathcal{P}) := \int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu \,, \quad \mathcal{P} \in \mathcal{M} \,,$$

  risulta σ-additiva, e cioè per ogni successione $\{\mathcal{P}_\alpha\}$ di insiemi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti si ha

$$\nu \left(\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{P}_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \nu(\mathcal{P}_\alpha) \,.$$

  La funzione ν è dunque una **misura** su $\{\Omega, \mathcal{M}\}$.
- Se $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ allora $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e risulta

$$\left| \int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Dal teorema di Beppo Levi si deducono i seguenti fondamentali risultati.

Proposizione 1.2. Lemma di Fatou. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili in $\{\Omega, \mathcal{M}, \mu\}$. Allora risulta*

$$\int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{P}} f_n \, \mathrm{d}\mu \,, \quad \forall \mathcal{P} \in \mathcal{M} \,,$$

dove $f(\mathbf{x}) = \liminf_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})$ per $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. □

Proposizione 1.3. Teorema della convergenza dominata di Lebesgue. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili in $\{\Omega, \mathcal{M}, \mu\}$ Se esiste una funzione $g \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ tale che*

$$|f_n(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P} \,,$$

allora risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{P}} f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu \,,$$

dove $f(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})$ per $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. □

Siano μ e ν due misure sullo spazio misurabile $\{\Omega, \mathcal{M}\}$. Diremo che ν è **assolutamente continua** rispetto a μ se

$$\mathcal{P} \in \mathcal{M} \ : \ \mu(\mathcal{P}) = 0 \ \Rightarrow \ \nu(\mathcal{P}) = 0 \, .$$

Abbiamo visto che, se f è una funzione non negativa e μ-misurabile su Ω, allora la funzione

$$\nu(\mathcal{P}) \ := \int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu \, , \quad \mathcal{P} \in \mathcal{M} \, ,$$

è una **misura** su $\{\Omega, \mathcal{M}\}$.

E′ chiaro che ν è assolutamente continua rispetto a μ.

Sulla base dei teoremi di Beppo Levi sulla convergenza monotona e di Lebesgue sulla convergenza dominata è possibile dimostrare che ogni misura assolutamente continua è di tale tipo. Precisamente si ha (vedi p.e. [45] sez. 7).

Proposizione 1.4. Teorema di Radon-Nikodym. *Sia $\{\Omega, \mathcal{M}, \mu\}$ uno spazio mensurale σ-**finito** e sia ν una misura finita assolutamente continua rispetto a μ. Allora esiste una una funzione non negativa $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ tale che*

$$\nu(\mathcal{P}) \ := \int_{\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu \, ,$$

per ogni $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$. □

Se $\{\Omega, \mathcal{M}, \mu\}$ e $\{\Omega', \mathcal{M}', \mu'\}$ sono due spazi mensurali σ-finiti è possibile definire lo spazio mensurale prodotto $\{\Omega \times \Omega', \mathcal{M} \times \mathcal{M}', \mu \times \mu'\}$ che risulta anch'esso σ-finito.

Vale allora il seguente risultato che compendia quelli dovuti a Fubini [42] ed a Tonelli [43] (vedi p.e. [29] cap.0.3 e [45] sez. 6).

Proposizione 1.5. Teorema di Fubini-Tonelli. *Una funzione f misurabile su $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ risulta integrabile su $\Omega \times \Omega'$ se e solo se è finito almeno uno degli integrali doppi*

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}\mu \int_{\Omega'} f \, \mathrm{d}\mu' \, , \qquad \int_{\Omega'} \mathrm{d}\mu' \int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

[42] Guido Fubini (1876-1943).

[43] Leonida Tonelli (1885-1946).

In tal caso vale la formula

$$\int_{\Omega\times\Omega'} f \, \mathrm{d}(\mu \times \mu') = \int_{\Omega} \mathrm{d}\mu \int_{\Omega'} f \, \mathrm{d}\mu' = \int_{\Omega'} \mathrm{d}\mu' \int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu \,,$$

per l'integrale doppio di f *su* $\Omega \times \Omega'$. □

1.1. Misura ed integrale di Lebesgue

Detto $P(\Re^n)$ l'insieme delle parti di $\Re^n$, la **misura esterna** di un insieme di $\Re^n$ è la funzione $\mu^* : P(\Re^n) \to [\,0, \infty\,]$ definita da

$$\mu^*(\mathcal{P}) := \inf \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathrm{mis}\,(I_\alpha) \; : \; \mathcal{P} \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} I_\alpha \right\},$$

dove I_α è un intervallo di $\Re^n$ e $\mathrm{mis}\,(I_\alpha)$ è la sua misura.

Un insieme $\mathcal{P}$ di $\Re^n$ si dice **misurabile secondo** Lebesgue [44] se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un chiuso F ed un aperto G tali che

$$F \subseteq \mathcal{P} \subseteq G \,, \qquad \mu^*(G \setminus F) < \varepsilon \,.$$

Si dimostra che la famiglia $\mathcal{M}$ dei sottoinsiemi di $\Re^n$ misurabili secondo Lebesgue è una σ-algebra e che la restrizione della misura esterna μ^* a $\mathcal{M}$ è una misura.

Pertanto $\{\Re^n, \mathcal{M}, \mu\}$ è uno **spazio mensurale** e la misura μ è detta **misura di** Lebesgue su $\Re^n$. L'integrabilità di una funzione ed il relativo **integrale secondo** Lebesgue sono quindi definiti come nel caso generale.

Nel seguito quando la misura non è esplicitamente indicata nel simbolo di integrale si sottintende che essa è la misura di Lebesgue su $\Re^n$.

- Una funzione $f : \Omega \mapsto \Re$ è detta **localmente integrabile** in Ω, e si scrive $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, se la restrizione $f_{|\mathcal{K}}$ appartiene a $\mathcal{L}^1(\mathcal{K})$ per ogni compatto $\mathcal{K}$ contenuto in Ω.

[44] Henri Lebesgue (1875-1941) allievo di Borel e professore al Collège de France.

Il seguente risultato è interessante di per se e riveste un ruolo importante nella teoria delle distribuzioni.

Lemma 1.6. Unicità. *Sia* $\Omega \subseteq \Re^n$ *un aperto e sia* $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. *Allora*

$$\int_\Omega f\,\varphi \ \mathrm{d}\mu = 0 \quad \forall\,\varphi \in C_o^\infty(\Omega) \ \Rightarrow \ f = 0 \ \text{ q.o. in } \Omega\,.$$

Dim. Vedi [41] corol. IV.24. □

2. SPAZI $\mathcal{L}^p(\Omega)$

Sia $\{\Omega, \mathcal{M}, \mu\}$ uno spazio mensurale con $\Omega \subseteq \Re^d$ aperto e sia $p \in \Re$ tale che $1 \le p < \infty$. Definiamo quindi lo spazio

$$\mathcal{L}^p(\Omega) \ := \big\{ f : \Omega \mapsto \Re \ : \ f \ \mu\text{-misurabile e } |\, f\,|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega) \big\}\,.$$

Nello spazio $\mathcal{L}^p(\Omega)$ si definisce una norma, assumendo di identificare due funzioni che coincidono q.o. in Ω e ponendo

$$\|\, f \,\|_p \ := \left[\ \int_\Omega |\, f(\mathbf{x})\,|^p \ \mathrm{d}\mu \right]^{1/p}.$$

Vale infatti la diseguaglianza triangolare

$$\|\, f + g \,\|_p \le \|\, f \,\|_p + \|\, g \,\|_p\,, \quad \forall\, 1 \le p < \infty$$

che è detta **diseguaglianza di** MINKOWSKI.

Tale diseguaglianza è conseguenza del seguente risultato di HÖLDER [45].

[45] LUDWIG OTTO HÖLDER (1859-1937) professore all'Università di Lipsia.

- **diseguaglianza di** HÖLDER : per ogni $1 < p < \infty$ si ha

$$\int_\Omega |\, fg\,| \;\; d\mu \leq \|\, f\,\|_p \,\|\, g\,\|_{p'} \qquad \forall\, f \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,, \quad \forall\, g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)\,,$$

dove p' è l'**esponente coniugato** di p, cioè tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,.$$

Per la dimostrazione vedi p.e. [29] sezione.1.3 o [41], sezione IV.2. o [33] cap. II.

Definamo l'**estremo superiore** (inferiore) **essenziale** di f in Ω.

$$\text{sup ess}\,(f) \; := \; \inf\big\{C \; : \; f(\mathbf{x}) \leq C \quad \text{q.o. in } \Omega\big\}\,, \quad \text{inf ess} \; := -\,\text{sup ess}\,(-f)\,.$$

- Lo spazio $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ è costituito dalle funzioni **essenzialmente limitate**:

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) \; := \big\{f : \Omega \mapsto \Re \; : \; f \quad \text{misurabile con} \quad \text{sup ess}\,(f) < \infty\big\}\,.$$

Nello spazio $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ si definisce una norma ponendo

$$\|\, f\,\|_\infty \; := \text{sup ess}\,(f)\,.$$

Vale infatti la diseguaglianza ([41], sezione IV.2)

$$|\, f(\mathbf{x})\,| \leq \|\; f\,\|_\infty \quad \text{q.o. in } \Omega\,.$$

La notazione $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ è giustificata dal fatto che, se $\mu(\Omega) < \infty$, risulta

$$\lim_{p\to\infty} \|\, f\,\|_p = \|\, f\,\|_\infty\,.$$

Sussistono i seguenti fondamentali risultati dovuti a FISHER [46] e RIESZ. (vedi [41], teor. IV.8 e corol. IV.23).

Proposizione 2.1. Teorema di FISHER-RIESZ**.** *Lo spazio $\mathcal{L}^p(\Omega)$ è uno spazio di* BANACH *per $1 \leq p \leq \infty$.* □

[46] ERNST FISHER (1875-1959) professore all'Università di Colonia.

Proposizione 2.2. Densità. *Lo spazio* $C_o^\infty(\Omega)$ *è denso in* $\mathcal{L}^p(\Omega)$ *per* $1 \le p < \infty$.
□

2.1. Spazio duale di $\mathcal{L}^p(\Omega)$

Per $1 < p < \infty$ gli spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)'$ e $\mathcal{L}^{p'}(\Omega)$ sono legati da un isomorfismo isometrico. Si ha infatti che (vedi p.e. [41], teor IV.11)

Proposizione 2.3. Teorema di rappresentazione di RIESZ. *Sia* $1 < p < \infty$ *e* $\phi \in \mathcal{L}^p(\Omega)'$. *Esiste allora un unico* $u \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$ *tale che*

$$\langle\, \phi \,,\, f \,\rangle = \int_\Omega u\, f \;\, d\mu \quad \forall\, f \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,,$$

e risulta $\|\, u \,\|_{p'} = |||\, \phi \,|||_p$ *dove* $|||\, \cdot \,|||_p$ *è la norma in* $\mathcal{L}^p(\Omega)'$. □

Se $p = 1$ esiste un un isomorfismo isometrico tra gli spazi $\mathcal{L}^1(\Omega)'$ e $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Sussiste infatti un risultato analogo al precedente (vedi p.e. [41], teor IV.14)

Proposizione 2.4. Teorema di rappresentazione di RIESZ. *Sia* $\phi \in \mathcal{L}^1(\Omega)'$. *Esiste allora un unico* $u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ *tale che*

$$\langle\, \phi \,,\, f \,\rangle = \int_\Omega u\, f \;\, d\mu \quad \forall\, f \in \mathcal{L}^1(\Omega)\,,$$

e risulta $\|\, u \,\|_\infty = |||\, \phi \,|||_1$ *dove* $|||\, \cdot \,|||_1$ *è la norma in* $\mathcal{L}^1(\Omega)'$. □

Si riassumono qui di seguito le principali proprietà ([41], sezione IV.3.).

spazio	duale	riflessivo	separabile
$\mathcal{L}^p\,,\ 1 < p < \infty$	$\mathcal{L}^{p'}$	si	si
$\mathcal{L}^1$	$\mathcal{L}^\infty$	no	si
$\mathcal{L}^\infty$	$\supsetneq \mathcal{L}^1$	no	no

Particolare rilevanza nelle applicazioni ha lo spazio $\mathcal{L}^2(\Omega)$ delle funzioni di quadrato integrabile.

Lo spazio $\mathcal{L}^2(\Omega)$ è di HILBERT per il prodotto scalare

$$\boxed{\langle\, f\,,\, g\,\rangle = \int_\Omega f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mu \quad \forall\, f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)\,.}$$

3. DISTRIBUZIONI

Il concetto di funzioni generalizzate, introdotto da S. L. SOBOLEV [47] [6] nel 1938, è stato sistematicamente sviluppato da L. SCHWARTZ [48] [10] negli anni 1948-50. Una trattazione generale è fornita nel testo di Analisi funzionale di K. YOSIDA [29].

L'esigenza di introdurre le **funzioni generalizzate** o **distribuzioni** nasce dal fatto che la modellazione matematica porta ad analizzare funzioni e campi che, essendo discontinui, non sono derivabili nel senso classico.

Le distribuzioni godono, come vedremo, della magica proprietà di essere indefinitamente derivabili. Esse consentono una trattazione matematica unitaria dei problemi con discontinuità.

---

[47] SERGEI LVOVICH SOBOLEV (1908-1989) matematico russo allievo di SMIRNOV e membro dell'Accademia Sovietica delle Scienze.

[48] LAURENT SCHWARTZ (1915-) professore di matematica all'École Polythecnique.

3.1. Notazione multi-indiciale

Sia Ω un dominio di uno spazio euclideo di dimensione d. Un multi-indice p è una lista $p = \{p_1, \dots, p_d\}$ di ordine d le cui componenti sono numeri interi. Adotteremo l'usuale notazione abbreviata

$$|\,p\,| := \sum_{i=1}^{d} p_i \quad , \quad D^p := \frac{\partial^{|\,p\,|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_d^{p_d}} \,.$$

Ad esempio, nel caso di un dominio bidimensionale, si ha che $d = 2$ e ponendo rispettivamente $p = \{2, 0\}$, $p = \{1, 1\}$, $p = \{0, 2\}$ risulta $|\,p\,| = p_1 + p_2 = 2$, e si ottengono gli operatori alle derivate parziali del secondo ordine

$$D^{\{2,0\}} := \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} \,, \quad D^{\{1,1\}} := \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2} \,, \quad D^{\{0,2\}} := \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} \,.$$

Si consideri ora un campo vettoriale $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^m(\overline{\Omega})^n$ di dimensione n con componenti $\{v^\alpha \,;\, \alpha = 1, \dots, n\}$ sul dominio d-dimensionale Ω.

Definiamo quindi il multi-indice vettoriale di dimensione n

$$\mathbf{p} = \{p^\alpha \,;\, \alpha = 1, \dots, n\} \quad \text{dove} \quad p^\alpha = \{p_1^\alpha, \dots, p_d^\alpha\}.$$

Le relazioni $|\,\mathbf{p}\,| = m$ e $|\,\mathbf{p}\,| \le m$ vanno allora intese per componenti

$$|\,\mathbf{p}\,| = m \iff |\,p^\alpha\,| = m \,, \quad \{\alpha = 1, \dots, n\} \,,$$

$$|\,\mathbf{p}\,| \le m \iff |\,p^\alpha\,| \le m \,, \quad \{\alpha = 1, \dots, n\} \,.$$

Definiamo infine nello spazio $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})^n$

- la seminorma

$$|\,\mathbf{u}\,|_m^2 := \sum_{|\,\mathbf{p}\,| = m} \int_\Omega |\, D^{\mathbf{p}} \mathbf{u}(\mathbf{x})\,|^2$$

- e la norma

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_m^2 := \sum_{|\,\mathbf{p}\,| \le m} \int_\Omega |\, D^{\mathbf{p}} \mathbf{u}(\mathbf{x})\,|^2 = \sum_{k=0}^{m} |\,\mathbf{u}\,|_k^2$$

  dove

$$|\, D^{\mathbf{p}} \mathbf{u}(\mathbf{x})\,|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} |\, D^{p^\alpha} u^\alpha(\mathbf{x})\,|^2 \,.$$

3.2. Funzioni generalizzate

La definizione di funzione generalizzata, o distribuzione, viene effettuata considerando i campi scalari $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$ indefinitamente derivabili in $\overline{\Omega}$, ciascuno dei quali è nullo al di fuori di un compatto $\overline{\mathcal{P}}_\phi$ contenuto in Ω.

I campi $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$ sono detti a **supporto compatto** nell'aperto Ω.

Il **supporto** di una funzione $f : \Omega \mapsto \Re$ è per definizione

- la chiusura dell'insieme $\{\mathbf{x} \in \Omega \ : \ f(\mathbf{x}) \neq 0\}$, ovvero
- il complemento del più grande aperto su cui f si annulla.

Per dare la definizione di distribuzione è necessario dotare lo spazio $C_o^\infty(\Omega)$ di una topologia e cioè di una nozione di convergenza.

Si denota con $\mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni di $C_o^\infty(\Omega)$ con supporto contenuto nel compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$.

La nozione di convergenza in $\mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ è definita come convergenza delle funzioni e di tutte le loro derivate in senso uniforme in $\mathcal{K}$.

Si dice quindi che una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni di $\mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ tende ad una funzione $\varphi \in \mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \iff \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{K}} |\, D^p\varphi_n(\mathbf{x}) - D^p\varphi(\mathbf{x})\,| \to 0 \quad \forall\,|\,p\,| < \infty.$$

Si denota inoltre con $\mathbb{D}(\Omega)$ lo spazio $C_o^\infty(\Omega)$ dotato della seguente definizione di convergenza.

- Si dice che una successione $\{\varphi_h\}$ di funzioni di $\mathbb{D}(\Omega)$ tende a zero

$$\lim_{h\to\infty} \varphi_h = 0$$

se accade che

- il supporto delle funzioni $\{\varphi_h\}$ è definitivamente contenuto in un compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$,
- per ogni operatore differenziale D^p, la successione $\{\varphi_h\}$ converge a zero uniformemente in $\mathcal{K}$.

Si può quindi dare la definizione di distribuzione.

- Una **distribuzione** in Ω è un funzionale lineare $\mathbb{T}$ continuo sui campi, scalari, vettoriali o tensoriali di $\mathbb{D}(\Omega)$.

La condizione di continuità di una distribuzione su $\mathbb{D}(\Omega)$ consiste nel richiedere che

- per ogni compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$ esiste una costante c ed un intero k tali che

$$\boxed{|\langle \mathbb{T}, \varphi \rangle| \le c \sup_{|p| \le k, \mathbf{x} \in \mathcal{K}} |D^p \varphi(\mathbf{x})| \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega).}$$

- L'insieme delle distribuzioni in Ω forma uno spazio vettoriale $\mathbb{D}'(\Omega)$.

Se $f \in \mathbb{D}(\Omega)$ e $\mathbb{T} \in \mathbb{D}'(\Omega)$ il **prodotto** $f\,\mathbb{T}$ è la distribuzione definita da

$$\boxed{\langle f\,\mathbb{T}, \phi \rangle := \langle \mathbb{T}, f\phi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).}$$

La convergenza di una successione di distribuzioni $\mathbb{T}_n \in \mathbb{D}'(\Omega)$ significa che

$$\mathbb{T}_n \to \mathbb{T} \quad \text{in} \quad \mathbb{D}'(\Omega) \iff \langle \mathbb{T}_n, \varphi \rangle \to \langle \mathbb{T}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Si dimostra infatti che, se il limite di $\langle \mathbb{T}_n, \varphi \rangle$ esiste ed è finito per ogni $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$, tale limite è lineare e continuo in $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$ e pertanto è una distribuzione.

E' facile verificare che la convergenza di una successione in $\mathcal{L}^2(\Omega)$, in senso forte o debole, implica quella nel senso delle distribuzioni. Si ha infatti che

Proposizione 3.1. Convergenza distribuzionale. *La convergenza di una successione in $\mathcal{L}^2(\Omega)$, in senso forte o debole, implica quella nel senso delle distribuzioni.*

Dim. Sia $f_n \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ una successione debolmente convergente ad un elemento $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ e cioè tale che

$$\langle f_n, \mathbf{v} \rangle \to \langle f, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Ponendo $\mathbf{v} = \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$ si ha allora

$$\langle \mathbb{T}_{f_n} , \varphi \rangle \to \langle \mathbb{T}_f , \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega) ,$$

che è la convergenza nel senso delle distribuzioni. La convergenza forte in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ implica quella debole in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ e quindi quella nel senso delle distribuzioni. □

Si ricordi che un campo scalare f su Ω è **localmente integrabile**, e si scrive $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$, se per ogni compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$ risulta

$$\int_{\mathcal{K}} | f(\mathbf{x}) | < \infty .$$

Ad ogni campo f localmente integrabile su Ω si associa una distribuzione $\mathbb{T}_f$ definita da

$$\boxed{\langle \mathbb{T}_f , \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, \varphi(\mathbf{x}) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega) .}$$

La continuità di $\mathbb{T}_f : \mathbb{D}(\Omega) \mapsto \Re$ è conseguenza della diseguaglianza

$$\begin{aligned} | \langle \mathbb{T}_f , \varphi \rangle | = \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, \varphi(\mathbf{x}) \right| \le \int_{\Omega} | f(\mathbf{x}) | \, | \varphi(\mathbf{x}) | \le \\ \le \int_{\mathcal{K}} | f(\mathbf{x}) | \left(\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}} | \varphi(\mathbf{x}) | \right) \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega). \end{aligned}$$

- E' usuale identificare il campo f e la distribuzione $\mathbb{T}_f$.

Ciò è lecito in quanto per un campo $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ vale l'implicazione

$$\boxed{\mathbb{T}_f = 0 \; \Rightarrow \; f = 0 \;\; \text{q.o. in } \Omega .}$$

Per la dimostrazione di tale risultato si rinvia a [29] sezione I.8 o [41] corol. IV.24 (vedi anche il risultato qui enunciato alla fine della sezione 1.1).

3.3. Derivate generalizzate

Si vuole ora dare la definizione di derivata di una distribuzione. Tale definizione è quella che ha motivato l'introduzione stessa del concetto di distribuzione.

Si consideri dapprima una distribuzione $\mathbb{T}_f$ associata ad un campo scalare f localmente integrabile su Ω.

L'idea è quella di far ricorso alla formula di integrazioni per parti per spostare l'operazione di derivazione dal campo scalare f sui campi scalari $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ che sono indefinitamente derivabili.

Il carattere locale dell'operazione di derivazione si conserva in quanto i campi scalari $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ hanno supporti compatti contenuti nell'aperto Ω.

Pertanto nella formula di integrazioni per parti i valori al contorno del campo f su $\partial\Omega$ non compaiono.

La derivata $D^p\mathbb{T}_f$ della distribuzione $\mathbb{T}_f$ associata ad un campo f localmente integrabile su Ω, detta **derivata generalizzata** o **derivata distribuzionale** di f, viene quindi definita da

$$\boxed{\langle D^p\mathbb{T}_f , \varphi \rangle := (-1)^{|p|}\int_{\mathcal{P}} f(\mathbf{x})\, D^p\varphi(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,.}$$

E' importante ossservare che quando il campo f è di classe $C^1(\Omega)$ si ha

$$\langle D^p\mathbb{T}_f , \varphi \rangle := -\int_{\mathcal{P}} f(\mathbf{x})\, D^p\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{P}} D^p f(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,.$$

Risulta pertanto $\langle D^p\mathbb{T}_f , \varphi \rangle = \langle \mathbb{T}_{D^p f} , \varphi \rangle$ e, in virtù dell'identificazione tra f e $\mathbb{T}_f$, la derivata distribuzionale coincide con quella usuale.

In generale la derivata $D^p\mathbb{T}$ di un'arbitraria distribuzione $\mathbb{T}$ è definita dalla formula

$$\boxed{\langle D^p\mathbb{T} , \varphi \rangle := (-1)^{|p|}\langle \mathbb{T} , D^p\varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,.}$$

Se p_1 e p_2 sono due multi-indici e $p = p_1 + p_2$ si pone

$$\langle D^p\mathbb{T} , \varphi \rangle := \langle D^{p_1}D^{p_2}\mathbb{T} , \varphi \rangle = \langle D^{p_2}D^{p_1}\mathbb{T} , \varphi \rangle\,.$$

Una distribuzione $\mathbb{T}$ su Ω è pertanto indefinitamente differenziabile nel senso delle distribuzioni.

La prossime proposizione mostra che il gradiente distribuzionale ha grafico chiuso nello spazio prodotto $\mathcal{L}^2(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Proposizione 3.2. Chiusura del gradiente distribuzionale. *Il gradiente distribuzionale* $\mathrm{grad} : \mathcal{L}^2(\Omega) \mapsto \mathcal{L}^2(\Omega)^d$ *con* $\mathrm{dom\,grad} = H^1(\Omega)$ *è un operatore lineare chiuso.*

Dim. Si consideri una successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ convergente a $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ e tale che i gradienti distribuzionali $\{\mathrm{grad}\,\mathbf{u}_n\}$ convergano ad un $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d$. Si ha dunque che

$$\| \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \|_0 \to 0\,, \quad \| \mathrm{grad}\,\mathbf{u}_n - \mathbf{g} \|_0 \to 0\,.$$

Poichè $\mathbf{u} \in \mathrm{dom\,grad}$ si tratta di dimostrare che $\mathbf{g} = \mathrm{grad}\,\mathbf{u}$.

La proposizione 3.1 assicura che la convergenza in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ implica quella nel senso delle distribuzioni. Si ha quindi che

$$\| \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \|_0 \to 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathbb{T}_{\mathbf{u}_n} \to \mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,, \\ \\ \mathrm{grad}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}_n} \to \mathrm{grad}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,, \end{cases}$$

$$\| \mathrm{grad}\,\mathbf{u}_n - \mathbf{g} \|_0 \to 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{grad}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}_n} \to \mathbb{T}_{\mathbf{g}}\,.$$

L'unicità del limite in $\mathbb{D}'$ implica che $\mathbf{g} = \mathrm{grad}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}} = \mathrm{grad}\,\mathbf{u}$ e pertanto l'operatore grad è chiuso. □

Il risultato della proposizione 3.2 si estende banalmente a qualsiasi operatore differenziale distribuzionale.

3.4. Impulsi e dipoli

Un fondamentale esempio di distribuzione è fornito dalla **delta** di DIRAC introdotta dal fisico PAUL DIRAC intorno al 1930.

La funzione **delta** ha innumerevoli applicazioni in fisica matematica ed ha posto ai matematici il problema di una generalizzazione del concetto di funzione.

La distribuzione di DIRAC $\mathbb{T}_{\delta_{\mathbf{x}}}$, denotata anche semplicemente con $\delta_{\mathbf{x}}$, è definita come un campionatore che ad ogni campo scalare $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$ associa il valore che esso assume nel punto $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\langle\, \delta_{\mathbf{x}}\,, \varphi \,\rangle = \langle\, \mathbb{T}_{\delta_{\mathbf{x}}}\,, \varphi \,\rangle := \varphi(\mathbf{x}).$$

Se $\Re$ è l'asse reale, la distribuzione di DIRAC nel punto x si ottiene come derivata distribuzionale della funzione **gradino unitario** di HEAVISIDE (1899)

$$H_x(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi \geq x\,, \\ 0, & \text{se } \xi < x\,. \end{cases}$$

Infatti risulta

$$\langle\, D^1 H_x\,,\, \varphi\,\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H_x(\xi)\, D^1\varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi = -\int_{x}^{+\infty} D^1\varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \varphi(x)$$

e cioè $\boxed{\delta_x = D^1 H_x\,.}$

La distribuzione di DIRAC è detta anche un **impulso unitario** concentrato nel punto x. Derivata a sua volta, la distribuzione di DIRAC fornisce la distribuzione

$$\langle\, D^1\delta_x\,,\, \varphi\,\rangle = -\,\langle\, \delta_x\,,\, D^1\varphi\,\rangle = -D^1\varphi(x)$$

che è detta **dipolo unitario** concentrato nel punto x.

La distribuzione $D^1\delta_x$ associa ad ogni campo $\varphi \in \mathbb{D}(\Re)$ l'opposto della sua derivata nel punto $x \in \Re$.

Analogamente si definiscono i dipoli di ordine superiore. Impusi e dipoli concentrati sono comunemente considerati in meccanica ad esempio quando su una struttura monodimensionale vengono applicate in punti discreti forze o coppie concentrate ovvero distorsioni angolari o di scorrimento relativo.

3.5. Gradiente e divergenza di una distribuzione

Sia Ω un aperto di $\Re^d$. Il gradiente generalizzato $\boxed{\operatorname{grad}\mathbb{P}}$ di una distribuzione scalare $\mathbb{P} \in \mathbb{D}(\Omega)'$ è definito da

$$\boxed{\langle\, \operatorname{grad}\mathbb{P}\,,\, \mathbf{v}\,\rangle := -\langle\, \mathbb{P}\,,\, \operatorname{div}\mathbf{v}\,\rangle \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{D}(\Omega)^d\,.}$$

Analogamente la divergenza generalizzata $\boxed{\operatorname{div}\mathbb{T}}$ di una distribuzione vettoriale $\mathbb{T} \in [\,\mathbb{D}(\Omega)'\,]^d$ è definita da

$$\boxed{\langle\, \operatorname{div}\,\mathbb{T}\,,\, \varphi\,\rangle := -\langle\, \mathbb{T}\,,\, \operatorname{grad}\varphi\,\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,.}$$

Ovviamente risulta

$$\boxed{\langle\ \mathrm{grad}\,\mathbb{T}\,,\ \mathbf{v}\ \rangle\ := -\langle\ \mathbb{T}\,,\ \mathrm{div}\,\mathbf{v}\ \rangle = 0 \qquad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbb{D}(\Omega)^d\ :\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\,.}$$

Il reciproco di tale proprietà è anche vero come mostra il seguente profondo risultato dovuto a GEORGES DE RHAM (vedasi DE RHAM [12] teorema 17′ a pag. 114) che fornisce una condizione variazionale per l'esistenza di un potenziale distribuzionale.

Proposizione 3.3. Teorema di DE RHAM**.** *Sia Ω un aperto di $\Re^d$ e $\mathbb{T}\in[\,\mathbb{D}'(\Omega)\,]^d$. Allora esiste una distribuzione $\mathbb{P}\in\mathbb{D}'(\Omega)$ tale che*

$$\boxed{\mathbb{T} = \mathrm{grad}\,\mathbb{P}}$$

se e solo se risulta $\boxed{\langle\ \mathbb{T}\,,\ \mathbf{v}\ \rangle = 0 \qquad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbb{D}(\Omega)^d\ :\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\,.}$ □

4. SPAZI di BEPPO LEVI e di SOBOLEV

Gli spazi di SOBOLEV costituiscono l'ambiente lineare idoneo a trattare le questioni di esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni dei problemi differenziali lineari. In vista delle applicazioni che saranno sviluppate, tratteremo soltanto degli spazi di SOBOLEV che sono spazi di HILBERT.

Nel seguito per **insieme aperto regolare** si intenderà un aperto la cui frontiera è una varietà differenziabile sufficientemente regolare per garantire la validità dei risultati.

4.1. Spazi di Beppo Levi

Nello spazio $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})^n$ normato con $\|\cdot\|_m$ si consideri l'insieme delle successioni $\{\mathbf{u}_n\}$ che soddisfano il criterio di convergenza di CAUCHY e cioè tali che

$$\lim_{n\to\infty}\|\,\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_k\,\|_m = 0\,.$$

Si effettui quindi un'operazione detta di **completamento dello spazio** che consiste nel costruire un nuovo spazio vettoriale $H^m(\Omega)$ i cui elementi sono classi di equivalenza di successioni di CAUCHY definite dalla relazione

$$\{\mathbf{u}_n\}\equiv\{\,\mathbf{v}_n\} \iff \lim_{n\to\infty}\|\,\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n\,\|_m = 0\,.$$

In una successione di CAUCHY la norma degli elementi è convergente in quanto

$$\Big| \| \mathbf{u}_n \|_m - \| \mathbf{u}_k \|_m \Big| \le \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_k \|_m .$$

Ciò consente di definire nello spazio $H^m(\Omega)$ la norma

$$\| \{\mathbf{u}_n\} \|_m = \lim_{n\to\infty} \| \mathbf{u}_n \|_m .$$

Le operazioni lineari e la norma non dipendono dal rappresentante della classe di equivalenza.

Le successioni di CAUCHY convergenti ad elementi di $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})^n$ vengono identificate con essi.

Nello spazio normato $H^m(\Omega)$ le classi di equivalenza di successioni di CAUCHY risultano convergenti e pertanto lo spazio $H^m(\Omega)$ è di BANACH (vedi [29] sezione I.10).

In effetti $H^m(\Omega)$ è uno spazio di HILBERT in quanto la norma è indotta dal prodotto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_m := \sum_{|\mathbf{p}|\le m} \int_\Omega D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot D^{\mathbf{p}}\mathbf{v}(\mathbf{x}) .$$

- Gli spazi di HILBERT $H^m(\Omega)$ sono detti **spazi di** BEPPO LEVI.

Analogamente i completamenti di $\mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n$ e di $\mathrm{C}^m(\Omega)^n$ rispetto alla norma $\| \cdot \|_m$ definiscono gli spazi di HILBERT

- $H_o^m(\Omega)$ completamento di $\big\{\mathbf{u} \in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n \ : \ \| \mathbf{u} \|_m\big\} < +\infty$,
- $H^m(\Omega)$ completamento di $\big\{\mathbf{u} \in \mathrm{C}^m(\Omega)^n \ : \ \| \mathbf{u} \|_m\big\} < +\infty$.

4.2. Spazi di Sobolev

E' possibile introdurre gli spazi $H^m(\Omega)$ con una definizione alternativa fondata sulla teoria delle distribuzioni.

Tale definizione riveste particolare importanza nelle applicazioni ed è dovuta a S. L. SOBOLEV [6] che l'ha formulata nel 1938.

Nel caso di domini regolari, essa coincide con la definizione fondata sul completamento.

Si osservi preliminarmente che ogni funzione $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ di quadrato integrabile secondo LEBESGUE in un dominio Ω, e cioè tale che

$$\int_\Omega |\, f(\mathbf{x}) \,|^2 < +\infty \,,$$

risulta integrabile in Ω e quindi *a fortiori* localmente integrabile in Ω.

Infatti se $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ la diseguaglianza di SCHWARTZ fornisce

$$\int_\Omega |\, f(\mathbf{x}) \,| \leq \, (\text{meas}\, \Omega)^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |\, f(\mathbf{x}) \,|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty \,,$$

dove $\text{meas}\, \Omega$ è la misura del dominio Ω.

Quindi per ogni $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ il funzionale

$$\mathbb{T}_f(\varphi) := \int_\Omega f(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x}) \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega) \,,$$

è una distribuzione.

La distribuzione $\mathbb{T}_f$ individua univocamente la funzione $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ in quanto se $\mathbb{T}_f$ è nulla allora $f = 0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ e quindi f è nulla q.o. in Ω.

Ciò consente di identificare la distribuzione $\mathbb{T}_f$ e la funzione $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

La p-derivata di una funzione di quadrato integrabile $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ viene quindi definita come segue.

- La p-derivata di $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ è la p-derivata distribuzionale $D^p\mathbb{T}_f$ della distribuzione $\mathbb{T}_f$ associata a f.

Se la distribuzione $D^p\mathbb{T}_f$ può essere identificata con una funzione di quadrato integrabile $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, e cioè se

$$\langle\, D^p\mathbb{T}_f \,,\, \varphi \,\rangle = \langle\, \mathbb{T}_g \,,\, \varphi \,\rangle := \int_\Omega g(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x}) \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega) \,,$$

si scrive che

$$D^p f = D^p \mathbb{T}_f = g \,,$$

e si dice che la p-derivata $D^p f$ di f è di quadrato integrabile in Ω.

In forza della proposizione 1.6 la funzione $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ se esiste è unica.

Si dà ora la definizione di spazio di SOBOLEV.

- Un campo di n-vettori su Ω appartiene allo **spazio di SOBOLEV** $W^m(\Omega)^n$ se è di quadrato integrabile su Ω insieme alle sue $\mathbf{p}$-derivate distribuzionali di ordine $|\,\mathbf{p}\,| \le m$.

Lo spazio di SOBOLEV $H^m(\Omega)^n$ è dotato del prodotto interno

$$(\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,)_m := \sum_{|\,\mathbf{p}\,| \le m} \int_\Omega D^{\mathbf{p}} \mathbb{T}_{\mathbf{u}} \cdot D^{\mathbf{p}} \mathbb{T}_{\mathbf{v}} \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}\,,$$

e quindi della corrispondente norma

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_m := \sqrt{(\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{u}\,)_m} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{H}\,.$$

La completezza dello spazio $\mathcal{L}^2(\Omega)$ implica che lo spazio $W^m(\Omega)^n$ è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_m$ e dunque che $W^m(\Omega)^n$ è uno spazio di HILBERT.

Le derivate distribuzionali delle funzioni di $\mathrm{C}^m(\Omega)$ coincidono con quelle classiche e pertanto il sottospazio

$$S := \left\{ \mathbf{u} \in \mathrm{C}^m(\Omega) \;:\; \|\,\mathbf{u}\,\|_m < +\infty \right\},$$

appartiene a $W^m(\Omega)^n$.

Poichè $W^m(\Omega)^n$ è completo esiste un isomorfismo isometrico tra $H^m(\Omega)^n$, che è il completamento di S, e la chiusura di S in $W^m(\Omega)^n$. Identificando $H^m(\Omega)^n$ con tale chiusura si può concludere che

$$H^m(\Omega)^n \subseteq W^m(\Omega)^n \,.$$

Un teorema di N. MEYERS e J. SERRIN [17] mostra che tale inclusione è una eguaglianza e cioè per ogni dominio Ω si ha che

$$H^m(\Omega)^n = W^m(\Omega)^n \,.$$

La dimostrazione è riportata in [33] teorema 3.16.

La proprietà di continuità dei campi vettoriali di uno spazio di SOBOLEV $H^m(\Omega)^n$ possono essere dedotte dal seguente classico risultato.

Proposizione 4.1. Lemma di Sobolev. *Si consideri un dominio* Ω **regolare** *e* **limitato** *nello spazio euclideo d-dimensionale* $\mathcal{E}^d$ *con* $m > d/2$. *Vale allora la diseguaglianza*

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} |\,\mathbf{u}(\mathbf{x})\,| \leq c\,\|\,\mathbf{u}\,\|_m\,, \quad \forall\,\mathbf{u} \in \mathrm{C}^m(\overline{\Omega})\,.$$

I campi vettoriali di $H^m(\Omega)$ *sono pertanto continui su* $\overline{\Omega}$ *con tutte le derivate fino all'ordine* k*-esimo, cioè*

$$H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})\,,$$

purchè sia soddisfatta la diseguaglianza stretta

$$k < m - \frac{d}{2}\,,$$

dove

- k *è l'ordine massimo delle derivate continue,*
- m *è l'esponente dello spazio di* SOBOLEV $H^m(\Omega)$,
- d *è la dimensione dello spazio euclideo* $\mathcal{E}^d$.

Dim. Una sintetica dimostrazione della diseguaglianza è riportata nell'articolo di FICHERA [26].

In virtù di tale diseguaglianza ogni successione in $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ che è di CAUCHY nella norma di $H^m(\Omega)$ è anche di CAUCHY nella norma uniforme

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_\infty := \sup_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} |\,\mathbf{u}(\mathbf{x})\,|\,.$$

La successione convergerà pertanto puntualmente ed uniformemente ad un campo vettoriale continuo che è il limite della successione nella norma di $H^m(\Omega)$. □

5. OPERATORI ELLITTICI E SOLUZIONI DEBOLI

Si presenta ora un risultato fondamentale concernente le soluzioni deboli di un sistema di equazioni differenziali.

A tal fine si premettono le seguenti definizioni.

Sia $\mathbf{L}$ un operatore differenziale lineare di ordine ν operante su campi vettoriali a valori in uno spazio di dimensione n definito da

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{p}|\le\nu} \mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\, D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

dove $\mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ sono campi regolari di matrici $n \times n$ in Ω.

- La **parte principale** $\mathbf{L}_o$ di $\mathbf{L}$ è quella che coinvolge le sole derivate di ordine massimo

$$\mathbf{L}_o\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{p}|=\nu} \mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\, D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

- L'operatore differenziale $\mathbf{L}$ è detto **ellittico** se

$$\det \sum_{|\mathbf{p}|=\nu} \mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\, \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} \neq 0,$$

per ogni d-vettore $\boldsymbol{\xi}$ e in ogni punto $\mathbf{x} \in \Omega$.

- L'operatore **aggiunto formale** $\mathbf{L}^*$ di $\mathbf{L}$, definito da

$$\mathbf{L}^*\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{p}|\le\nu} (-1)^{|\mathbf{p}|}\, D^{\mathbf{p}}\big(\mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\,\mathbf{u}(\mathbf{x})\big),$$

soddisfa l'identità

$$\int_\Omega \mathbf{L}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L}^*\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \forall\, \boldsymbol{\phi} \in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n.$$

Si noti che se le matrici dei coefficienti $\mathbf{A}_{\mathbf{p}}$ sono costanti le parti principali degli operatori $\mathbf{L}$ e del suo aggiunto formale $\mathbf{L}^*$ sono le stesse. Ne segue che $\mathbf{L}$ risulta ellittico solo se lo è $\mathbf{L}^*$.

L'operatore aggiunto consente di definire l'operatore differenziale distribuzionale associato ad $\mathbf{L}$

$$(\mathbf{L}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}})(\boldsymbol{\phi}) := \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L}^*\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \forall\, \boldsymbol{\phi} \in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n.$$

Un campo vettoriale $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n$ costituisce una **soluzione debole** del sistema differenziale

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

con $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$ se risulta

$$(\mathbf{L}\, \mathbb{T}_{\mathbf{u}}) = \mathbb{T}_{\mathbf{f}} \,,$$

e cioè

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L}^* \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \,, \quad \forall\, \boldsymbol{\phi} \in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n \,.$$

Sussiste la seguente fondamentale proprietà.

Proposizione 5.1. Sistemi differenziali ellittici. *Sia* $\mathbf{u}$ *una soluzione debole del sistema differenziale ellittico* $\mathbf{Lu}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *di ordine* ν. *Allora se* $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^n$ *si ha che* $\mathbf{u} \in H^{m+\nu}(\Omega)^n$ *in quanto risulta*

$$\|\, \mathbf{u} \,\|_{m+\nu} \leq c_E \,\|\, \mathbf{f} \,\|_m .$$

Tale risultato può essere enunciato dicendo che la soluzione debole è ν *volte più regolare dei dati.* □

Grazie alle proposizioni 4.1 e 5.1 si perviene al seguente risultato concernente le proprietà di continuità della soluzione di un sistema ellittico.

Proposizione 5.2. Regolarità della soluzione. *Sia* $\mathbf{u}$ *una soluzione debole del sistema ellittico* $\mathbf{Lu}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *di ordine* ν. *Allora se* $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^n$ *con* $m > d/2$ *si ha che* $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\nu(\overline{\Omega})^n$ *e dunque* $\mathbf{u}$ *è una soluzione in senso classico. In particolare se* $\mathbf{f} \in C^\infty(\overline{\Omega})^n$ *allora* $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^n$.

Dim. In virtù della proposizione 5.1 si ha che $\mathbf{u} \in H^{m+\nu}(\Omega)^n$. La proposizione 4.1 assicura che $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^n$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\nu(\overline{\Omega})^n$. Pertanto, invocando l'identità di GAUSS-GREEN risulta

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L}^* \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{L}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \,,$$

per ogni $\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n$. Per la continuità di $\mathbf{Lu}$ e di $\mathbf{f}$ il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni stabilisce che $\mathbf{Lu} = \mathbf{f}$. □

Ecco una conseguenza della proposizione 5.2.

Proposizione 5.3. Nucleo del gradiente. *Sia* Ω *un aperto* **regolare** *e* **limitato** *in* $\mathcal{E}^d$ *ed* $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. *Allora la distribuzione* $\mathbb{T}_f \in \mathbb{D}'(\Omega)$ *ha gradiente nullo se e solo se* f *è eguale ad una costante in ogni componente connessa di* Ω.

Dim. Per definizione si ha che

$$\langle\ \mathrm{grad}\,\mathbb{T}_f\,,\ \mathbf{v}\ \rangle\ := -\langle\ \mathbb{T}_f\,,\ \mathrm{div}\,\mathbf{v}\ \rangle = -\int_{\Omega} f\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbb{D}(\Omega)^d\,,$$

e quindi, ponendo $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\varphi$, la condizione $\mathrm{grad}\,\mathbb{T}_f = \mathbf{o}$ implica che

$$\langle\ \mathrm{grad}\,\mathbb{T}_f\,,\ \mathrm{grad}\,\varphi\ \rangle = -\int_{\Omega} f\ \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\,\varphi = 0 \qquad \forall\,\varphi\in\mathbb{D}(\Omega)\,.$$

L'operatore differenziale div grad è ellittico e quindi l'equazione differenziale div grad $f = 0$ ha soluzione debole $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Dunque $\mathrm{grad}\,f = \mathbf{o}$ vale in senso classico e pertanto f è costante in ogni componente connessa di Ω. □

In modo analogo si dimostra il seguente importante risultato.

Proposizione 5.4. Nucleo della parte simmetrica del gradiente. *Sia Ω un aperto* **regolare** *e* **limitato** *in $\mathcal{E}^d$ ed $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)^3$.*
Allora la distribuzione vettoriale $\mathbb{T}_{\mathbf{u}} \in [\,\mathbb{D}(\Omega)'\,]^3$ ha parte simmetrica del gradiente nulla se e solo se $\mathbf{u}$ è un polinomio di primo grado in ogni componente connessa di Ω.
Ciò equivale a richiedere che il gradiente sia un tensore antisimmetrico e costante in ogni componente connessa di Ω.

$$\boxed{\mathrm{sym\,grad}\,\mathbf{u} = \mathbf{O} \iff \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{\Omega}\,[\mathbf{x}-\mathbf{x}_o]\,, \quad \mathbf{\Omega}^T = -\mathbf{\Omega}\,.}$$

Dim. La dimostrazione segue dall'osservare che

$$\langle\ \mathrm{div\ sym\,grad}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\ \mathbf{w}\ \rangle = -\langle\ \mathrm{sym\,grad}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\ \mathrm{grad}\,\mathbf{w}\ \rangle =$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{u}\cdot\ \mathrm{div\ grad}\,\mathbf{w} = 0\,, \quad \forall\,\mathbf{w}\in\mathbb{D}(\Omega)^3\,.$$

In virtu della proposizione 5.2 l'ellitticità dell'operatore differenziale div grad implica che la soluzione debole $\mathbf{u}$ è di classe $\mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$.

Allora un risultato classico mostra che

$$\mathrm{sym\,grad}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{O} \ \Rightarrow\ \mathrm{grad\ grad}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{O} \quad \forall\,\mathbf{x}\in\Omega\,,$$

(vedi [40] cap. III.7 oppure [53] cap. I, prop. 5.2).

Dunque $\mathrm{grad}\,\mathbf{u}$ è costante in ogni componente connessa di Ω e quindi $\mathbf{u}$ è un polinomio di primo grado.

La condizione $\mathrm{sym\,grad}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{O}$ implica infine che $\mathbf{\Omega} = \mathrm{grad}\,\mathbf{u}$ è un tensore antisimmetrico costante in ogni componente connessa di Ω. □

6. PRINCIPIO DI SELEZIONE E DISEGUAGLIANZE NOTEVOLI

Il principio di selezione di RELLICH fornisce un fondamentale risultato di compattezza nella teoria gli spazi di SOBOLEV.

Da tale principio possono dedursi alcune basilari diseguaglianze che consentono di stabilire l'esistenza della soluzione dei problemi variazionali della meccanica delle strutture.

Si ricordi che un dominio è un aperto connesso.

Proposizione 6.1. Principio di selezione di RELLICH. *Sia Ω un dominio* **regolare** *e* **limitato** *in $\mathcal{E}^d$. L'immersione di $H^m(\Omega)$ in $H^{m-1}(\Omega)$ è compatta. Da ogni successione limitata in $H^m(\Omega)$ se ne può estrarre quindi una convergente in $H^{m-1}(\Omega)$.*

Dim. Per la dimostrazione si veda p.e. [19] teor. I.1.4, ovvero [26] teor. 2.IV. □

Presentiamo ora un utile lemma che consente di stabilire che una funzione con derivate generalizzate nulle oltre un certo ordine è un polinomio.

Lemma 6.2. Polinomi. *Sia $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)$ con $D^{\mathbf{p}}\mathbf{u} = 0$ per ogni $\mathbf{p}$ tale che $|\,\mathbf{p}\,| = m$. Allora $\mathbf{u}$ è un polinomio di grado non maggiore di $m-1$.*

Dim. Per ogni $\phi \in \mathcal{C}_\circ^\infty(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x})\; D^{\mathbf{p}}\phi(\mathbf{x}) = (-1)^m \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\; D^{\mathbf{p}} D^{\mathbf{p}}\phi(\mathbf{x}) = 0\,.$$

L'operatore $\mathbf{L} = D^{\mathbf{p}}D^{\mathbf{p}}$ è ellittico e la proposizione 5.2 mostra che $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Il risultato segue allora dalla condizione $D^{\mathbf{p}}\mathbf{u} = \mathbf{o}$ per $|\,\mathbf{p}\,| = m$. □

6.1. Diseguaglianza di FRIEDRICHS

La seguente classica diseguaglianza è importante (vedi [19] teor. I.1.1.).

Proposizione 6.3. Diseguaglianza di FRIEDRICHS. *Sia Ω un dominio* **limitato** *almeno in una direzione di $\mathcal{E}^d$. Esiste allora una costante $\alpha > 0$ tale che*

$$|\,\mathbf{u}\,|_m \geq \alpha \,\|\,\mathbf{u}\,\|_m\,, \quad \forall\, \mathbf{u} \in H_o^m(\Omega)\,.$$

Dim. Basta stabilire la diseguaglianza per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{D}(\Omega)$. Sia x la coordinata nella direzione in cui Ω è limitato e y il vettore delle altre coordinate.

Alla dimostrazione si perviene considerando una striscia di lato $< a$ in direzione x che contiene Ω . Allora

$$\mathbf{u}(x,y) = \int_{-a}^{x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{u}(\xi,y)\, \mathrm{d}\xi \,,$$

e dalla diseguaglianza di SCHWARZ si ottiene

$$|\,\mathbf{u}(x,y)\,|^2 = 2\,a \int_{-a}^{a} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{u}(\xi,y) \right|^2 \mathrm{d}\xi \,.$$

Integrando in direzione x tra $-a$ ed a si ha che

$$\int_{-a}^{a} |\,\mathbf{u}(x,y)\,|^2 = 4\,a^2 \int_{-a}^{a} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{u}(x,y) \right|^2 \mathrm{d}x \,.$$

La diseguaglianza segue quindi integrando ancora rispetto alle restanti coordinate in modo da includere il supporto compatto del campo $\mathbf{u} \in \mathbb{D}(\Omega)$. □

6.2. Diseguaglianza di POINCARÉ

Il principio di selezione di RELLICH consente di pervenire alla dimostrazione di una versione generalizzata della classica diseguaglianza di POINCARÉ che è valida in $\mathrm{C}^m(\Omega)$.

Proposizione 6.4. Diseguaglianza di POINCARÉ**.** *Sia Ω un dominio* **regolare** *e* **limitato** *in $\mathcal{E}^d$. Esiste allora una costante $\alpha > 0$ tale che*

$$|\,\mathbf{u}\,|_m^2 + \sum_{|\,\mathbf{p}\,| < m} \left| \int_{\Omega} D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \right|^2 \geq \alpha \,\|\,\mathbf{u}\,\|_m^2 \,, \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,.$$

Dim. Si procede per assurdo. Se non esistesse una tale costante $\alpha > 0$ si potrebbe trovare una successione $\{\mathbf{u}_n\} \in H^m(\Omega)$ tale che

$$\begin{cases} \| \mathbf{u}_n \|_m = 1 \,, \\ \lim\limits_{n\to\infty} | \mathbf{u}_n |_m \to 0 \,, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} D^{\mathbf{p}} \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) \to 0 \quad \text{per} \quad | \mathbf{p} | \le m-1 \,. \end{cases}$$

Essendo la successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset H^m(\Omega)$ limitata in $H^m(\Omega)$, in forza del principio di selezione 6.1 possiamo supporre che essa sia convergente in $H^{m-1}(\Omega)$ ad un limite $\mathbf{u} \in H^{m-1}(\Omega)$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(\| \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \|^2_{m-1} + | \mathbf{u}_n |^2_m \right) = 0 \,.$$

Pertanto $\{\mathbf{u}_n\}$ converge in $H^m(\Omega)$ a $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)$ con $| \mathbf{u} |_m = 0$. Dal lemma 6.2 segue che $\mathbf{u}$ è un polinomio di grado $\le m-1$. Osserviamo ora che per la diseguaglianza di SCHWARZ si ha

$$\int\limits_{\Omega} D^{\mathbf{p}} [\mathbf{u}_n - \mathbf{u}](\mathbf{x}) \le \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \|_{m-1} \quad \text{per} \quad | \mathbf{p} | \le m-1 \,,$$

e che inoltre $\big| \| \mathbf{u}_n \|_m - \| \mathbf{u} \|_m \big| \le \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \|_m$ per cui $\| \mathbf{u} \|_m = 1$.

In definitiva quindi $\mathbf{u}$ è un polinomio di grado $\le m-1$ tale che

$$\int\limits_{\Omega} D^{\mathbf{p}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \,, \quad 0 \le | \mathbf{p} | \le m-1 \,,$$

Allora deve essere $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, il che è impossibile essendo $\| \mathbf{u} \|_m = 1$. $\square$

Si dimostra ora una fondamentale proprietà dell'operatore gradiente. Sia $\Re$ il sottospazio dei campi di $\mathcal{L}^2(\Omega)$ q.o. eguali in Ω ad un campo costante.

Corollario 6.5. Chiusura dell'immagine del gradiente. *Sia $\Omega \subset \Re^d$ un dominio* **limitato**. *Allora l'operatore gradiente distribuzionale* $\operatorname{grad} \in L\left\{H^1(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)^d\right\}$ *ha immagine chiusa. In altri termini esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$\| \operatorname{grad} \mathbf{u} \|_0 \ge c \| \mathbf{u} \|_{H^1(\Omega)/\Re} \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \,,$$

dove $\Re = \operatorname{Ker} \operatorname{grad}$.

Dim. La diseguaglianza di POINCARÉ mostra che

$$\| \operatorname{grad} \mathbf{u} \|_0^2 + \left| \int_\Omega \mathbf{u} \right|^2 \geq \alpha \| \mathbf{u} \|_1^2 .$$

Sia $\mathbf{M} \in \mathrm{L}\{H^1(\Omega), H^1(\Omega)\}$ l'operatore lineare continuo che ad un campo $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ associa il campo costante pari al suo valor medio. Risulta allora

$$\| \operatorname{grad} \mathbf{u} \|_0^2 + \left| \int_\Omega \mathbf{u} - \mathbf{M}[\mathbf{u}] \right|^2 \geq \alpha \| \mathbf{u} - \mathbf{M}[\mathbf{u}] \|_1^2 \geq \alpha \| \mathbf{u} \|_{H^1(\Omega)/\Re}^2 ,$$

e l'asserto è dimostrato in quanto $\displaystyle\int_\Omega \mathbf{u} - \mathbf{M}[\mathbf{u}] = \mathbf{o}$. □

Osservazione 6.1. Il risultato della proposizione 6.5 può anche essere anche dedotto dalla diseguaglianza di POINCARÉ invocando il lemma di TARTAR, proposizione I.12.2.

Peraltro alla diseguaglianza di POINCARÉ si può pervenire direttamente dal principio di selezione di RELLICH, proposizione 6.1, richiamando il lemma inverso, proposizione I.12.5. Per mostrarlo consideriamo gli operatori

- $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{H^m(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)^k\}$ con $k = \text{card}\{\mathbf{p} \in \mathcal{N}^d \ : \ |\mathbf{p}| = m\}$ operatore lineare continuo definito da $\mathbf{Au} = \{D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}\}$, con $|\mathbf{p}| = m$,
- $\mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\{H^m(\Omega); H^{m-1}(\Omega)\}$ operatore lineare compatto che effettua l'iniezione canonica $\mathbf{A}_o\mathbf{u} = \mathbf{u}$,
- $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\{H^m(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)^r\}$ con $r = \text{card}\{\mathbf{p} \in \mathcal{N}^d \ : \ |\mathbf{p}| < m\}$ operatore lineare continuo definito da

$$\mathbf{Lu} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\text{meas}\, \Omega}} \int_\Omega D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\} , \quad 0 \leq |\mathbf{p}| \leq m-1 .$$

Si definiscano quindi

$$H := H^m(\Omega) \quad E := \mathcal{L}^2(\Omega)^k \quad E_o := H^{m-1}(\Omega) \quad F := \mathcal{L}^2(\Omega)^r ,$$

così che

$$\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{H; E\} \quad \mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\{H; E_o\} \quad \mathbf{L} \in \mathrm{L}\{H; F\} .$$

Sono soddisfatte le ipotesi della proposizione I.12.5 in quanto

$$\begin{cases} \| \mathbf{Au} \|_E + \| \mathbf{A}_o\mathbf{u} \|_{E_o} = \| \mathbf{u} \|_H , \\ \mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\{H; E_o\} \quad \text{è compatto} . \end{cases}$$

Poichè risulta

$$\operatorname{Ker} \mathbf{A} \cap \operatorname{Ker} \mathbf{L} = \{\mathbf{o}\}\,,$$

si ha che

$$\|\, \mathbf{Au} \,\|_E + \|\, \mathbf{Lu} \,\|_F \geq c \,\|\, \mathbf{u} \,\|_H \quad \forall\, \mathbf{u} \in H\,,$$

che equivale alla diseguaglianza di POINCARÉ:

$$|\, \mathbf{u} \,|_m^2 + \sum_{|\,\mathbf{p}\,|<m} \left| \int_\Omega D^{\mathbf{p}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right|^2 \geq \alpha \,\|\, \mathbf{u} \,\|_m^2\,, \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,.$$

Si ponga invece

- $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\left\{H^m(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)\right\}$ eguale all'iniezione canonica.

Allora $\operatorname{Ker} \mathbf{L} = \{\mathbf{o}\}$ e la diseguaglianza

$$\|\, \mathbf{Au} \,\|_E + \|\, \mathbf{Lu} \,\|_F \geq c \,\|\, \mathbf{u} \,\|_H \quad \forall\, \mathbf{u} \in H\,,$$

si scrive esplicitamente

$$|\, \mathbf{u} \,|_m + \|\, \mathbf{u} \,\|_0 \geq c \,\|\, \mathbf{u} \,\|_m \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,,$$

ed è una variante della diseguaglianza di POINCARÉ. ■

6.3. Duali degli spazi $H^1(\Omega)$ e $H^1_o(\Omega)$

Si denotino con

- $H^1(\Omega)'$ lo spazio di HILBERT duale di $H^1(\Omega)$.
- $H^{-1}(\Omega)$ lo spazio di HILBERT duale di $H^1_o(\Omega)$.

Se, come d'uso, si identifica $\mathcal{L}^2(\Omega)$ col suo duale, dalla proposizione I.9.13 si ha che

$$\boxed{\begin{aligned} &H^1(\Omega) \subset \mathcal{L}^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)'\,,\\ &H^1_o(\Omega) \subset \mathcal{L}^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)\,, \end{aligned}}$$

con iniezioni continue e dense.

Si noti a tal proposito che banalmente

$$\|\, \mathbf{u} \,\|_1 \geq \|\, \mathbf{u} \,\|_0 \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^1(\Omega)\,,$$

e che inoltre la norma di $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ in $H^1(\Omega)'$ soddisfa la diseguaglianza

$$\sup_{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\| \mathbf{v} \|_1} \le \sup_{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\| \mathbf{v} \|_0} \le \| \mathbf{u} \|_0 .$$

Infatti il prodotto di dualità $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ in $H^1(\Omega)' \times H^1(\Omega)$, essendo $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ e $\mathbf{v} \in H^1(\Omega) \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ coincide con il prodotto interno $(\!(\mathbf{u}, \mathbf{v})\!)_o$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ e quindi l'ultima diseguaglianza è quella di SCHWARZ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Analogamente la norma di $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ in $H^{-1}(\Omega)$ soddisfa la diseguaglianza

$$\| \mathbf{u} \|_{-1} = \sup_{\mathbf{v} \in H^1_o(\Omega)} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\| \mathbf{v} \|_1} \le \sup_{\mathbf{v} \in H^1_o(\Omega)} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\| \mathbf{v} \|_0} \le \| \mathbf{u} \|_0 .$$

Dal corollario 6.5 si deduce il prossimo risultato che caratterizza il sottospazio costituito dai funzionali di $H^1(\Omega)'$ a valor medio nullo su Ω.

Proposizione 6.6. *Sia $\Omega \subset \Re^d$ un dominio* **limitato** *e $\phi \in H^1(\Omega)'$. Allora il problema variazionale*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f , \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d , \quad \forall f \in H^1(\Omega) ,$$

ammette almeno una soluzione se e solo se $\phi \in \Re^\perp \subset H^1(\Omega)'$.

Dim. La proposizione 6.5 stabilisce che l'operatore lineare gradiente $\mathbf{G} = \operatorname{grad} \in L\{H^1(\Omega), \mathcal{L}^2(\Omega)^d\}$ ha immagine chiusa e la proposizione 5.3 assicura che $\operatorname{Ker} \mathbf{G} = \Re \subset H^1(\Omega)$. In forza del teorema dell'immagine chiusa, proposizione I.9.16, l'operatore duale $\mathbf{G}' \in L\{\mathcal{L}^2(\Omega)^d; H^1(\Omega)'\}$ definito dalla relazione di dualità

$$\langle \mathbf{G}'\mathbf{u}, f \rangle = (\mathbf{u}, \mathbf{G} f)_0 = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f , \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d , \quad \forall f \in H^1(\Omega) ,$$

ha anch'esso immagine chiusa e risulta

$$\operatorname{Im} \mathbf{G}' = (\operatorname{Ker} \mathbf{G})^\perp = \Re^\perp \subset H^1(\Omega)' .$$

Dunque il problema variazionale ha soluzione se e solo se $\phi \in \operatorname{Im} \mathbf{G}' = \Re^\perp$. $\square$

Il prossimo risultato consente di caratterizzare lo spazio $H^{-1}(\Omega)$ come lo spazio della divergenza distribuzionale dei campi vettoriali di $\mathcal{L}^2(\Omega)^d$.

Proposizione 6.7. Divergenza dei campi di $\mathcal{L}^2(\Omega)^d$. *Sia $\Omega \subset \Re^d$ un dominio* **limitato**. *Per ogni $\phi \in H^{-1}(\Omega)$ esiste almeno un $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d$ tale che*

$$\phi = \operatorname{div}\mathbf{u} \iff \langle\, \phi\,,\, f\,\rangle = -\int_\Omega \mathbf{u}\cdot \operatorname{grad} f = \langle\, \operatorname{div}\mathbf{u}\,,\, f\,\rangle\,, \quad \forall\, f \in H^1_o(\Omega)\,.$$

L'operatore $\operatorname{div} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{L}^2(\Omega)^d; H^{-1}(\Omega)\right\}$ *è quindi suriettivo.*

Dim. La diseguaglianza di FRIEDRICHS e la proposizione 5.3 assicurano che l'operatore gradiente $\mathbf{G} = \operatorname{grad} \in \mathrm{L}\left\{H^1_o(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)^d\right\}$ ha immagine chiusa e che

$$\operatorname{Ker}\mathbf{G} = \Re \cap H^1_o(\Omega) = \{\mathbf{o}\} \subset H^1_o(\Omega)\,.$$

L'operatore duale $\mathbf{G}' \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{L}^2(\Omega)^d; H^{-1}(\Omega)\right\}$ ha quindi anch'esso immagine chiusa in virtù del teorema dell'immagine chiusa, proposizione I.9.16 ed è suriettivo in quanto

$$\operatorname{Im}\mathbf{G}' = (\operatorname{Ker}\mathbf{G})^{\perp} = \{\mathbf{o}\}^{\perp} = H^{-1}(\Omega)\,.$$

Resta da mostrare la relazione tra l'operatore duale $\mathbf{G}' \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{L}^2(\Omega)^d; H^{-1}(\Omega)\right\}$ e l'operatore divergenza. A tal fine osserviamo che dalla definizione distribuzionale dell'operatore divergenza

$$\langle\, -\operatorname{div}\mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\, \varphi\,\rangle := (\,\mathbf{u}\,,\, \mathbf{G}\,\varphi\,)_0 \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d\,,$$

segue che

$$|\langle\, \operatorname{div}\mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\, \varphi\,\rangle| = |(\,\mathbf{u}\,,\, \operatorname{grad}\varphi\,)_0| \le \|\,\mathbf{u}\,\|_0\, \|\,\varphi\,\|_1 \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega) \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d\,.$$

La densità di $\mathbb{D}(\Omega)$ in $H^1_o(\Omega)$ consente di estendere per continuità in modo univoco il funzionale $\operatorname{div}\mathbb{T}_{\mathbf{u}} \in \mathbb{D}'(\Omega)$ ad un funzionale lineare continuo su $H^1_o(\Omega)$ tale che

$$|\langle\, \operatorname{div}\mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\, f\,\rangle| = |(\,\mathbf{u}\,,\, \operatorname{grad} f\,)_0| \le \|\,\mathbf{u}\,\|_0\, \|\,f\,\|_1 \quad \forall\, f \in H^1_o(\Omega) \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d\,.$$

Detta $\|\cdot\|_{-1}$ la norma in $H^{-1}(\Omega)$ risulta

$$\|\,\operatorname{div}\mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,\|_{-1} = \sup_{f \in H^1_o(\Omega)} \frac{\langle\, \operatorname{div}\mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\, f\,\rangle}{\|\,f\,\|_1} = \sup_{f \in H^1_o(\Omega)} \frac{(\,\mathbf{u}\,,\, \operatorname{grad} f\,)_0}{\|\,f\,\|_1} \le \|\,\mathbf{u}\,\|_0\,.$$

Dalla relazione di dualità

$$\langle\, \mathbf{G}'\mathbf{u}\,,\, f\,\rangle = (\,\mathbf{u}\,,\, \mathbf{G}\, f\,)_0\,, \quad \forall\, f \in H^1_o(\Omega) \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d\,,$$

si deduce che per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d$ il funzionale $-\mathbf{G}'\mathbf{u} \in H^{-1}(\Omega)$ è l'estensione per continuità ad $H^1_o(\Omega)$ del funzionale $\operatorname{div} \mathbb{T}_{\mathbf{u}} \in \mathbb{D}'(\Omega)$. Risulta che $\|\, \mathbf{G}'\,\| \leq 1$. Nell'enunciato si è posto $\operatorname{div} \mathbf{u} = -\mathbf{G}'\mathbf{u}$. □

In modo analogo si perviene al prossimo risultato.

Proposizione 6.8. Gradienti dei campi di $\mathcal{L}^2(\Omega)$. *Sia $\Omega \subset \Re^d$ un dominio* **limitato**. *Il gradiente distribuzionale di un campo $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ appartiene a $H^{-1}(\Omega)^d$ e risulta*

$$\operatorname{grad} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{L}^2(\Omega); H^{-1}(\Omega)^d\right\}.$$

Dim. Per definizione si ha che

$$|\langle\, \operatorname{grad} \mathbb{T}_f\,,\, \boldsymbol{\varphi}\,\rangle| = |(\, f\,,\, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\,)_0| \leq \|\, f\,\|_0\, \|\, \boldsymbol{\varphi}\,\|_1 \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{D}(\Omega)^d \quad \forall\, f \in \mathcal{L}^2(\Omega)\,.$$

La densità di $\mathbb{D}(\Omega)^d$ in $H^1_o(\Omega)^d$ consente quindi di estendere per continuità in modo univoco il funzionale $\operatorname{grad} \mathbb{T}_f$ ad un funzionale lineare continuo su $H^1_o(\Omega)^d$ tale che

$$|\langle\, \operatorname{grad} \mathbb{T}_f\,,\, \mathbf{v}\,\rangle| = |(\, f\,,\, \operatorname{div} \mathbf{v}\,)_0| \leq \|\, f\,\|_0\, \|\, \mathbf{v}\,\|_1\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in H^1_o(\Omega)^d\,, \forall f \in \mathcal{L}^2(\Omega)\,.$$

Allora, detta $\|\cdot\|_{-1}$ la norma in $H^{-1}(\Omega)^d$, vale la diseguaglianza

$$\|\, \operatorname{grad} \mathbb{T}_f\,\|_{-1} = \sup_{\mathbf{v} \in H^1_o(\Omega)^d} \frac{\langle\, \operatorname{grad} \mathbb{T}_f\,,\, \mathbf{v}\,\rangle}{\|\, \mathbf{v}\,\|_1} = \sup_{\mathbf{v} \in H^1_o(\Omega)^d} \frac{(\, f\,,\, \operatorname{div} \mathbf{v}\,)_0}{\|\, \mathbf{v}\,\|_1} \leq \|\, f\,\|_0\,.$$

Dunque l'operatore $\operatorname{grad} : \mathcal{L}^2(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)^d$ ha per dominio l'intero spazio $\mathcal{L}^2(\Omega)$, è limitato ed ha norma ≤ 1. □

Si riporta ora un profondo risultato concernente il gradiente di una distribuzione (vedi Temam [36] proposizione I.1.2, pag 14.).

Lemma 6.9. Proprietà del gradiente di una distribuzione. *Sia Ω un aperto* **limitato** *e* **regolare** *in $\Re^d$ e sia $\mathbb{T} \in \mathbb{D}'(\Omega)$ una distribuzione. Allora*

$i)$ Sussiste l'implicazione

$$\boxed{\operatorname{grad} \mathbb{T} = \mathbf{g} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d \;\Rightarrow\; \mathbb{T} = \mathbb{T}_f\,, \quad f \in \mathcal{L}^2(\Omega)\,,}$$

e vale la diseguaglianza

$$\boxed{\| \operatorname{grad} \mathbb{T}_f \|_{\mathcal{L}^2(\Omega)^d} \geq c \| f \|_{\mathcal{L}^2(\Omega)/\Re} .}$$

$ii)$ *Inoltre sussiste l'implicazione*

$$\boxed{\operatorname{grad} \mathbb{T} = \mathbf{g} \in H^{-1}(\Omega)^d \Rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{T}_f , \quad f \in \mathcal{L}^2(\Omega) ,}$$

e vale la **diseguaglianza di** NEČAS

$$\boxed{\| \operatorname{grad} \mathbb{T}_f \|_{H^{-1}(\Omega)^d} \geq c \| f \|_{\mathcal{L}^2(\Omega)/\Re} .}$$

Dim. La proprietà $i)$ è dimostrata in DENY-LIONS [13]. La fondamentale proprietà $ii)$ è dovuta a JINDŘICH NEČAS [18]. □

La prossima proposizione che è conseguenza della diseguaglianza di NEČAS, fornisce un risultato che, seppure in un contesto meno generale, è più completo di quello di DE RHAM (proposizione 3.3) in quanto comprende anche la formulazione duale.

Proposizione 6.10. Chiusura dell'immagine del gradiente e della divergenza. *Sia* Ω *un aperto* **limitato e regolare** *di* $\Re^d$ *. Allora gli operatori lineari duali*

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} &\in \mathrm{L}\left\{\mathcal{L}^2(\Omega); H^{-1}(\Omega)^d\right\} , \\ \operatorname{div} &\in \mathrm{L}\left\{H^1_o(\Omega)^d; \mathcal{L}^2(\Omega)\right\} , \end{aligned}$$

hanno immagine chiusa e soddisfano le relazioni di ortogonalità

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \operatorname{grad} = (\operatorname{Ker} \operatorname{div})^{\perp} \subset H^{-1}(\Omega)^d , \\ \operatorname{Im} \operatorname{div} = (\operatorname{Ker} \operatorname{grad})^{\perp} = \Re^{\perp} \subset \mathcal{L}^2(\Omega) . \end{cases}$$

Dim. Sia $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Per definizione risulta

$$\langle \operatorname{grad} \mathbb{T}_f , \mathbf{v} \rangle := \int_{\Omega} -f (\operatorname{div} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{D}(\Omega)^d .$$

Invocando la densità di $\mathbb{D}(\Omega)^d$ in $H^1_o(\Omega)^d$ ed identificando il prodotto di dualità in $H^{-1}(\Omega)^d \times H^1_o(\Omega)^d$ con l'unica estensione per continuità del prodotto interno in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ si deduce che

$$\langle \operatorname{grad} \mathbb{T}_f \,,\, \mathbf{v} \rangle := \int_\Omega -f\,(\operatorname{div} \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H^1_o(\Omega)^d \quad \forall\, f \in \mathcal{L}^2(\Omega)\,.$$

Poichè dom grad $= \mathcal{L}^2(\Omega)$, tale identità definisce in modo univoco l'operatore div $\in \mathrm{L}\left\{H^1_o(\Omega)^d ; \mathcal{L}^2(\Omega)\right\}$ duale di grad $\in \mathrm{L}\left\{\mathcal{L}^2(\Omega); H^{-1}(\Omega)^d\right\}$.

La diseguaglianza di NEČAS stabilisce che l'immagine dell'operatore lineare grad $\in \mathrm{L}\left\{\mathcal{L}^2(\Omega); H^{-1}(\Omega)^d\right\}$ è chiusa. Risulta infatti

$$\boxed{\| f \|_{\mathcal{L}^2(\Omega)/\Re} \geq \| \operatorname{grad} f \|_{H^{-1}(\Omega)^d} \geq c\, \| f \|_{\mathcal{L}^2(\Omega)/\Re}\,.}$$

L'asserto segue dal teorema dell'imagine chiusa, proposizione I.9.16 e dalla caratterizzazione Ker grad $= \Re$ del nucleo dell'operatore gradiente distribuzionale fornita dalla proposizione 5.3. □

Osservazione 6.2. La proposizione 6.10 può anche enunciarsi come segue

- una distribuzione $\mathbf{g} \in H^{-1}(\Omega)^d$ ammette un potenziale $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ e cioè risulta
$$\mathbf{g} = \operatorname{grad} f\,,$$
se e solo se è soddisfatta la condizione
$$\boxed{\langle \mathbf{g}\,,\, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in H^1_o(\Omega)^d \;:\; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\,,}$$

- un campo $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ è la divergenza distribuzionale di un campo $\mathbf{u} \in H^1_o(\Omega)^d$ e cioè risulta
$$f = \operatorname{div} \mathbf{u}\,,$$
se e solo se ha valor medio nullo. Infatti si ha che
$$\boxed{(f\,,\, g)_0 = 0 \quad \forall\, g \in \Re \iff \int_\Omega f = 0\,,}$$
in quanto $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)\,, \quad \operatorname{grad} g = \mathbf{o} \iff g \in \Re\,.$

Ulteriori risultati ed una decomposizione ortogonale di $\mathcal{L}^2(\Omega)$ che consente di generalizzare il classico teorema di HELMHOLTZ possono essere trovati in [44], [50]. ■

6.4. Diseguaglianze di Korn

La **diseguaglianza di** Nečas, risultato $ii)$ della proposizione 6.9, consente di pervenire in modo semplice alla celebrata **seconda diseguaglianza di** Korn.

Su tale diseguaglianza sono basati i teoremi fondamentali della statica e della cinematica in Meccanica delle Strutture ed i risultati di esistenza della soluzione dei problemi di elastostatica lineare.

Lemma 6.11. Seconda diseguaglianza di Korn. *Sia* Ω *un dominio* **limitato** *e* **regolare** *di* $\Re^d$. *Allora esiste una costante* c *tale che*

$$\boxed{\mathbb{K})\quad \| \operatorname{def} \mathbf{u} \|_0^2 + \| \mathbf{u} \|_0^2 \geq c \, \| \mathbf{u} \|_1^2 \quad \forall \, \mathbf{u} \in H^1(\Omega)\,,}$$

dove $\operatorname{def} := \operatorname{sym} \operatorname{grad}$.

Dim. Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathcal{E}(\Omega)$ definito da

$$\mathcal{E}(\Omega) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d \;:\; \operatorname{def} \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^s \right\},$$

dove $s = (d^2 + d)/2$ è la dimensione dello spazio dei tensori simmetrici su $\Re^d$. La completezza dello spazio $\mathcal{E}(\Omega)$ è assicurata dalla proposizione 3.2.

La norma in $\mathcal{E}(\Omega)$ è

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathcal{E}}^2 = \| \mathbf{u} \|_0^2 + \| \operatorname{def} \mathbf{u} \|_0^2 \,.$$

La proposizione 6.8 assicura che, per ogni $i, j, k \in \{1, \ldots, d\}$ si ha

$$\mathbf{u} \in \mathcal{E}(\Omega) \;\Rightarrow\; \operatorname{def} \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^s \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{def} \mathbf{u})_{jk} \in H^{-1}(\Omega)\,.$$

Si osservi che sussiste l'dentità

$$\boxed{\mathbb{D})\quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{def} \mathbf{u})_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\operatorname{def} \mathbf{u})_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{def} \mathbf{u})_{jk}\,.}$$

Dalla diseguaglianza di Nečas del lemma 6.9 consegue quindi che

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \in H^{-1}(\Omega) \;\Rightarrow\; \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in \mathcal{L}^2(\Omega)\,,$$

e pertanto $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d$.

Si può allora concludere che $\mathcal{E}(\Omega) = H^1(\Omega)^d$ in senso algebrico.

Poichè l'iniezione canonica da $H^1(\Omega)^d$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ è continua e suriettiva, il teorema dell'inversa continua, proposizione I.9.5 , assicura che anche l'iniezione inversa da $H^1(\Omega)^d$ su $\mathcal{E}(\Omega)$ è continua e ciò implica la validità della diseguaglianza di KORN. $\square$

La dimostrazione del lemma 6.11 è sostanzialmente tratta da quella fornita in [27], teorema III.3.2, pag 111, da cui differisce per la conclusione.

Una dimostrazione lievemente diversa, fornita in [42], proposizione I.1.1, pag 16, è basata sul seguente lemma riportato in [42] senza dimostrazione.

Lemma 6.12. *Se p è una seminorma continua su $\mathcal{L}^2(\Omega)^d$ che è una norma su $\Re^d$ e cioè se*

$$C \, \| \mathbf{u} \|_0 \geq p(\mathbf{u}) \,, \quad \mathbf{u} \in \Re^d \ \Rightarrow \ p(\mathbf{u}) = 0 \,,$$

allora per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d$ sussite l'implicazione

$$i) \quad \| \operatorname{grad} \mathbf{u} \|_{-1} \geq c \, \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{L}^2(\Omega)/\Re} \Rightarrow \ p(\mathbf{u}) + \| \operatorname{grad} \mathbf{u} \|_{-1} \geq \alpha \, \| \mathbf{u} \|_0 \,.$$

Dim. La dimostrazione può essere condotta in modo analogo a quello della proposizione I.12.5 osservando che per ogni successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega)^d$, detto $\mathbf{\Pi}_\Re$ il proiettore ortogonale in $\mathcal{L}^2(\Omega)^d$ su $\Re^d$, risulta

$$p(\mathbf{\Pi}_\Re \mathbf{u}_n) \to 0 \ \Rightarrow \ \| \mathbf{\Pi}_\Re \mathbf{u}_n \|_0 \to 0 \,,$$

in quanto p è una norma continua sul sottospazio lineare $\Re^d$ che è di dimensione finita e quindi è ivi equivalente alla norma di $\mathcal{L}^2(\Omega)^d$. $\square$

Si può allora dedurre la diseguaglianza di KORN dalla diseguaglianza di NEČAS facendo ricorso all'implicazione $i)$ del lemma 6.12. A tal fine

- si ponga $p(\mathbf{u}) = \| \mathbf{u} \|_{-1}$, norma in $H^{-1}(\Omega)^d$,
- si ponga $\operatorname{grad} \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^{d \times d}$ al posto di $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^d$ nella $i)$ del lemma 6.12,
- si ricordi dalla proposizione 6.8 che $\| \operatorname{grad} \mathbf{u} \|_{-1} \leq \| \mathbf{u} \|_0 \quad \forall \, \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Dall'identità $\mathbb{D}$ segue inoltre che

$$\| \operatorname{grad} \operatorname{grad} \mathbf{u} \|_{-1} \leq \alpha \, \| \operatorname{grad} \operatorname{def} \mathbf{u} \|_{-1} \,, \quad \forall \, \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d \,.$$

Dalla $i)$ del lemma 6.12 si trae quindi che

$$\begin{aligned}\|\operatorname{grad}\mathbf{u}\|_0 &\le c'\left[\|\operatorname{grad}\mathbf{u}\|_{-1} + \|\operatorname{grad}\operatorname{grad}\mathbf{u}\|_{-1}\right] \le \\ &\le c''\left[\|\mathbf{u}\|_0 + \|\operatorname{grad}\operatorname{def}\mathbf{u}\|_{-1}\right] \le \\ &\le c'''\left[\|\mathbf{u}\|_0 + \|\operatorname{def}\mathbf{u}\|_0\right], \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d .\end{aligned}$$

Tale diseguaglianza equivale a quella di KORN.

La seconda diseguaglianza di KORN fu dimostrata originariamente in forma diversa da quella enunciata nel lemma 6.11.

Nella successiva proposizione 6.13 si considera tale forma originaria e se ne dimostra l'equivalenza con quella del lemma 6.11.

Gli argomenti della dimostrazione sono presi dall'articolo di FICHERA [26], sez. 12, pagg. 384-385. La trattazione qui di seguito sviluppata fornisce, con alcune lievi modifiche rispetto a quella condotta in [26], la dimostrazione esplicita di tutti i risultati in essa richiamati.

Lemma 6.13. Forma originaria della seconda diseguaglianza di KORN**.** *Sia* Ω *un dominio,* **limitato** *e* **regolare** *di* $\Re^d$. *Allora esiste una costante* c *tale che*

$$\boxed{\mathbb{K}^*) \quad \|\operatorname{def}\mathbf{u}\|_0 \ge c\,\|\operatorname{grad}\mathbf{u}\|_0 \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^*(\Omega)\,,}$$

dove

$$\boxed{H^*(\Omega) := \left\{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d : \int_\Omega \operatorname{gir}\mathbf{u} = \mathbf{O}\right\},}$$

$\operatorname{def} := \operatorname{sym}\operatorname{grad}$ *e* $\operatorname{gir} := \operatorname{emi}\operatorname{grad}$ *, così che* $\operatorname{grad}\mathbf{u} = \operatorname{def}\mathbf{u} + \operatorname{gir}\mathbf{u}$.

Dim. Si stabilisca l'implicazione $\boxed{\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K}^*.}$

Si supponga valida la diseguaglianza $\mathbb{K}$ del lemma 6.11 e falsa la diseguaglianza $\mathbb{K}^*$. Esiste allora una successione $\mathbf{u}_n \in H^*(\Omega)$ tale che

$$\boxed{\|\operatorname{grad}\mathbf{u}_n\|_0 = 1\,, \quad \|\operatorname{def}\mathbf{u}_n\|_0 \to 0\,.}$$

Evidentemente è possibile assumere che gli elementi della successione abbiano valor medio nullo e cioè che

$$\int_\Omega \mathbf{u}_n = 0\,.$$

La diseguaglianza di POINCARÉ proposizione 6.4 con $m = 1$ mostra allora che

$$\| \mathbf{u}_n \|_1 \le k \| \operatorname{grad} \mathbf{u}_n \|_0 .$$

La successione $\{\mathbf{u}_n\}$ è pertanto limitata e si può assumere che essa converga ad un limite $\mathbf{u}_\infty$, debolmente in $H^1(\Omega)$ e fortemente in $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Le successioni $\{\mathbf{u}_n\}$ e $\{\operatorname{grad} \mathbf{u}_n\}$, essendo convergenti, sono di CAUCHY in $\mathcal{L}^2(\Omega)$. La diseguaglianza $\mathbb{K}$ implica allora che la successione $\{\mathbf{u}_n\}$ è di CAUCHY in $H^1(\Omega)$. Essa converge quindi a $\mathbf{u}_\infty$ in $H^1(\Omega)$ e pertanto

$$\| \operatorname{def} \mathbf{u}_n \|_0 \to 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{def} \mathbf{u}_\infty = 0 .$$

La proposizione 5.4 assicura allora che il gradiente $\operatorname{grad} \mathbf{u}_\infty$ è un tensore antisimmetrico costante nel connesso Ω. Inoltre

$$\int_\Omega \operatorname{gir} \mathbf{u}_n = 0 \;\Rightarrow \int_\Omega \operatorname{gir} \mathbf{u}_\infty = 0 , \quad \int_\Omega \mathbf{u}_n = 0 \;\Rightarrow \int_\Omega \mathbf{u}_\infty = 0 ,$$

e dunque $\mathbf{u}_\infty$ è nullo in Ω. Ciò contraddice l'ipotesi che $\| \operatorname{grad} \mathbf{u}_n \|_0 = 1$.

Si dimostri ora l'implicazione inversa $\boxed{\mathbb{K}^* \;\Rightarrow\; \mathbb{K};}$

Se fosse valida la diseguaglianza $\mathbb{K}^*$ e falsa la diseguaglianza $\mathbb{K}$, esisterebbe una successione $\mathbf{u}_n \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\boxed{\| \mathbf{u}_n \|_1 = 1 , \quad \| \operatorname{def} \mathbf{u}_n \|_0^2 + \| \mathbf{u}_n \|_0^2 \to 0 .}$$

Si consideri allora il valor medio dei campi di $H^1(\Omega)$

$$\operatorname{med}(\mathbf{u}) := \frac{1}{\operatorname{meas} \Omega} \int_\Omega \mathbf{u} ,$$

e sia $\mathbf{M}$ l'operatore lineare continuo che associa ad un campo $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ il campo costante pari a $\operatorname{med}(\mathbf{u})$.

Si ponga quindi $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{M}[\mathbf{u}]$ così che $\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{u}}] = \mathbf{o}$ e cioè $\tilde{\mathbf{u}} \in \operatorname{Ker} \mathbf{M}$.

Si osservi poi che per la diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ risulta

$$| \operatorname{med}(\mathbf{u}) | \operatorname{meas} \Omega = \left| \int_\Omega \mathbf{M}[\mathbf{u}] \right| \le \| \mathbf{u} \|_0 \operatorname{meas} \Omega ,$$

per cui

$$\| \mathbf{u}_n \|_0 \to 0 \;\Rightarrow\; \| \mathbf{M}[\mathbf{u}_n] \|_0 = |\, \mathrm{med}(\mathbf{u}_n) \,| \sqrt{\mathrm{meas}\, \Omega} \to 0 \;\Rightarrow\; \| \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0 \to 0 \,.$$

Essendo $\| \,\mathrm{grad}\, \mathbf{u} \|_0 = \| \,\mathrm{grad}\, \tilde{\mathbf{u}} \|_0$ si ha inoltre che

$$\| \mathbf{u}_n \|_1 = 1 \iff \| \,\mathrm{grad}\, \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0^2 = 1 - \| \mathbf{u}_n \|_0^2 \,.$$

Poichè $\| \mathbf{u}_n \|_0 \to 0$ esiste un $1 > \varepsilon > 0$ tale che per n abbastanza grande risulti

$$\| \,\mathrm{grad}\, \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0^2 \geq 1 - \varepsilon > 0 \,.$$

La proprietà della successione $\mathbf{u}_n \in H^1(\Omega)$ implica pertanto la proprietà

$$\boxed{\| \,\mathrm{grad}\, \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0^2 \geq 1 - \varepsilon > 0 \,, \quad \| \,\mathrm{def}\, \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0^2 + \| \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0^2 \to 0 \,.}$$

Si mostri ora che la successione $\tilde{\mathbf{u}}_n$ converge in $H^1(\Omega)$.

A tal fine si consideri il sottospazio chiuso $\mathrm{Ker}\, \mathbf{M}$ costituito dai campi di $H^1(\Omega)$ a valor medio nullo.

La diseguaglianza di Poincaré assicura che

$$\| \,\mathrm{grad}\, \mathbf{u} \|_0^2 + \left| \int_\Omega \mathbf{u} \right|^2 \geq \alpha \, \| \mathbf{u} \|_1^2 \,,$$

e quindi la norma indotta su $\mathrm{Ker}\, \mathbf{M}$ dal prodotto interno

$$|\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \,| := \int_\Omega \mathrm{grad}\, \mathbf{u} * \mathrm{grad}\, \mathbf{v} \,, \qquad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^*(\Omega) \,,$$

è equivalente a quella di $H^1(\Omega)$.

Si decomponga $\mathrm{Ker}\, \mathbf{M}$ come somma diretta del sottospazio $H^*(\Omega) \cap \mathrm{Ker}\, \mathbf{M}$ e del suo complemento ortogonale $\mathcal{R}(\Omega)$ definito da

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Omega) := \big\{ \mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\, \mathbf{M} \;:\; |\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \,| = 0 \,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in H^*(\Omega) \cap \mathrm{Ker}\, \mathbf{M} \big\} = \\ \big\{ \mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\, \mathbf{M} \;:\; |\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \,| = 0 \,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in H^*(\Omega) \big\} \,, \end{aligned}$$

in quanto sommare a $\mathbf{v} \in H^*(\Omega)$ un campo costante non altera la condizione di ortogonalità. Come sarà mostrato nel lemma 6.14, gli elementi di $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}(\Omega)$ godono della proprietà che $\mathrm{def}\, \boldsymbol{\rho} = \mathbf{o}$ e sono pertanto cinematismi rigidi semplici in virtù della proposizione 5.4.

Per ogni $\tilde{\mathbf{u}}_n \in \operatorname{Ker} \mathbf{M}$ sussiste quindi la decomposizione univoca

$$\tilde{\mathbf{u}}_n = \boldsymbol{\rho}_n + \mathbf{v}_n \,, \quad \boldsymbol{\rho}_n \in \mathcal{R}(\Omega),\, \mathbf{v}_n \in H^*(\Omega)\,,$$

e risulta

$$\begin{cases} \| \boldsymbol{\rho}_n \|_0^2 \leq 2\,(\| \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0^2 + \| \mathbf{v}_n \|_0^2)\,, \\ \| \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0^2 = \| \operatorname{grad} \boldsymbol{\rho}_n \|_0^2 + \| \operatorname{grad} \mathbf{v}_n \|_0^2 \,. \end{cases}$$

Si osservi ora che dalla diseguaglianza di Poincaré si trae che

$$\alpha \| \mathbf{v} \|_1^2 \leq \| \operatorname{grad} \mathbf{v} \|_0^2 + \left| \int_\Omega \operatorname{gir} \mathbf{v} \right| \leq \| \operatorname{grad} \mathbf{v} \|_0^2 \,, \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H^*(\Omega)\,.$$

Dunque risulta

$$\alpha \| \mathbf{v}_n \|_0^2 \leq \alpha \| \mathbf{v}_n \|_1^2 \leq \| \operatorname{grad} \mathbf{v}_n \|_0^2 \leq \| \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0^2 = \| \operatorname{grad} \mathbf{u}_n \|_0^2 \leq 1\,.$$

Poichè $\| \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0 \to 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che per n abbastanza grande risulti

$$\| \boldsymbol{\rho}_n \|_0^2 \leq 2(\eta + 1)\,.$$

Si osservi ora che le norme $\| \boldsymbol{\rho}_n \|_0$ e $\| \boldsymbol{\rho}_n \|_1$ sono equivalenti in quanto $\boldsymbol{\rho}_n \in \operatorname{Ker} \operatorname{def}$ e $\dim \operatorname{Ker} \operatorname{def} < +\infty$.

La successione $\{\boldsymbol{\rho}_n\}$ è pertanto limitata in $H^1(\Omega)$ e si può assumere che essa sia convergente debolmente in $H^1(\Omega)$ e fortemente in $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Ma allora $\{\boldsymbol{\rho}_n\}$ sarà anche fortemente convergente in $H^1(\Omega)$ ad un limite $\mathbf{u}_\infty \in H^1(\Omega)$.

Dalla diseguaglianza $\mathbb{K}^*$ si sa inoltre che

$$\| \operatorname{def} \mathbf{v}_n \|_0 \geq c \| \operatorname{grad} \mathbf{v}_n \|_0 \geq \sqrt{\alpha}\, c \| \mathbf{v}_n \|_1 \,.$$

Essendo $\operatorname{def} \boldsymbol{\rho}_n = 0$ risulta $\operatorname{def} \tilde{\mathbf{u}}_n = \operatorname{def} \mathbf{v}_n$ e quindi

$$\| \operatorname{def} \mathbf{v}_n \|_0^2 + \| \tilde{\mathbf{u}}_n \|_0^2 \to 0\,.$$

Dunque $\{\mathbf{v}_n\}$ converge a zero in $H^1(\Omega)$ e pertanto $\tilde{\mathbf{u}}_n$ converge in $H^1(\Omega)$ al limite $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{R}(\Omega)$. Poichè $\tilde{\mathbf{u}}_n$ converge a zero in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ ne segue che $\| \mathbf{u}_\infty \|_0 = 0$ e quindi anche $\| \mathbf{u}_\infty \|_1 = 0$.

Ciò è impossibile in quanto dovrebbero sussistere entrambe le condizioni contraddittorie $\| \mathbf{u}_\infty \|_1 = 0$ e $\| \mathbf{u}_\infty \|_1 \geq \| \operatorname{grad} \mathbf{u}_\infty \|_0^2 \geq 1 - \varepsilon > 0$. □

Si dimostrano ora i risultati richiamati nella dimostrazione del lemma 6.13.

Lemma 6.14. Caratterizzazione variazionale dei cinematismi rigidi. *Sia Ω un dominio* **limitato** *e* **regolare** *di* $\Re^d$. *Allora per ogni* $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ *vale l'equivalenza*

$$\boxed{\lfloor \mathbf{u}, \mathbf{v} \rfloor = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in H^*(\Omega) \iff \operatorname{def} \mathbf{u} = \mathbf{O}\,.}$$

Dim. L'implicazione

$$\operatorname{def} \mathbf{u} = \mathbf{O} \;\Rightarrow\; \lfloor \mathbf{u}, \mathbf{v} \rfloor = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in H^*(\Omega)\,,$$

è una diretta conseguenza della proposizione 5.4 in cui si è mostrato che la condizione $\operatorname{def} \mathbf{u} = \operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{O}$ implica che $\operatorname{grad} \mathbf{u}$ è un tensore antisimmetrico costante nel connesso Ω. Quindi $\mathbf{u}$ è un cinematismo rigido semplice che ammette la rappresentazione parametrica $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{x} + \mathbf{a}$ con $\boldsymbol{\Omega}$ campo tensoriale antisimmetrico costante ed $\mathbf{a}$ campo vettoriale costante.

Per dimostrare l'implicazione inversa

$$\lfloor \mathbf{u}, \mathbf{v} \rfloor = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in H^*(\Omega) \;\Rightarrow\; \operatorname{def} \mathbf{u} = \mathbf{O}\,,$$

si consideri il campo $\mathbf{u} - \mathbf{W}\,\mathbf{u}$ con $\mathbf{W}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}[\,\operatorname{gir} \mathbf{u}\,]\,\mathbf{x}$ e notiamo che

$$\operatorname{gir}(\mathbf{W}\,\mathbf{u}) = \mathbf{M}[\,\operatorname{gir} \mathbf{u}\,]\,,$$

così che

$$\mathbf{M}[\,\operatorname{gir}(\mathbf{u} - \mathbf{W}\,\mathbf{u})\,] = \mathbf{M}[\,\operatorname{gir} \mathbf{u}\,] - \mathbf{M}[\,\operatorname{gir} \mathbf{u}\,] = \mathbf{O}\,.$$

Dunque risulta $\mathbf{u} - \mathbf{W}\,\mathbf{u} \in H^*(\Omega)$ e deve essere

$$\lfloor \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{W}\,\mathbf{u} \rfloor = \lfloor \mathbf{u}, \mathbf{u} \rfloor - \lfloor \mathbf{u}, \mathbf{W}\,\mathbf{u} \rfloor = 0\,.$$

Osservando che $\operatorname{grad} = \operatorname{def} + \operatorname{gir}$ e che i valori locali dei campi def e gir sono tra loro ortogonali, la condizione precedente si può scrivere

$$\int_\Omega \operatorname{gir} \mathbf{u} * \operatorname{gir} \mathbf{u} - \int_\Omega \operatorname{gir} \mathbf{u} * \mathbf{M}[\,\operatorname{gir} \mathbf{u}\,] + \int_\Omega \operatorname{def} \mathbf{u} * \operatorname{def} \mathbf{u} = 0\,.$$

La somma dei primi due integrali è non negativa in virtù della diseguaglianza (vedi lemma 6.15)

$$\frac{1}{\operatorname{meas} \Omega} \int_\Omega \operatorname{gir} \mathbf{u} * \operatorname{gir} \mathbf{u} \;\geq\; \left(\frac{1}{\operatorname{meas} \Omega} \int_\Omega \operatorname{gir} \mathbf{u} \right) * \left(\frac{1}{\operatorname{meas} \Omega} \int_\Omega \operatorname{gir} \mathbf{u} \right).$$

Ne consegue che deve essere

$$\int_\Omega \operatorname{def} \mathbf{u} * \operatorname{def} \mathbf{u} = 0\,,$$

e dunque $\operatorname{def} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{O}$ q.o. in Ω. □

Lemma 6.15. Una diseguaglianza tra medie. *Sia Ω un aperto di $\Re^d$. Allora per ogni campo tensoriale $\mathbf{A} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^{d \times d}$ vale la diseguaglianza*

$$\frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \int_\Omega \mathbf{A} * \mathbf{A} \geq \left(\frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \int_\Omega \mathbf{A} \right) * \left(\frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \int_\Omega \mathbf{A} \right).$$

Dim. In termini delle componenti cartesiane $\mathbf{A}_{ij}$, la diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ assicura che

$$\frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \int_\Omega \mathbf{A}_{ij}\mathbf{A}_{ij} \geq \left(\frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \int_\Omega \mathbf{A}_{ij} \right)^2, \quad i,j = 1, \ldots, d.$$

La sommatoria di ambo i membri rispetto agli indici $i,j = 1, \ldots, d$ fornisce il risultato. □

La diseguaglianza di KORN consente di mostrare che l'operatore cinematico del modello del continuo tridimensionale ha immagine chiusa. Poniamo

$$\mathcal{V} := H^1(\Omega)^d, \quad H := \mathcal{L}^2(\Omega)^d, \quad \mathcal{H} := \mathcal{L}^2(\Omega)^s.$$

Allora si ha

Proposizione 6.16. Chiusura dell'immagine dell'operatore cinematico. *L'operatore cinematico* $\mathbf{B} = \operatorname{def} = \operatorname{sym}\operatorname{grad} \in \mathrm{L}\{\mathcal{V};\mathcal{H}\}$ *soddisfa la diseguaglianza*

$$\|\mathbf{Bu}\|_{\mathcal{H}} \geq c_{\mathbf{b}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}/\operatorname{Ker}\mathbf{B}} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{H},$$

e quindi ha immagine chiusa.

Dim. La continuità di $\mathbf{B}$ e la diseguaglianza di KORN consentono di scrivere

$$C_{\mathbf{K}} \|\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{V}} \geq \|\mathbf{Bu}\|^2_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{u}\|^2_H \geq c_{\mathbf{K}} \|\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{V}} \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{V}.$$

Possiamo allora dotare lo spazio $\mathcal{V}$ della norma equivalente

$$\left(\|\mathbf{Bu}\|^2_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{u}\|^2_H \right)^{1/2}.$$

Detto $\mathbf{\Pi}$ il proiettore ortogonale su $\operatorname{Ker}\mathbf{B}$ in H si deve dimostrare che

$$\|\mathbf{Bu}\|_{\mathcal{H}} \geq c \|\mathbf{u} - \mathbf{\Pi u}\|_H \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{H}.$$

Rimpiazzando $\mathbf{u}$ con $\mathbf{u} \| \mathbf{u} - \mathbf{\Pi u} \|_H^{-1}$, la diseguaglianza da dimostrare assume la forma

$$\| \mathbf{Bu} \|_{\mathcal{H}} \geq c > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \ : \ \| \mathbf{u} - \mathbf{\Pi u} \|_H = 1 \, .$$

Si procede per assurdo. Se la diseguaglianza fosse falsa esisterebbe una successione $\{\mathbf{u}_n\}$ in $\mathcal{V}$ tale che

$$\| \mathbf{u}_n - \mathbf{\Pi u}_n \|_H = 1 \, , \quad \lim_{n \to \infty} \| \mathbf{Bu}_n \|_H = 0 \, .$$

Poniamo $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{\Pi u}_n$ cosi che

$$\| \mathbf{w}_n \|_H = 1 \, , \quad \lim_{n \to \infty} \| \mathbf{Bw}_n \|_{\mathcal{H}} = 0 \, .$$

La diseguaglianza di KORN mostra che la successione $\{\mathbf{w}_n\}$ è limitata in $\mathcal{V}$. Esiste quindi, per la proprietà di compattezza debole, proposizione I.7.8, una sottosuccessione debolmente convergente ad un elemento $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$.

Il funzionale $\| \mathbf{Bv} \|_{\mathcal{H}}^2$ è continuo e convesso in $\mathcal{V}$ e pertanto debolmente inferiormente semicontinuo in virtù del teorema di MAZUR, cioè

$$\{\mathbf{w}_n\} \xrightarrow{w} \mathbf{w} \quad \text{in} \quad \mathcal{V} \ \Rightarrow \ \liminf_{n \to \infty} \| \mathbf{Bw}_n \|_{\mathcal{H}}^2 \geq \| \mathbf{Bw} \|_{\mathcal{H}}^2 \, .$$

Risulta dunque $\| \mathbf{Bw} \|_{\mathcal{H}} = \mathbf{o}$ e cioè $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}\, \mathbf{B}$. Allora $\mathbf{w} = \mathbf{\Pi w} = \mathbf{o}$.

Il principio di selezione di RELLICH, proposizione 6.1, assicura che la immersione di $\mathcal{V}$ in $\mathcal{H}$ è compatta. La convergenza debole a zero di $\{\mathbf{w}_n\}$ in $\mathcal{V}$ implica quindi la convergenza forte a zero di $\{\mathbf{w}_n\}$ in H il che è assurdo in quanto $\| \mathbf{w}_n \|_H = 1$. □

Osservazione 6.3. La dimostrazione della proposizione 6.16 è riprodotta da [27], teorema III.3.4. Tale risultato può però anche essere dedotto in modo diretto dal lemma di TARTAR, proposizione I.12.2 osservando che la diseguaglianza di KORN può scriversi

$$\boxed{\mathbb{K}) \quad \| \mathbf{Bu} \|_{\mathcal{H}} + \| \mathbf{A}_o \mathbf{u} \|_H \geq c \, \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{V}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \, ,}$$

e che

- $\mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\right\}$ è l'immersione compatta di $\mathcal{V}$ in $\mathcal{H}$,
- $\mathbf{B} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\right\}$ è continua.

Il lemma di TARTAR mostra inoltre che per la validità della seconda diseguaglianza di KORN è necessario che il nucleo $\mathrm{Ker}\, \mathbf{B}$ sia di dimensione finita. ■

Osservazione 6.4. Si noti che la formulazione originaria $\mathbb{K}^*$ della diseguaglianza di KORN può essere dedotta da quella $\mathbb{K}$ del lemma 6.11 facendo ricorso ai risultati presentati nella sezione I.12.

La proposizione I.12.5 mostra infatti che se vale la diseguaglianza di KORN $\mathbb{K}$ con $\mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{V};\mathcal{H}\right\}$ immersione compatta, allora vale la diseguaglianza

$$\boxed{\|\,\mathbf{Bu}\,\|^2_{\mathcal{H}} + \|\,\mathbf{Lu}\,\|^2_{H} \;\geq\; c\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{\mathcal{V}/(\mathrm{Ker}\,\mathbf{B}\cap\mathrm{Ker}\,\mathbf{L})} \qquad \forall\,\mathbf{u}\in\mathcal{V}\,,}$$

con $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{V};F\right\}$ operatore limitato scelto a piacere.

Definendo quindi $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{V};\mathcal{H}\right\}$ come

$$\mathbf{Lu} \,:= \int_{\Omega} \mathrm{gir}\,\mathbf{u}\,,$$

ed osservando che $\mathrm{Ker}\,\mathbf{B} \cap \mathrm{Ker}\,\mathbf{L} = \Re^d$ si ottiene che

$$\boxed{\|\,\mathbf{Bu}\,\|_{\mathcal{H}} + \|\,\mathbf{Lu}\,\|_{H} \;\geq\; c\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{\mathcal{V}/\Re^d} \quad \forall\,\mathbf{u}\in\mathcal{V}\,.}$$

Essendo quindi $\|\,\mathbf{u}\,\|_{\mathcal{V}/\Re^d} \geq \|\,\mathrm{grad}\,\|_0$ si perviene alla diseguaglianza

$$\boxed{\mathbb{K}^*) \quad \|\,\mathbf{Bu}\,\|_{\mathcal{H}} \;\geq\; c\,\|\,\mathrm{grad}\,\mathbf{u}\,\|_0 \quad \forall\,\mathbf{u}\in\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}\,,}$$

che è l'originaria forma $\mathbb{K}^*$ della diseguaglianza di KORN. ■

Osservazione 6.5.

Si denoti con $\mathbf{\Gamma}$ l'operatore che associa ai campi di $\mathcal{V}$ i corrispondenti valori al contorno (operatore di traccia).

Ponendo quindi $\mathbf{L} = \mathbf{\Gamma}$ ed osservando che $\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma} = H^1_o(\Omega)$ e che pertanto $\mathrm{Ker}\,\mathbf{B} \cap \mathrm{Ker}\,\mathbf{L} = \{\mathbf{o}\}$, si perviene alla diseguaglianza

$$\boxed{\|\,\mathbf{Bu}\,\|_{\mathcal{H}} \;\geq\; c\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{\mathcal{V}} \quad \forall\,\mathbf{u}\in\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}\,,}$$

che è la **prima diseguaglianza di** KORN. ■

7. APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE

La diseguaglianza di POINCARÉ gioca un ruolo basilare nella teoria della **approssimazione polinomiale** che è basata sul seguente semplice corollario della proposizione 6.4.

- Si denoti con $P_m(\Omega)$ lo spazio dei polinomi di grado $\leq m$ che è uno spazio lineare di dimensione finita con $\dim P_m(\Omega) = (m+d)!/(m!\,d!)$.

Proposizione 7.1. Diseguaglianza della seminorma. *Sia Ω un dominio* **regolare** *e* **limitato** *in $\mathcal{E}^d$ e $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)$ con $m \geq 1$ tale che*

$$\int_\Omega D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0\,, \quad 0 \leq |\,\mathbf{p}\,| \leq m-1\,.$$

Allora vale la diseguaglianza

$$|\,\mathbf{u}\,|_m \geq \alpha \,\|\,\mathbf{u}\,\|_m \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,,$$

con α costante positiva. □

Una diretta applicazione del lemma 7.1 consente di dimostrare l'esistenza di un polinomio approssimante.

Proposizione 7.2. Diseguglianza di approssimazione. *Sia Ω un dominio* **regolare** *e* **limitato** *in $\mathcal{E}^d$ e $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)$ con $m \geq 1$. Allora esiste un polinomio $\mathbf{\Pi}_{m-1}\mathbf{u} \in P_{m-1}(\Omega)$ tale che*

$$|\,\mathbf{u}\,|_m \geq \alpha \,\|\,\mathbf{u} - \mathbf{\Pi}_{m-1}\mathbf{u}\,\|_m \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,.$$

Dim. Si può prendere $\mathbf{\Pi}_{m-1}\mathbf{u}$ eguale all'unico polinomio tale che

$$\int_\Omega D^{\mathbf{p}}\,(\mathbf{u} - \mathbf{\Pi}_{m-1}\mathbf{u})(\mathbf{x}) = 0\,, \quad 0 \leq |\,\mathbf{p}\,| \leq m-1\,.$$

Dalla propositione 7.1 notando che

$$|\,\mathbf{u} - \mathbf{\Pi}_{m-1}\mathbf{u}\,|_m = |\,\mathbf{u}\,|_m\,,$$

si perviene al risultato. □

Ecco una differente caratterizzazione del polinomio approssimante.

Proposition 7.3. Proiezione ortogonale su $P_{m-1}(\Omega)$. *La seminorma $|\cdot|_m$ definisce nello spazio quoziente $H^m(\Omega)/P_{m-1}(\Omega)$ una norma equivalente alla norma standard mediante la diseguaglianza*

$$|\mathbf{u}|_m \geq \alpha \, \|\mathbf{u} - \mathbf{P}_{m-1}\mathbf{u}\|_m \quad \forall \mathbf{u} \in H^m(\Omega),$$

dove $\mathbf{P}_{m-1} : H^m(\Omega) \mapsto H^m(\Omega)$ è il proiettore ortogonale sul sottospazio chiuso $P_{m-1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$.

Dim. La scelta $\mathbf{P}_{m-1}\mathbf{u}$ per il polinomio approssimante è ottimale in quanto

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{P}_{m-1}\mathbf{u}\|_m = \inf_{\mathbf{p} \in P_{m-1}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{p}\|_m \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{P}\mathbf{u}\|_m \quad \forall \mathbf{u} \in H^m(\Omega),$$

ed il risultato è conseguenza della proposizione 7.2.

Si noti che la proiezione su $P_{m-1}(\Omega)$ nella norma di $H^m(\Omega)$ è equivalente alla proiezione nella norma di $H^{m-1}(\Omega)$. □

Un utile corollario della proposizione 7.2 è il seguente [30].

Proposition 7.4. Lemma di BRAMBLE-HILBERT. *Sia $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)'$ un funzionale lineare continuo su $H^m(\Omega)$ tale che*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{p} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in P_{m-1}(\Omega).$$

Allora si ha la diseguaglianza

$$|\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle| \leq c \, |\mathbf{u}|_m \quad \forall \mathbf{u} \in H^m(\Omega),$$

con c dipendente da $\mathbf{f}$ ed m.

Dim. Per ipotesi $\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} - \mathbf{P}_{m-1}\mathbf{u} \rangle$. Quindi la proposizione 7.2 mostra che

$$|\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle| \leq \|\mathbf{f}\|_m \|\mathbf{u} - \mathbf{P}_{m-1}\mathbf{u}\|_m < \alpha^{-1} \|\mathbf{f}\|_m |\mathbf{u}|_m,$$

dove la norma del funzionale f è definita da

$$\|\mathbf{f}\|_m = \sup_{\mathbf{v} \in H^m(\Omega)} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_m}.$$

Ponendo $c = \alpha^{-1} \|\mathbf{f}\|_m$ la diseguaglianza è dimostrata. □

Osservazione 7.1. La proposizione 7.3 è immediatamente deducibile dal lemma di TARTAR I.12.2. Infatti siano

- $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{H^m(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)^M\right\}$ con $M = \mathrm{card}\{\mathbf{p} \in \mathcal{N}^d \,:\, |\,\mathbf{p}\,| = m\}$ l'operatore definito da $\mathbf{A}\mathbf{u} = \{D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}\}$, con $|\,\mathbf{p}\,| = m$,
- $\mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\left\{H^m(\Omega); H^{m-1}(\Omega)\right\}$ l'operatore compatto di immersione definito da $\mathbf{A}_o\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Si ha pertanto

$$\|\,\mathbf{A}\mathbf{u}\,\|_0 = |\,\mathbf{u}\,|_m\,, \quad \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = P_{m-1}(\Omega)\,, \quad \|\,\mathbf{A}_o\mathbf{u}\,\|_{m-1} = \|\,\mathbf{u}\,\|_{m-1}\,.$$

Dalla diseguaglianza elementare

$$|\,\mathbf{u}\,|_m + \|\,\mathbf{u}\,\|_{m-1} \geq \left(|\,\mathbf{u}\,|_m^2 + \|\,\mathbf{u}\,\|_{m-1}^2\right)^{1/2} = \|\,\mathbf{u}\,\|_m \quad \forall\,\mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,,$$

segue che

$$\|\,\mathbf{A}\mathbf{u}\,\|_0 + \|\,\mathbf{A}_o\mathbf{u}\,\|_0 \geq \|\,\mathbf{u}\,\|_m \quad \forall\,\mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,.$$

Dunque per il lemma di TARTAR si ha

$$\|\,\mathbf{A}\mathbf{u}\,\|_0 \geq \alpha\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{H^m(\Omega)/\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}} \quad \forall\,\mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,,$$

e cioè

$$|\,\mathbf{u}\,|_m \geq \alpha\,\|\,\mathbf{u} - \mathbf{P}_{m-1}\mathbf{u}\,\|_m \quad \forall\,\mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,,$$

che è il risultato della proposizione 7.3. ■

Si osservi che l'ipotesi posta alla base del lemma di BRAMBLE-HILBERT impone che $\mathrm{Ker}\,\mathbf{f} \supseteq \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ con $\mathbf{A}\mathbf{u} = \{D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}\}$, $|\,\mathbf{p}\,| = m$. Pertanto il lemma di BRAMBLE-HILBERT è una semplice conseguenza del più generale risultato enunciato nel lemma I.12.7.

Si dimostra ora esplicitamente l'estensione del lemma di BRAMBLE-HILBERT (vedi [38]) che può essere dedotta come caso particolare del lemma I.12.9.

Proposizione 7.5. Lemma bilineare. *Sia* $\mathbf{a} \in \mathcal{L}\left\{H^m(\Omega); H^k(\Omega)\right\}$ *una forma bilineare continua tale che*

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{p},\mathbf{v}) = 0 \quad \forall\,\mathbf{p} \in P_{m-1}(\Omega) \quad \forall\,\mathbf{v} \in H^k(\Omega)\,,$$

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{u},\mathbf{q}) = 0 \quad \forall\,\mathbf{q} \in P_{k-1}(\Omega) \quad \forall\,\mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,.$$

Allora sussiste la diseguaglianza

$$|\,\mathbf{a}\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,| \leq\; c\,|\,\mathbf{u}\,|_m |\,\mathbf{v}\,|_k \quad \forall\,\mathbf{u} \in H^m(\Omega) \quad \forall\,\mathbf{v} \in H^k(\Omega)\,,$$

con c *dipendente da* $\mathbf{a}$, m *e* k.

Dim. Nel lemma I.12.9 si ponga

$$\mathcal{X} = H^m(\Omega)\,, \quad \mathcal{Y} = H^k(\Omega)\,, \quad E = \mathcal{L}^2(\Omega)^M\,, \quad F = \mathcal{L}^2(\Omega)^K\,,$$

con $M = \text{card}\{\mathbf{p} \in \mathcal{N}^d \;:\; |\,\mathbf{p}\,| = m\}$ $K = \text{card}\{\mathbf{p} \in \mathcal{N}^d \;:\; |\,\mathbf{p}\,| = k\}$, essendo card la cardinalità dell'insieme.

Si ponga inoltre

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \in \mathrm{L}\left\{H^m(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)^M\right\}, \\ &\mathbf{F} \in \mathrm{L}\left\{H^k(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)^K\right\}, \end{aligned}$$

definiti da

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\mathbf{u} = \{D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}\} \quad \text{con} \quad |\,\mathbf{p}\,| = m\,, \\ &\mathbf{F}\mathbf{u} = \{D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}\} \quad \text{con} \quad |\,\mathbf{p}\,| = k\,. \end{aligned}$$

Si considerino quindi gli operatori compatti di immersione

$$\mathbf{E}_o \in \mathrm{L}\left\{H^m(\Omega); H^{m-1}(\Omega)\right\}, \quad \mathbf{F}_o \in \mathrm{L}\left\{H^k(\Omega); H^{k-1}(\Omega)\right\}.$$

Allora segue che

$$\begin{aligned} &\|\,\mathbf{E}\mathbf{u}\,\|_0 + \|\,\mathbf{E}_o\mathbf{u}\,\|_0 \geq \|\,\mathbf{u}\,\|_m \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,, \\ &\|\,\mathbf{F}\mathbf{u}\,\|_0 + \|\,\mathbf{F}_o\mathbf{u}\,\|_0 \geq \|\,\mathbf{u}\,\|_k \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^k(\Omega)\,. \end{aligned}$$

Dunque per il lemma di TARTAR si ha

$$\begin{aligned} &\|\,\mathbf{E}\mathbf{u}\,\|_0 \geq \alpha_{\mathbf{E}}\, \|\,\mathbf{u}\,\|_{H^m(\Omega)/\mathrm{Ker}\,\mathbf{E}} \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,, \\ &\|\,\mathbf{F}\mathbf{u}\,\|_0 \geq \alpha_{\mathbf{F}}\, \|\,\mathbf{u}\,\|_{H^k(\Omega)/\mathrm{Ker}\,\mathbf{F}} \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^k(\Omega)\,. \end{aligned}$$

Poichè

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{E} = P_{m-1}(\Omega)\,, \quad \mathrm{Ker}\,\mathbf{F} = P_{k-1}(\Omega)\,,$$

tutte le ipotesi del lemma I.12.9 sono soddisfatte. □

7.1. Diseguaglianza di ARONSZAJN-SMITH

Si vuole ora illustrare una diseguaglianza notevole dovuta a N. ARONSZAJN e K. T. SMITH [15] e che gioca un ruolo analogo a quella di POINCARÉ in quanto fornisce il risultato fondamentale nella teoria dell'approssimazione con polinomi di cui è assegnato il grado massimo di ogni singola variabile.

- Si denoti con $\mathrm{Q}_m(\Omega)$ lo spazio dei polinomi di grado $\leq m$ in ogni singola variabile che è uno spazio lineare di dimensione finita con $\dim \mathrm{Q}_m(\Omega) = (m+1)^d$.

Ponendo $H = H^m(\Omega)$, $E = \mathcal{L}^2(\Omega)^m$, $E_o = H^{m-1}(\Omega)$, $F = \mathcal{L}^2(\Omega)$, si considerino gli operatori

- $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{H^m(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)^m\}$, operatore lineare continuo definito da $\mathbf{Au} = \{D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}\}$ con $\mathbf{p} = \{0, \ldots, m, \ldots, 0\}$,
- $\mathbf{L}_o \in \mathrm{L}\{H^m(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)\}$, immersione compatta con $\mathbf{L}_o\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

La diseguaglianza di ARONSZAJN-SMITH può allora sciversi in forma astratta

$$\| \mathbf{Au} \|_E + \| \mathbf{L}_o\mathbf{u} \|_F \geq \alpha \| \mathbf{u} \|_H \quad \forall \mathbf{u} \in H .$$

Dal lemma di TARTAR proposizione I.12.2 di deduce che $\dim \mathrm{Ker}\, \mathbf{A} < +\infty$ e che $\mathrm{Im}\, \mathbf{A}$ è chiusa in H. Infatti $\mathrm{Ker}\, \mathbf{A} = \mathrm{Q}_m(\Omega)$.

Osservazione 7.2. La diseguaglianza di ARONSZAJN-SMITH afferma che la diseguaglianza di POINCARÉ continua a sussistere se si sostituisce la seminorma $|\, \mathbf{u} \,|_m$ con quella $[\, \mathbf{u} \,]_m$ in cui si consideramo solo le derivate parziali di ordine m rispetto alle singole variabili.

E' pertanto possibile estendere il lemma di BRAMBLE-HILBERT, proposizione 7.4, ed il lemma bilineare, proposizione 7.5, sostituendo i polinomi $P_m(\Omega)$ con i polinomi $\mathrm{Q}_m(\Omega)$. ■

Si ponga ora

- $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\{H^m(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)^r\}$ operatore lineare continuo definito da

$$\mathbf{Lu} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{meas}\, \Omega}} \int_\Omega D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mu \right\},$$

dove $\mathbf{p}$ appartiene all'insieme $\mathcal{J}_m$ dei multi-indici aventi le singole componenti non maggiori di $m-1$ ed r è la cardinalità di $\mathcal{J}_m$.

Essendo $\mathrm{Ker}\, \mathbf{A} \cap \mathrm{Ker}\, \mathbf{L} = \{\mathbf{o}\}$, dalla proposizione I.12.5 si deduce che vale la diseguaglianza

$$\| \mathbf{Au} \|_E + \| \mathbf{Lu} \|_F \geq \alpha_{\mathbf{L}} \| \mathbf{u} \|_H \quad \forall \mathbf{u} \in H ,$$

che, per quanto risulti all'autore, è nuova [54].

Per $m = 2$ la forma esplicita di questa nuova diseguaglianza, scritta per semplicità in dimensione due ($d = 2$), è

$$\int_\Omega \Big(\mathbf{u}^2_{|xx} + \mathbf{u}^2_{|yy} \Big) \, \mathrm{d}\mu + \left| \int_\Omega \mathbf{u} \, \mathrm{d}\mu \right| + \left| \int_\Omega \mathbf{u}_{|x} \, \mathrm{d}\mu \right| + \left| \int_\Omega \mathbf{u}_{|y} \, \mathrm{d}\mu \right| \geq$$

$$\geq \alpha \int_\Omega \Big(\mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^2_{|x} + \mathbf{u}^2_{|y} + \mathbf{u}^2_{|xx} + \mathbf{u}^2_{|yy} + 2\, \mathbf{u}^2_{|xy} \Big) \, \mathrm{d}\mu \,,$$

per ogni $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)$.

Nella corrispondente espressione della diseguaglianza di POINCARÉ il primo integrale a sinistra sarebbe

$$\int_\Omega \Big(\mathbf{u}^2_{|xx} + \mathbf{u}^2_{|yy} + 2\, \mathbf{u}^2_{|xy} \Big) \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Questo esempio pone in evidenza che per $m = 2$ la nuova diseguaglianza è più forte della corrispondente diseguaglianza di POINCARÉ. Per $m = 1$ le due diseguaglianze coincidono e per $m > 2$ le due diseguaglianze non sono direttamente confrontabili.

RIFERIMENTI

1. F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen. Acta Math., **41**, 71-98 (1918).
2. J. Hahn, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, J. reine und angew. math., **157**, 214-229 (1927).
3. J. Schauder, Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, Stud. Math. **2**, 1-6 (1930).
4. S. Banach, Théorie des Opérations Linéaires, Monografje Matematyczne, Warsaw (1932). Reprinted by Chelsea, New York (1955)
5. F. Riesz, Zur Theorie des Hilbertschen Räumes, Acta Sci. Math., Szeged **7**, 34-38 (1934).
6. S. L. Sobolev, Sur un Théorème d'Analyse Fonctionelle, Math. Sbornik, **45**, 471-496 (1938).
7. V. L. Shmulyan, Über lineare topologische Räume, Math. Sbornik, **45**, 471-496 (1938).
8. W. F. Eberlein, Weak Compactness in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **33**, 51-53 (1947).
9. S. L. Sobolev, Applications of Functional Analysis to Mathematical Physics, Leningrad (1950), English translation: Amer. Math. Soc., Transl. Math. Mono.**7**, (1963).
10. L. Schwartz, Théorie des Distributions, vol. I et II, Hermann (1950, 1951).
11. F. Riesz, B. Sz. Nagy, Leçons d'Analyse Fonctionelle, Budapest, Akadémiai Kiadó (1952).
12. G. de Rham, Differentiable Manifolds, Forms, Currents, Harmonic Forms, Springer, Berlin (1984). Ed. orig. francese: Varietés différentiables, Hermann, Paris (1955).
13. J. Deny, J. L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **5**, 305-370 (1955).
14. L. A. Liusternik, V. J. Sobolev, Elements of Functional Analysis, Ungar, New York (1961).
15. K. T. Smith, Inequalities for formally positive integro differential forms, Bull. Amer. Math. Soc. **67**, 368-370 (1961).
16. M. Kline, Storia del pensiero matematico, vol I-II, Einaudi (1962).
17. N. Meyers, J. Serrin, $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51**, 1055-1056 (1964).
18. J. Nečas, Equations aux Dérivées Partielles, Presses de l'Université de Montréal (1965).

19. J. Nečas, Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques, Masson, Paris (1967).
20. R. S. Palais, Foundations of Global Nonlinear Analysis, Benjamin, New York (1968).
21. D. G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, John Wiley & Sons, Inc., New York (1969).
22. R. G. Kuller, Topics in Modern Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New York (1969).
23. J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York (1969).
24. O. A. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York (1969).
25. A. L. Brown, A. Page, Elements of Functional Analysis, Van Nostrand Reinhold, London (1970).
26. G. Fichera, Existence Theorems in Elasticity, Handbuch der Physik VI/a, Springer (1972).
27. G. Duvaut, J. L. Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New York (1976), tradotto da: Les inéquations en mécanique et en Physique, Dunod, Paris (1972).
28. J. P. Aubin, Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems, Wiley, New York (1972).
29. K. Yosida, Functional Analysis, Fourth Ed. Springer-Verlag, New York (1974), first ed. (1964)
30. J. H. Bramble, S. R. Hilbert, Estimation of Linear Functionals on Sobolev spaces with Application to Fourier Transform and Spline Interpolation, SIAM J. Numer. Anal., **7**, 13-24 (1970).
31. I. Babuška, The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers, *Numer. Math.*, **20**, 179-192 (1973).
32. F. Brezzi, On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems arising from Lagrangian Multipliers, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, **8**, 129-151 (1974).
33. R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).
34. R. Fiorenza, Elementi di Analisi funzionale ed Applicazioni, Appunti dalle Lezioni, Università di Napoli Federico II (1975).
35. F. Brezzi, L. D. Marini, On the Numerical Solution of Plate Bending Problems by Hybrid Methods, R.A.I.R.O Ser. Rouge Anal. Numér. **R**-3, 5-50 (1975).

36. R. Temam, Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, Studies in Mathematics and its Applications, Ed. J. L. Lions, G. Papanicolaou, R. T. Rockafellar, vol 2, North-Holland, Amsterdam (1977).
37. J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux Limites Non Homogènes (3 vol.), Dunod, Paris (1978).
38. P. G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North Holland, Amsterdam (1978).
39. M. Spivak, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol.I-V, Publish or Perish, Inc., Berkeley (1979).
40. M. E. Gurtin, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, San Diego (1981).
41. H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson Editeur, Paris (1983).
42. R. Temam, Problèmes Mathématiques en Plasticité, Gauthiers Villars, Paris (1983).
43. A. V. Balakrishnan, Introduction to Optimization Theory in a Hilbert Space, Masson Editeur, Paris (1983).
44. R. Temam, Navier-Stokes Equations, 3rd revised edition North-Holland, Amsterdam (1984).
45. C. Sbordone, Integrazione Astratta, Appendice alla traduzione italiana del testo Analisi funzionale, Teoria ed Applicazioni di H. Brezis, Liguori editore, Napoli (1986).
46. F. Brezzi, G. Gilardi, FEM MATHEMATICS, The Finite Element Handbook, Ed. H. Kardestuncer, P.**1**, ch. **1,2**, 1.1-1.120, McGraw-Hill, New York (1987).
47. R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, second edition, Springer Verlag, New York (1988).
48. F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer Verlag, New York (1991).
49. C. Lovadina, Analysis of Strain-Pressure Finite Element Methods for the Stokes Problem, Numer. Meth. Part. Diff. Eq. **13**, 7, 717-730 (1997).
50. M. Marion, R. Temam, Navier-Stokes Equations: Theory and Approximation, Elsevier Science B.V., Amsterdam (1998).
51. G. Romano, M. Diaco, A Variational Theory of Linear Structural Problems, submitted to Int. J. Sol. Str. (1999).
52. G. Romano, L. Rosati, M. Diaco, Well-Posedness of Mixed Formulations in Elasticity, ZAMM **79**, 7, 435-454 (1999).

53. G. Romano, Lezioni di Scienza delle Costruzioni, Università di Napoli Federico II, 2000.
54. G. Romano, On the necessity of Korn's inequality, Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics, STAMM 2000, National University of Ireland, Galway, July 9th-14th (2000).

INDICE ANALITICO