INDICE

PREMESSA

I – **INSIEMI E FUNZIONI** 1

1. INSIEMI 1

2. RELAZIONI ED APPLICAZIONI 3

3. SPAZI TOPOLOGICI 4

3.1. Insiemi compatti 6

3.2. Applicazioni continue e limiti 7

II – **SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE FINITA** 11

1. SPAZI DI DIMENSIONE FINITA - BASI 11

1.1. Notazione indiciale 12

2. OPERATORI LINEARI 14

2.1. Prodotto di operatori 16

2.2. Nucleo ed immagine 16

3. PRODOTTO INTERNO 18

4. CAMBIAMENTO DI BASE 21

5. TRACCIA E DETERMINANTE 23

6. ISOMETRIE 25

7. AUTOVALORI ED AUTOVETTORI 25

7.1. Sottospazi invarianti 27

7.2. Ampliamento complesso 27

7.3. Prodotto tensoriale e rappresentazione spettrale 32

8. MATRICI DI HAAR E DI GRAM 32

9. SPAZI VETTORIALI TRIDIMENSIONALI 34

III – **ALGEBRA MULTILINEARE** 37

1. FORME INVARIANTI 37

1.1. k-forme, funzioni determinante ed invarianti 37

1.2. Spazi e basi duali 41

1.3. Funzioni determinante duali 41

2. ALGEBRA TENSORIALE . . . 42
2.1. Tensori metrici . . . 43
2.2. Forme di volume . . . 45
2.3. Prodotto tensoriale . . . 47
2.4. Espressioni dei tensori metrici . . . 49
2.5. Operazioni di contrazione . . . 50
2.6. Prodotto interno tra tensori . . . 53
2.7. Forme esterne . . . 54
2.8. Stella di Hodge . . . 58
2.9. Prodotto di Gibbs . . . 60
2.10. Prodotto vettoriale . . . 62
2.11. Tensore cofattore . . . 64

IV – VARIETA’ DIFFERENZIABILI . . . 67
1. VARIETA’ MODELLATE SU $\Re^n$ . . . 67
2. CARTE ED ATLANTI . . . 68
3. RANGO E PUNTI CRITICI . . . 69
4. SPAZIO TANGENTE . . . 72
4.1. Derivazioni puntuali . . . 73
4.2. Varietà cotangenti . . . 75
5. CAMPI VETTORIALI E TENSORIALI . . . 76

V – ELEMENTI DI ANALISI VETTORIALE . . . 79
1. DERIVATE DI GATEAUX E DI FRÉCHET . . . 79
2. LEMMA DI GAUSS-GREEN . . . 82
3. TRASFORMAZIONI INTEGRALI . . . 83
3.1. Divergenza di un campo vettoriale . . . 84
3.2. Divergenza di un campo tensoriale . . . 85
3.3. Rotore di un campo vettoriale tridimensionale . . . 86
3.4. Rotore di un campo vettoriale bidimensionale . . . 88
3.5. Rotore di un campo tensoriale . . . 89

3.6. Identità notevoli 89
4. CAMPI POTENZIALI 90
5. DERIVATE NOTEVOLI 91
5.1. Derivata del determinante 92
5.2. Derivata dell'operatore di inversione 93

VI – SPAZI FUNZIONALI 95
1. SPAZI METRICI 95
2. SPAZI NORMATI 95
2.1. Applicazioni lineari continue e spazi normati duali 96
3. SPAZI DI HILBERT 97
3.1. Proiezione ortogonale 99
3.2. Duale di uno spazio di Hilbert 103
3.3. Successioni ortonormali complete 106
3.4. Spazi di Hilbert quoziente 108
3.5. Spazi prodotto 109
3.6. Convergenza debole 109
3.7. Teoremi di Banach 110

VII – DISTRIBUZIONI 113
1. FUNZIONI GENERALIZZATE 113
1.1. Notazione multi-indiciale 113
1.2. Funzioni di prova 114
1.3. Distribuzioni 115
2. DERIVATE GENERALIZZATE 117
2.1. Impulsi e dipoli 119

VIII – PROBLEMI AL CONTORNO 121
1. SPAZI DI SOBOLEV 121
1.1. Spazi di Beppo Levi e di Sobolev 121
1.2. Operatori ellittici e soluzioni deboli 125

2. VALORI AL CONTORNO 128
2.1. Operatore di traccia 128
2.2. Formula di Green 132
2.3. Diseguaglianza di Korn 135
2.4. Formula di rappresentazione 138

IX – ELEMENTI DI TEORIA DEL POTENZIALE 141
1. TEORIA DEL POTENZIALE NEWTONIANO 141
1.1. Prodotto di convoluzione e potenziale Newtoniano 145
1.2. Potenziali scalare e vettore. Teorema di Helmholtz 146
2. POTENZIALE LOGARITMICO 149
RIFERIMENTI
INDICE ANALITICO 153
INDICE DELLE NOTE BIOGRAFICHE 159

PREMESSA

Questo Tomo Zero è l'avanguardia di un opera in due volumi (Tomi I e II) dedicata ad una presentazione moderna dei principi e dei metodi della Scienza delle Costruzioni.

Ho ritenuto utile raccogliere in questo volume propedeutico nozioni e risultati di matematica che trovano applicazione in meccanica delle strutture, con l'intendimento di fornire al lettore una panoramica di concetti e di metodi, presentati anche in modo originale, che possa essere consultata nel corso della lettura dei Tomi I e II.

La selezione di argomenti prescelti comprende sia nozioni elementari che risultati più specialistici ed avanzati. Le parti più impegnative sono dedicate a chi è interessato ad approfondire le tematiche strutturali che richiedono una base matematica di maggior spessore.

La presentazione dei risultati classici è organizzata in modo da proporre spesso le dimostrazioni come problemi posti al lettore, fornendo i riferimenti bibliografici essenziali per consentirne la soluzione.

Napoli, settembre 2001 Giovanni Romano

I – INSIEMI E FUNZIONI

1. INSIEMI

Si richiama preliminarmente il significato dei simboli adottati.

SIMBOLO	SIGNIFICATO
$\in$	appartiene a
$:=$	definito da
$:$	tale che
$\mid$	che soddisfa la proprietà
$\forall$	per ogni
$\exists$	esiste un
$\iff$	equivale a
$\Rightarrow$	implica che

Sia $\mathcal{X}$ un insieme ed $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sottoinsiemi di $\mathcal{X}$.
Il *complemento* di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{A}$ è l'insieme definito da

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \ : \ \mathbf{x} \in \mathcal{A} \,, \, \mathbf{x} \notin \mathcal{B} \right\} ,$$

Si dice anche che $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ è la differenza di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e si legge $\mathcal{A}$ *meno* $\mathcal{B}$.

Si scrive inoltre

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ se ogni elemento di $\mathcal{A}$ appartiene anche a $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ incluso in $\mathcal{B}$).

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ incluso in $\mathcal{B}$ in senso stretto).

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di un insieme $\mathcal{X}$.
Allora si dice

- unione della famiglia $\mathcal{F}$ l'insieme
$$\bigcup_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} := \big\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \exists\, \mathcal{A} \in \mathcal{F} \,:\, \mathbf{x} \in \mathcal{A}\big\}\,,$$
- intersezione della famiglia $\mathcal{F}$ l'insieme
$$\bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} := \big\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A} \quad \forall\, \mathcal{A} \in \mathcal{F}\big\}\,.$$

Il simbolo $\mid$ significa *che soddisfa la proprietà,*

Valgono le relazioni
$$\mathcal{A} \cap \bigcup_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}} \mathcal{B} = \bigcup_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}} (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})\,,$$
$$\mathcal{A} \cup \bigcup_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}} \mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}} (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})\,,$$
e le formule di DE MORGAN [1]
$$\mathcal{A} \setminus \bigcup_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}} \mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}} (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B})\,,$$
$$\mathcal{A} \setminus \bigcap_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}} \mathcal{B} = \bigcup_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}} (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B})\,.$$
La definizione degli insiemi basate sulle proprietà dei loro elementi è delicata. A tale proposito si noti un famoso paradosso di RUSSELL [2]

Paradosso di BERTRAND RUSSELL (1901)

- Sia $\mathcal{S}$ l'insieme definito da
$$\mathcal{S} := \big\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ è un insieme e } \mathcal{A} \notin \mathcal{A}\big\}\,.$$

Allora $\mathcal{S} \in \mathcal{S} \ \Rightarrow\ \mathcal{S} \notin \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \notin \mathcal{S} \ \Rightarrow\ \mathcal{S} \in \mathcal{S}$.

---

[1] AUGUSTUS DE MORGAN (1806-1871). Professore di matematica all'University College di Londra, logico matematico ed algebrista.

[2] BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872-1970). Gallese di nascita e nipote di LORD JOHN RUSSELL che fu primo ministro sotto la regina VITTORIA. Studiò al Trinity College di Cambridge, fu condannato ed imprigionato per attività contro la guerra a causa delle sue idee pacifiste. Per tale motivo dovette lasciare il Trinity College. Ottenne il Premio Nobel per la Letteratura nel 1950. Insieme a KURT GÖDEL, è considerato il maggior studioso di logica del XX secolo ed è stato uno dei fondatori della logica matematica.

2. RELAZIONI ED APPLICAZIONI

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due insiemi. Si dice

- insieme *prodotto cartesiano* di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ l'insieme $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ delle coppie ordinate $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ con $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$,
- *grafico di una relazione* $\mathcal{R}$ tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Una relazione $\mathcal{R}$ è detta

- *riflessiva* se $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} \in \mathcal{R}$,
- *simmetrica* se $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R} \ \Rightarrow \ \{\mathbf{y}, \mathbf{x}\} \in \mathcal{R}$,
- *antisimmetrica* se $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R},\ \{\mathbf{y}, \mathbf{x}\} \in \mathcal{R} \ \Rightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- *transitiva* se $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R},\ \{\mathbf{y}, \mathbf{z}\} \in \mathcal{R} \ \Rightarrow \ \{\mathbf{x}, \mathbf{z}\} \in \mathcal{R}$.

Una relazione $\mathcal{R}$ è detta

- di *equivalenza* se è *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*,
- d'*ordine parziale* se è *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva*.

Una relazione d'ordine parziale su un insieme $\mathcal{X}$ è detta un *ordine totale* o *ordine lineare* se per ogni $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{X}$ si ha $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R}$ oppure $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}\} \in \mathcal{R}$.

Osservazione 2.1. Un insieme parzialmente ordinato è detto un *insieme diretto* se vale la condizione

$$\mathbf{a}\,,\mathbf{b} \in \mathcal{X} \ \Rightarrow \ \exists\ \mathbf{c} \in \mathcal{X}\ :\ \mathbf{a} \prec \mathbf{c}\,,\ \mathbf{b} \prec \mathbf{c}\,.$$

La nozione di insieme diretto consente di definire il limite generalizzato di una mappa (eventualmente multivoca) definita su di un insieme diretto.

Un esempio classico è l'integrale di RIEMANN [3] (vedi [17], par. IV,2). ■

Il grafico di una relazione tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ è un *grafico funzionale* in $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ se

$$\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1\} \in \mathcal{R}\,, \\ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}_2\} \in \mathcal{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2\,.$$

Un grafico funzionale è anche detto *applicazione*, *funzione*, *mappa*, *trasformazione*, *operatore* da $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$, denotato con $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ e definito da

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \iff \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R}\,.$$

Si definiscano quindi

---

[3] GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866). Allievo di GAUSS, succedette a DIRICHLET come professore di matematica a Göttingen. Fondamentali i suoi contributi alla geometria differenziale ed alla teoria delle funzioni di variabile complessa.

- il *dominio* di $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$

$$\operatorname{dom} \mathbf{T} := \big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \exists \, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \; : \; \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R} \big\} \,,$$

- l'*immagine* o *codominio* di $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$

$$\operatorname{Im} \mathbf{T} := \big\{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \mid \exists \, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \; : \; \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{R} \big\} \,,$$

- l'*immagine inversa* o *controimmagine* tramite $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ di un sottoinsieme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Y}$

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{S}) := \big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{T}(\mathbf{x}) \in \mathcal{S} \big\} \,.$$

L'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è

- *iniettiva* se

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{T}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y} \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \,,$$

- *suriettiva* se

$$\forall \, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \quad \exists \, \mathbf{x} \in \mathcal{A} \; : \; \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \,.$$

In tal caso si dice che l'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è da $\mathcal{X}$ su $\mathcal{Y}$.

Una applicazione iniettiva e suriettiva su $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ è detta una *corrispondenza biunivoca* tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.

Siano $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sottoinsiemi di $\mathcal{X}$ e $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ un'applicazione da $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$. Allora

$$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathbf{T}(\mathcal{A}_2) \,.$$

e si ha che

$$\mathbf{T}(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \subseteq \mathbf{T}(\mathcal{A}_1) \cap \mathbf{T}(\mathcal{A}_2) \,,$$

$$\mathbf{T}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \mathbf{T}(\mathcal{A}_1) \cup \mathbf{T}(\mathcal{A}_2) \,.$$

Se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono sottoinsiemi di $\mathcal{Y}$ risulta

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_2) \,,$$

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1) \cap \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_2) \,,$$

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1) \cup \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_2) \,,$$

ed inoltre

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_2) = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_2) \setminus \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_1) \,.$$

Per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Y}$ si ha inoltre che

$$\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B})) = \mathcal{B} \cap \mathbf{T}(\mathcal{X}) \,,$$

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}(\mathcal{A})) \supseteq \mathcal{A} \,.$$

- Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \Re$ a valori reali è detta un *funzionale*.

3. SPAZI TOPOLOGICI

Uno *spazio topologico* è una coppia $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}\}$ costituita da un insieme $\mathcal{X}$ e da una famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di $\mathcal{X}$, detti gli *insiemi aperti* di $\mathcal{X}$, tale che

- l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme $\mathcal{X}$ sono aperti,
- l'unione di ogni famiglia di aperti è un aperto,
- l'intersezione di ogni famiglia finita di aperti è un aperto.

La famiglia $\mathcal{T}$ è detta una *topologia* su $\mathcal{X}$.

I complementari degli aperti sono gli *insiemi chiusi* e pertanto

- l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme $\mathcal{X}$ sono chiusi (e aperti),
- l'unione di ogni famiglia finita di chiusi è un chiuso,
- l'intersezione di ogni famiglia di chiusi è un chiuso.

Per semplicità spesso uno spazio topologico è denotato dal solo insieme $\mathcal{X}$ omettendo di indicare esplicitamente la topologia $\mathcal{T}$.

Si danno le seguenti definizioni.

- Un *intorno aperto* di sottoinsieme $\mathcal{S}$ non vuoto di $\mathcal{X}$ è un insieme aperto che contiene $\mathcal{S}$.
- Un *intorno* di $\mathcal{S}$ è un insieme che contiene un intorno aperto di $\mathcal{S}$.
- Un *intorno* di un elemento $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ è quindi un sottoinsieme di $\mathcal{X}$ che contiene un aperto cui appartiene $\mathbf{x}$.
- Un *sistema fondamentale di intorni* di $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ è una famiglia di intorni di $\mathcal{S}$ tale che ogni intorno di $\mathcal{S}$ contiene un elemento della famiglia.
- Si dice *base della topologia* $\mathcal{T}$ un sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tale che ogni aperto di $\mathcal{T}$ è l'unione di elementi di $\mathcal{B}$.
- Un elemento $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ è un *punto limite* o *di accumulazione* di un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ se ogni intorno di $\mathbf{x}$ contiene almeno un elemento di $\mathcal{A} \setminus \{\mathbf{x}\}$.
- Un elemento $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ è un *punto isolato* di $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ se non è di accumulazione per $\mathcal{A}$.
- L'*aderenza* di un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ è l'insieme degli elementi di $\mathcal{X}$ il cui intorno contiene almeno un punto di $\mathcal{A}$.
- La *chiusura* $\overline{\mathcal{A}}$ di $\mathcal{A}$ è l'intersezione dei chiusi che contengono $\mathcal{A}$.
- L'*interno* $\overset{\circ}{\mathcal{A}}$ di $\mathcal{A}$ è l'unione degli aperti contenuti in $\mathcal{A}$.
- La *frontiera* $\mathrm{fr}\mathcal{A}$ di $\partial\mathcal{A}$ di $\mathcal{A}$ è l'insieme degli elementi di $\overline{\mathcal{A}}$ che non appartengono ad $\overset{\circ}{\mathcal{A}}$ e cioè $\partial\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \cap (\overline{\mathcal{X} \setminus \mathcal{A}})$. Dunque $\partial\mathcal{A}$ è chiuso.
- Un sottoinsieme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ è detto *denso* in $\mathcal{X}$ se la sua chiusura $\overline{\mathcal{S}}$ in $\mathcal{X}$ coincide con $\mathcal{X}$.

Valgono le seguenti proprietà

- Un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ è aperto se e solo se contiene un intorno di ogni suo punto.
- Un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ è chiuso se e solo se contiene i suoi punti di accumulazione.

Sia $\mathcal{S}$ è un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{X}$. La topologia di $\mathcal{X}$ induce su $\mathcal{S}$ una topologia, detta la *topologia relativa* su $\mathcal{S}$, costituita dall'intersezione degli aperti di $\mathcal{X}$ con $\mathcal{S}$.

Lo spazio topologico così generato si denota ancora con $\mathcal{S}$ e viene detto un *sottospazio topologico* di $\mathcal{X}$.

- Ogni proprietà di uno spazio topologico $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}\}$ che dipende solo dalla topologia $\mathcal{T}$ è detta una *proprietà topologica*.

Le proprietà topologiche in $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}\}$ sono quindi quelle che possono essere espresse compiutamente in termini degli insiemi aperti (o degli insiemi chiusi) di $\{\mathcal{X}, \mathcal{T}\}$.

Una topologia è detta *separante* (o di HAUSDORFF [4]) se soddisfa il seguente

> *Assioma di separazione di* HAUSDORFF
> - per ogni coppia $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ di punti distinti di $\mathcal{X}$ esiste un coppia di aperti disgiunti $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2\}$ tali che $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{O}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{O}_2$.

■ Uno *spazio topologico lineare* è uno spazio lineare in cui è definita una topologia rispetto alla quale le operazioni lineari sono continue.

■ Un sottoinsieme $\mathcal{Y}$ di uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto *limitato* se è assorbito da ogni intorno $\mathcal{U}$ di $\mathbf{o} \in \mathcal{X}$, cioè se $\exists\, \alpha > 0 \ : \ \mathcal{B} \subseteq \alpha\,\mathcal{U}$.

3.1. Insiemi compatti

Il classico teorema di BOLZANO [5] -WEIERSTRASS [6] assicura che

■ da ogni successione limitata in $\Re^n$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.

---

[4] FELIX HAUSDORFF (1868-1942). Matematico tedesco cui si devono contributi fondativi della moderna topologia.

[5] BERNARD PLACIDUS JOHANN NEPOMUK BOLZANO (1781-1848). Prete, matematico e filosofo boemo cui sono dovuti concetti fondativi per l'Analisi moderna. Anticipò il concetto di successione convergente indipendentemente formulato da CAUCHY 4 anni dopo, e pose le basi per la teoria dell'infinito sviluppata poi da CANTOR.

[6] KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815-1897). Matematico autodidatta. Professore all'Università di Berlino insieme a KUMMER ed a KRONECKER E' a ragione considerato il fondatore dell'Analisi moderna. Suoi allievi famosi furono CANTOR, ENGEL, FROBENIUS, HÖLDER, HURWITZ, KILLING, KLEIN, LIE, MINKOWSKI, MITTAG-LEFFLER, SCHWARZ e SOFIA KOVALEVSKAYA.

Questo fondamentale risultato ha motivato l'introduzione del seguente concetto di compattezza, dovuto a M. FRÉCHET [7]

- Uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto *sequenzialmente compatto* se da ogni successione è possibile estrarre una convergente.

Ai matematici sovietici P.S. ALEXANDROV [8] e P.S. URYSOHN [9] è dovuto invece il moderno concetto di compattezza di un insieme in uno spazio topologico, motivato dall'astrazione del seguente teorema di BOREL [10] .

Proposizione 3.1. Teorema di BOREL**.** *Siano* $I \subset \Re$ *un intervallo chuso e limitato e* $\mathcal{J}$ *una famiglia di intervalli aperti la cui unione contiene* I *. Allora esiste una sottofamiglia finita di* $\mathcal{J}$ *la cui unione contiene* I *.* $\square$

Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detta un *ricoprimento* di $\mathcal{X}$ se

$$\mathcal{X} \subseteq \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}} \mathcal{A}\,.$$

Se gli insiemi in $\mathcal{F}$ sono aperti, $\mathcal{F}$ è detto un *ricoprimento aperto*.
Se la famiglia $\mathcal{F}$ è finita, $\mathcal{F}$ è detto un *ricoprimento finito*.

- Uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto *compatto* se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.
- Uno spazio topologico $\mathcal{X}$ è detto *localmente compatto* se ogni punto dello spazio ha un intorno compatto.
- Sia $\mathcal{S}$ un sottoinsieme di uno spazio topologico $\mathcal{X}$.

Allora:
$\mathcal{S}$ compatto $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ chiuso ed inoltre $\mathcal{X}$ compatto e $\mathcal{S}$ chiuso $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ compatto .

3.2. Applicazioni continue e limiti

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due spazi topologici.

- Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è detta *continua nel punto* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ se per ogni intorno V di $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ esiste un intorno $\mathcal{U}$ di $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{T}(\mathcal{U}) \subseteq V$.
- Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è detta *continua* se è continua in ogni punto di $\mathcal{X}$.

---

[7] MAURICE RENÉ FRÉCHET (1878-1973). Eminente matematico francese allievo di HADAMARD che ha portato contributi fondativi alla topologia ed alla teoria degli spazi astratti. Importanti anche i contributi portati alla statistica, alla probabilità ed al calcolo.

[8] PAVEL SERGEEVICH ALEXANDROV (1896-1982). Illustre matematico russo cui sono dovuti fondamentali contributi alla moderna topologia. Allievo di EMMY NOETHER e di HILBERT a Göttingen, di BROUWER ad Amsterdam e di LUZIN ed EGOROV a Mosca

[9] PAVEL SAMUILOVICH URYSOHN (1898-1924). Collega ed amico di ALEXANDROV, morì prematuramente durante una nuotata nell'atlantico sulla costa francese.

[10] EMILE BOREL (1871-1956). Uno dei principali matematici francesi del XX secolo.

Proposizione 3.2. Applicazioni continue. *Un'applicazione* $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ *con* $\mathrm{dom}\, \mathbf{T} = \mathcal{X}$ *è continua se e solo se*

$$i) \quad \mathcal{A} \quad \text{aperto in } \mathcal{Y} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{A}) \quad \text{aperto in } \mathcal{X} \,,$$

$$ii) \quad \mathcal{A} \quad \text{chiuso in } \mathcal{Y} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{A}) \quad \text{chiuso in } \mathcal{X} \,.$$

$$iii) \quad \mathbf{T}(\overline{\mathcal{A}}) \subseteq \overline{\mathbf{T}(\mathcal{A})} \quad \forall\, \mathcal{A} \in \mathcal{X} \,.$$

□

Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è detta *aperta* (*chiusa*) se

$$\mathcal{A} \quad \text{aperto (chiuso) in } \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathcal{A}) \quad \text{aperto (chiuso) in } \mathcal{Y} \,.$$

Si diano ora le seguenti definizioni.

- Un'applicazione biettiva e continua $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ tale che $\mathbf{T}^{-1} : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{X}$ è continua è detta un *omeomorfismo* tra gli spazi topologici $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.

Un omeomorfismo è un'applicazione sia aperta che chiusa.

Dalla proposizione 3.2 si deduce che due *spazi topologici omeomorfi* $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ hanno le stesse proprietà topologiche in quanto esiste una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi aperti dei due spazi.

- Si dice che un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ ha *limite* $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ nel punto $\mathbf{x}_o \in \overline{\mathrm{dom}\, \mathcal{A}}$, o che tende a $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ per $\mathbf{x}$ tendente a $\mathbf{x}_o \in \overline{\mathrm{dom}\, \mathcal{A}}$, se l'applicazione $\overline{\mathbf{T}} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ definita da
$$\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, \mathbf{T} \,, \\ \mathbf{y} & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}_o \,, \end{cases}$$
è continua nel punto $\mathbf{x}_o$. Si scrive allora
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_o} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \,,$$
ovvero
$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_o \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathbf{x}) \to \mathbf{y} \,.$$

La continuità di una applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ in un punto $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, \mathbf{T} \subseteq \mathcal{X}$ puo anche essere espressa imponendo che

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_o} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_o) \,.$$

Per il limite di una successione si adottano le notazioni

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_o \,,$$

oppure

$$n \to \infty \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_o \,.$$

Se $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ tende a $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ nel punto $\mathbf{x}_o$ si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{T}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y} \,,$$

oppure

$$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_\infty \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{T}(\mathbf{x}_\infty) \,.$$

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due spazi topologici lineari.

Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è detta *lineare* se è

- additiva: $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y}) \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$,
- omogenea: $\mathbf{T}(\alpha\, \mathbf{x}) = \alpha\, \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,, \alpha \in \Re$.

- Un'applicazione lineare $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ che instaura una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ è detta un *isomorfismo*.
- Un'applicazione lineare $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \Re$ a valori reali è detta una *forma lineare* o un *funzionale lineare*.
- Un'applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mapsto \Re$ a valori reali che sia separatamente lineare rispetto a $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ è detta una *forma bilineare* o un *funzionale bilineare*.

Analogamente si definisce una *forma multilineare*.

- La restrizione di una forma bilineare $\mathbf{T} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mapsto \Re$ alla diagonale di $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ definita da

$$\mathrm{diag}\, \mathcal{X} \; := \big\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \big\}$$

è detta una *forma quadratica* o un *funzionale quadratico*.

Analogamente si definiscono le forme cubiche, etc., di ordine n .

Si notino le seguenti proprietà delle trasformazioni continue. (vedi ad es. [26]).

Proposizione 3.3. Continuità e limitatezza. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi topologici. Allora ogni applicazione $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ lineare e continua mappa un qualsiasi insieme limitato di $\mathcal{X}$ in un insieme limitato di $\mathcal{Y}$, e cioè*

$$\boxed{\mathcal{B} \quad \text{limitato in } \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathcal{B}) \quad \text{limitato in } \mathcal{Y} \,.}$$

□

Proposizione 3.4. Continuità e compattezza. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi topologici. Allora ogni applicazione continua $\mathbf{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ mappa un qualsiasi insieme compatto di $\mathcal{X}$ in un insieme compatto di $\mathcal{Y}$, e cioè*

$$\boxed{\mathcal{A} \quad \text{compatto in } \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathbf{T}(\mathcal{A}) \quad \text{compatto in } \mathcal{Y} \,.}$$

□

■ *Principi di estensione*
Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi metrici con $f, g \in C(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ funzioni continue e sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme denso in $\mathcal{X}$, cioè tale che $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{X}$. Allora

- *estensione delle eguaglianze*:

$$i) \quad f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,,$$

- *estensione delle diseguaglianze*:

$$ii) \quad f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\,.$$

Per dimostrare l'implicazione $i)$ basta osservare che dalla continuità di $f-g$ segue che il sottoinsieme $(f-g)^{-1}(\mathbf{o}) \subseteq \mathcal{X}$ è chiuso. Essendo poi $\mathcal{A} \subseteq (f-g)^{-1}(\mathbf{o}) \subseteq \mathcal{X}$ risulta $\overline{\mathcal{A}} = (f-g)^{-1}(\mathbf{o}) = \mathcal{X}$. Analogamente si dimostra la $ii)$.

La proprietà di compattezza consente di individuare una classe di operatori lineari tra due spazi normati $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ che godono di importanti proprietà.

- Un operatore *lineare* $\mathbf{L} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è *compatto* se per ogni successione limitata $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathcal{X}$ la successione $\{\mathbf{L}\mathbf{x}_n\} \subset \mathcal{Y}$ ammette una sottosuccessione convergente in $\mathcal{Y}$.

II – SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE FINITA

Si definisce *spazio vettoriale* (o *lineare*) un insieme V di elementi, detti *vettori*, su cui è definita una struttura algebrica costituita dalle operazioni lineari

$i)$ addizione tra vettori: $\mathbf{a} + \mathbf{b}\,, \qquad \mathbf{a}\,, \mathbf{b} \in V\,,$

$ii)$ moltiplicazione tra uno scalare ed un vettore: $\alpha\,\mathbf{a}\,, \qquad \alpha \in \Re\,, \quad \mathbf{a} \in V\,,$

con le proprietà usuali ($\Re$ è il campo dei numeri reali).

Un *sottospazio vettoriale* o *sottospazio lineare* $\mathcal{S} \subseteq V$ è un sottoinsieme di V chiuso rispetto alle operazioni definite in V e cioè tale che le operazioni lineari definite in $\mathcal{S}$ diano luogo a risultati appartenenti a $\mathcal{S}$.

Dati due spazi vettoriali U e V la *funzione* (detta anche *mappa, applicazione, operatore,trasformazione*) $\mathbf{A}\!: U \mapsto V$ è *lineare* se soddisfa le proprietà

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha\,\mathbf{u}) &= \alpha\,\mathbf{A}(\mathbf{u}) && \text{(omogeneità)} \\ \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}(\mathbf{v}) && \text{(additività)} \end{aligned}$$

Se $V \equiv \Re$ e cioè i valori sono numeri reali, l'operatore è anche detto una *forma*.

Un operatore lineare biunivoco si dice un *isomorfismo*.

$Esercizio$

- Verificare che, dati due spazi vettoriali U e V, l'insieme degli operatori lineari $\mathbf{A} : U \mapsto V$ costituisce uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni lineari definite da

  $i)$ addizione tra operatori: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u}\,, \quad \forall\,\mathbf{u} \in U\,,$

  $ii)$ moltiplicazione tra uno scalare ed un operatore:

$$(\alpha\,\mathbf{A})\,\mathbf{u} = \alpha\,(\mathbf{A}\mathbf{u})\,, \quad \alpha \in \Re\,, \mathbf{u} \in U\,.$$

Lo spazio degli operatori lineari $\mathbf{A} : U \mapsto V$ è denotato da $\mathrm{L}\left\{U\,;\,V\right\}$.

Un operatore lineare tra due spazi vettoriali finitamente generabili ed aventi la stessa dimensione costituisce un *tensore* del secondo ordine.

1. SPAZI DI DIMENSIONE FINITA - BASI

Si dice *generatore finito* un insieme finito di vettori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ tale che ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ si può scrivere come combinazione lineare di tali vettori, e cioè

$$\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{e}_1 + u_2\,\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\,\mathbf{e}_n\,.$$

Se esiste un generatore finito lo spazio si dice di *dimensione finita* o *finitamente generabile*.

Si definisce *base* ogni generatore minimale e cioè tale che una sua parte propria non può essere un generatore.

La *dimensione* è il numero di vettori di ogni base (tutte le basi hanno infatti lo stesso numero di vettori).

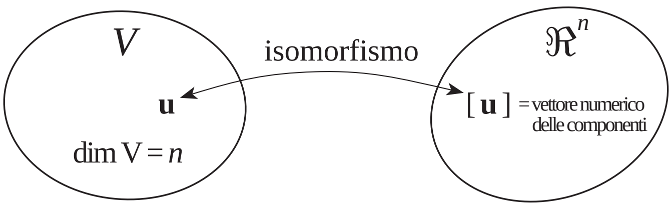
Ogni vettore può esprimersi in maniera univoca come combinazione lineare dei vettori di una base.

Fissata una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ per uno spazio vettoriale V di dimensione n il vettore numerico

$$[\,\mathbf{u}\,] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},$$

si dice il vettore delle *componenti* di $\mathbf{u}$ rispetto a tale base.

La corrispondenza tra i vettori di uno spazio vettoriale ed i vettori delle componenti rispetto ad una base è lineare e biunivoca (è dunque un isomorfismo).



Sia $\Re^n$ lo spazio vettoriale numerico costituito dalle n-uple ordinate di numeri reali. La dimensione di $\Re^n$ è n, come può rilevarsi osservando che gli n vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

costituiscono una base, detta la base usuale di $\Re^n$.

E' da notare che le componenti di un vettore numerico rispetto alla base usuale sono proprio i numeri della n-upla che costituisce il vettore.

1.1. Notazione indiciale

Per snellire le formule si adotterà nel seguito la convenzione, detta *dell'indice ripetuto* o di EINSTEIN [11], secondo la quale in un'espressione algebrica su ogni termine in cui è presente due volte lo stesso indice va effettuata una sommatoria facendo variare l'indice nel suo insieme di variazione.

Ad esempio si ha che

$$u_i \, \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \mathbf{e}_i \, .$$

Si introducono inoltre i seguenti simboli:

- Simbolo o *delta* di KRONECKER [12]:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

- Simbolo o *alternatore* di RICCI [13]:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se } i, j, k \text{ non sono tutti distinti} \\ 1 & \text{se } \{i, j, k\} \text{ è una permutazione pari di } \{1, \ldots, n\} \\ -1 & \text{se } \{i, j, k\} \text{ è una permutazione dispari di } \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

[11] ALBERT EINSTEIN (1879-1955). Nato a Munich da famiglia ebrea, studiò violino dai 6 ai 13 anni. Nel 1894 la famiglia si trasferì a Milano, ma egli condusse gli studi a Monaco e poi a Zurigo presso la *Eidgenössische Technische Hochschule* dove ebbe come collega MARCEL GROSSMANN (1878-1936). Nel 1900 conseguì l'abilitazione all'insegnamento della matematica e della fisica, ma non riuscendo a trovare posto in una Università andò a lavorare a Berna in un ufficio brevetti, dove rimase fino al 1909. Nel 1905 conseguì il dottorato dell'Università di Zurigo con la tesi *On a new determination of molecular dimensions* che dedicò a GROSSMANN. Nello stesso anno pubblicò 5 lavori, dedicati alla teoria dei quanti di MAX PLANCK, alla teoria speciale della relatività, all'equivalenza tra massa ed energia ed alla meccanica statistica di LUDWIG BOLTZMANN e JOSIAH GIBBS. Nel 1908 divenne lettore all'Università di Berna e l'anno successivo professore di fisica all'Università di Zurigo. Nel 1911 ottenne la cattedra all'Università Karl-Ferdinand di Praga. Nel 1912 ebbe la cattedra alla Eidgenössische Technische Hochschule di Zurigo. Nello stesso anno con l'aiuto dell'amico matematico MARCEL GROSSMANN iniziò laformulazione della teoria generale della relatività facendo ricorso al calcolo tensoriale di GREGORIO RICCI-CURBASTRO e TULLIO LEVI-CIVITA. Nel 1914 gli fu offerto un posto alla Accademia delle Scienze Prussiane ed una cattedra senza doveri didattici all'Università di Berlino. Nel 1915 dopo alcune false partenze EINSTEIN completò la versione finale della teoria della relatività generale, gioiendo del fatto che aveva convinto della correttezza delle sue idee HILBERT e KLEIN. Solo una settimana prima HILBERT aveva infatti fornito la formulazione corretta delle equazioni della relatività generale. Nel 1921 EINSTEIN ricevette il Premio Nobel per il suo lavoro del 1905 sull'effetto fotoelettrico. Nel 1935 si trasferì a Princeton e nel 1940 divenne cittadino degli Stati Uniti. L'ultima sua lettera fu indirizzata a BERTRAND RUSSELL per dare l'adesione ad un manifesto per la pace.

Esercizio

- Dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

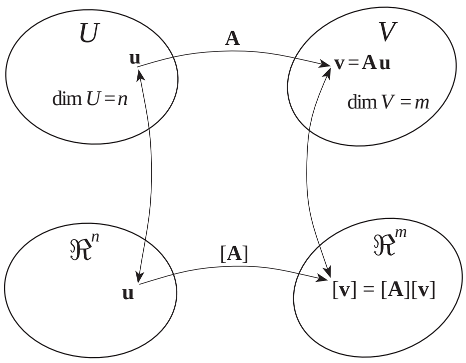
$$1)\quad \delta_{ij} a_j = a_i$$

$$2)\quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{hjk} = 2\,\delta_{ih}$$

$$3)\quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}$$

2. OPERATORI LINEARI

Siano U e V due spazi vettoriali rispettivamente di dimensione n ed m ed $\mathbf{A} : U \to V$ un operatore lineare.



[12] LEOPOLD KRONECKER (1823-1891). Di ricca famiglia ebrea prussiana fu allievo di KUMMER al liceo e poi diDIRICHLET e STEINER all'università di Berlino dove conobbe anche JACOBI e EISENSTEIN che influenzarono i suoi interessi in matematica. Nel 1856 KUMMER, BORCHARDT, WEIERSTRASS e KRONECKER furono insieme a Berlino anche se KRONECKER non aveva una posizione fissa all'Università. Le sue ricerche riguardarono la teoria dei numeri, la teoria delle equazioni algebriche, la teoria dei determinanti e quella degli integrali. Nel 1860 fu eletto all'Accademia di Berlino. Nel 1868 rifiutò la cattedra di matematica a Göttingen per restare a Berlino e divenne membro dell'Accademia di Parigi. Dal 1870 i rapporti con gli altri matematici si deteriorarono poichè egli era convinto che la matematica dovesse limitarsi a considerare numeri interi ed un numero finito di operazioni. Fu strenuo oppositore delle idee di HEINE, CANTOR e DEDEKIND. Nel 1884 fu eletto membro della Royal Society of London.

[13] GREGORIO RICCI-CURBASTRO (1853-1925). Allievo di ENRICO BETTI (1823-1892) e di ULISSE DINI (1845-1918) alla Scuola Normale Superiore di Pisa e professore di fisica matematica all'Università di Padova. In quattro note del periodo 1888 e 1892 sviluppò i fondamenti del calcolo differenziale assoluto su varietà n-dimensionali. A questi risultati ed a quelli ottenuti dopo il 1900 con l'allievo TULLIO LEVI-CIVITA (1873-1941) fece ricorso ALBERT EINSTEIN (1879-1955) per formulare la teoria generale della relatività.

L'operatore lineare $[\,\mathbf{A}\,] : \Re^n \mapsto \Re^m$ definito da

$$[\,\mathbf{A}\,]\,[\,\mathbf{u}\,] = [\,\mathbf{A}\,\mathbf{u}\,]\ , \quad \forall\ [\,\mathbf{u}\,] \in \Re^n\ ,$$

è detto *matrice* di $\mathbf{A}$ rispetto alle basi

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \quad \text{di } U\ , \quad \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\} \quad \text{di } V\ .$$

Se $U \equiv V$ la matrice di $\mathbf{A}$ può essere individuata fissando un'unica base.

I valori di un operatore lineare sono noti se si conoscono le immagini dei vettori di una base

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{A}\,\mathbf{e}_1 + u_2\,\mathbf{A}\,\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\,\mathbf{A}\,\mathbf{e}_n = u_j\,\mathbf{A}\,\mathbf{e}_j.$$

Dunque esprimendo i vettori $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$ in termini dei vettori della base $\{\mathbf{a}_i\}$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_j = A_{ij}\mathbf{a}_i\ ,$$

si ottiene

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = u_j\,\mathbf{A}\,\mathbf{e}_j = u_j\,A_{ij}\,\mathbf{a}_i = v_i\,\mathbf{a}_i\ ,$$

da cui si deduce che

$$v_i = A_{ij}u_j\ .$$

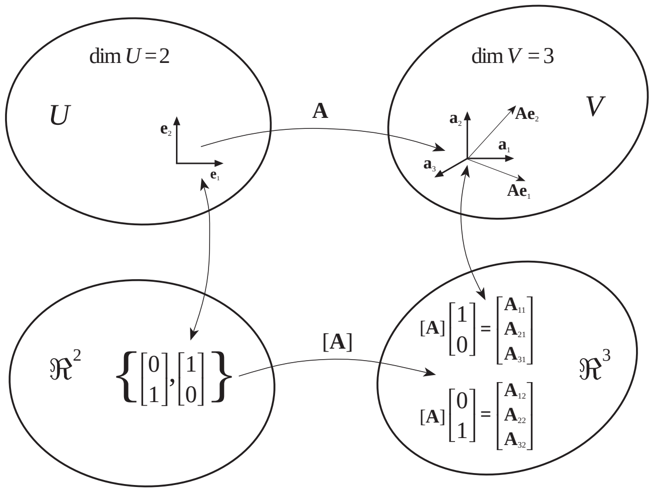
Pertanto la j-esima colonna della matrice $[\,\mathbf{A}\,]$ associata all'operatore $\mathbf{A}$ rispetto alle basi $\{\mathbf{e}_i\}$ ed $\{\mathbf{a}_i\}$, contiene ordinatamente le componenti del vettore $\mathbf{A}\,\mathbf{e}_j$ rispetto alla base $\{\mathbf{a}_i\}$. La matrice $[\,\mathbf{A}\,]$ ha in tal caso m righe e n colonne.

E' immediato notare che le colonne di $[\,\mathbf{A}\,]$ coincidono con le immagini dei vettori della base usuale in $\Re^n$.

Con riferimento alla figura seguente, le colonne della matrice $[\,\mathbf{A}\,]$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}$$

sono le immagini dei vettori della base usuale di $\Re^2$, e rappresentano le componenti rispetto alla base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ delle immagini dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.



L'immagine $[\,\mathbf{y}\,] \in \Re^m$ del vettore numerico $[\,\mathbf{x}\,] \in \Re^n$ tramite una matrice $[\,\mathbf{A}\,] : \Re^n \to \Re^m$ si ottiene dunque come combinazione lineare delle colonne di $[\,\mathbf{A}\,]$ e cioè

$$[\,\mathbf{y}\,] = [\,\mathbf{A}\,]\,[\,\mathbf{x}\,] \iff y_k = A_{k_i} x_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,.$$

2.1. Prodotto di operatori

Siano U, V e W tre spazi lineari ed $\mathbf{A} : U \mapsto V$ e $\mathbf{B} : V \mapsto W$ due operatori lineari. Si definisce *operatore prodotto* di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ l'operatore $\mathbf{AB} : U \to W$ tale che

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u} = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{u})\,.$$

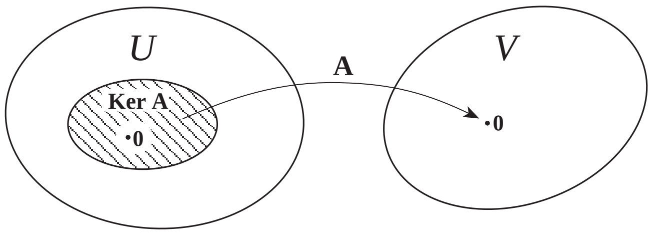
Esercizio

- Siano $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{a}_j\}$ e $\{\mathbf{b}_k\}$ tre basi rispettivamente di U, V e W ed $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ due operatori lineari. Siano inoltre $[\,\mathbf{A}\,]$ la matrice associata ad $\mathbf{A}$ rispetto alle basi $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{a}_j\}$ e $[\,\mathbf{B}\,]$ la matrice associata a $\mathbf{B}$ rispetto alle basi $\{\mathbf{a}_j\}$ e $\{\mathbf{b}_k\}$. Verificare che la matrice $[\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}]$ associata all'operatore prodotto $\mathbf{AB}$ rispetto alle basi $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{b}_k\}$ è data dal prodotto matriciale righe per colonne $[\,\mathbf{A}\,]\,[\,\mathbf{B}\,]$ di $[\,\mathbf{A}\,]$ per $[\,\mathbf{B}\,]$, e che si ha

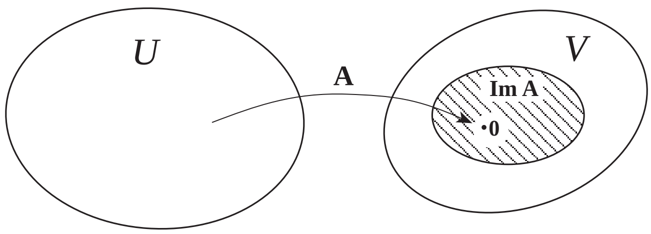
$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ik}\,\mathbf{B}_{kj}\,.$$

2.2. Nucleo ed immagine

L'insieme dei vettori $\mathbf{u} \in U$ tali che $\mathbf{Au} = \mathbf{o}$ si dice il *nucleo* di $\mathbf{A}$ e si denota con $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$.



L'insieme delle immagini dei vettori di U tramite $\mathbf{A}$ si dice l'*immagine* di $\mathbf{A}$ e si denota con $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$.



Esercizio

- Dimostrare che $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ e $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ sono sottospazi di U e di V rispettivamente, e cioè che il risultato di una qualsiasi operazione lineare effettuata tra elementi appartenenti a $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ appartiene ancora a $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ ed analogamente per $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$.

$\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ e $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ sono dunque spazi vettoriali ed è lecito considerarne la dimensione:

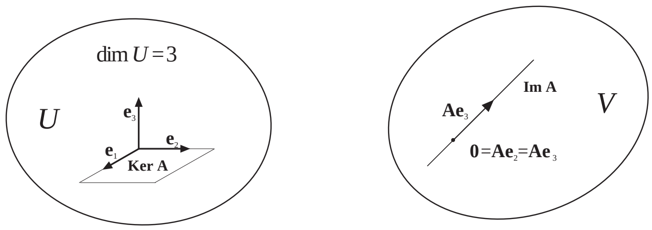
$$\mathrm{n}\,(\mathbf{A}) = \dim\ \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \quad \text{si dice } \textit{nullità} \text{ di } \mathbf{A}$$
$$\mathrm{r}\,(\mathbf{A}) = \dim\ \mathrm{Im}\,\mathbf{A} \quad \text{si dice } \textit{rango} \text{ di } \mathbf{A}$$

Sussiste la seguente relazione fondamentale:

$$\mathrm{n}\,(\mathbf{A}) + \mathrm{r}\,(\mathbf{A}) = \dim U = n\,.$$

Esercizi

- Dimostrare il risultato precedente. Il procedimento è esemplificato in figura, nel caso in cui $\dim U = 3\,,\ \mathrm{n}\,(\mathbf{A}) = 2\,,\ \mathrm{r}\,(\mathbf{A}) = 1\,.$



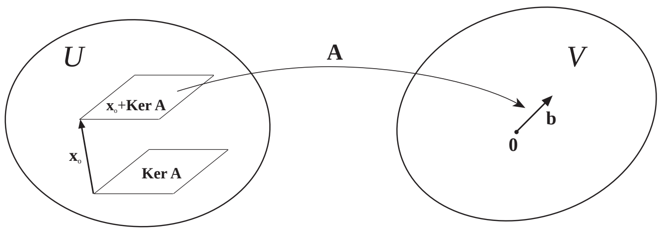
- Discutere l'equazione lineare $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ osservando come essa ammette soluzione se e solo se $\mathbf{b} \in \operatorname{Im}\mathbf{A}$ e l'insieme delle soluzioni è costituito dalla varietà lineare

$$\mathbf{x}_o + \operatorname{Ker}\mathbf{A} \qquad \text{con } \mathbf{A}\mathbf{x}_o = \mathbf{b}\,.$$

Osservare che $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ è l'insieme delle soluzioni dell'omogenea associata

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$$

Il risultato è esemplificato in figura.



3. PRODOTTO INTERNO

Una funzione che ad ogni coppia ordinata di vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ di uno spazio vettoriale associa un numero reale $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ si dice un *prodotto interno* se:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 & \text{per } \mathbf{u} \neq \mathbf{o} & \text{(positività)} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} & & \text{(simmetria)} \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} & & \text{(additività)} \\ (\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) & & \text{(omogeneità)} \end{array}$$

Brevemente può dirsi che un prodotto interno è una forma bilineare (cioè lineare rispetto ad entrambi gli argomenti), simmetrica e definita positiva.

Corrispondentemente si dice *norma* (o *lunghezza*) di un vettore il numero reale

$$\| \mathbf{u} \| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} \geq 0\,.$$

Esercizi

- Dimostrare che:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \;\Rightarrow\; \mathbf{u} = \mathbf{o}\,.$$

- Dimostrare che sussiste la *diseguaglianza di* CAUCHY-SCHWARZ

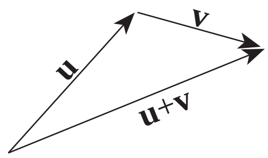
$$|\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \,| \leq \|\, \mathbf{u} \,\| \, \|\, \mathbf{v} \,\|$$

e che si ha eguaglianza se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono proporzionali. Si suggerisce di partire dalla diseguaglianza:

$$\|\, \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} \,\| \geq 0 \qquad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \qquad \forall\, \lambda \in \Re\,.$$

- Dimostrare la *diseguaglianza triangolare*

$$\|\, \mathbf{u} + \mathbf{v} \,\| \leq \|\, \mathbf{u} \,\| + \|\, \mathbf{v} \,\|.$$



Due vettori si dicono *ortogonali* se il loro prodotto interno è nullo:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\,.$$

Se W è un sottospazio di V si denota con $W^{\perp}$ il *complemento ortogonale* di W, cioè l'insieme dei vettori di V ortogonali a tutti i vettori di W.

Esercizi

- Dimostrare che $W^{\perp}$ è un sottospazio, che $W^{\perp\perp} = W$ e che:

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V.$$

- Dimostrare che ad ogni funzione lineare $f : V \to \Re$ corrisponde un vettore $\mathbf{a} \in V$ tale che

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in V$$

(si ponga $\mathbf{a} = f(\mathbf{e})\mathbf{e}$ con $\mathbf{e} \in [\,\mathrm{Ker}\,(f)]^{\perp}$ ed $\|\, \mathbf{e} \,\| = 1)$.

- Dimostrare che ad ogni forma bilineare $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ su V corrispondono due operatori lineari $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^T$, detti aggiunti tra loro, tali che

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{v}) \,, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \,.$$

- Dimostrare che se $[\,\mathbf{A}\,]$ è la matrice associata all'operatore $\mathbf{A} : U \mapsto V$ rispetto a due basi ortonormali $\{\mathbf{e}_i\}$ di U e $\{\mathbf{a}_j\}$ di V la matrice $[\,\mathbf{A}^T\,]$ associata all'operatore aggiunto $\mathbf{A}^T$ coincide con la matrice trasposta $[\,\mathbf{A}\,]^T$ di $[\,\mathbf{A}\,]$, cioè si ha che

$$[\,\mathbf{A}^T\,] = [\,\mathbf{A}\,]^T \,.$$

- Dimostrare che sussistono le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{ll}
1) & [\,\mathbf{O}\,] = \mathbf{O} \qquad \text{(operatore nullo)} \\
2) & \mathbf{I}^T = \mathbf{I} \qquad \text{(operatore identità)} \\
3) & (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \\
4) & (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T \qquad \alpha \in \Re \\
5) & (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \\
6) & (\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \\
7) & (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}
\end{array}$$

Per dimostrare l'ultima proprietà conviene porre

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \quad \text{ed} \quad \mathbf{I}^T = (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^T \,.$$

Teorema 3.1. *Sussistono le relazioni di ortogonalità*

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} = [\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}^T\,]^\perp \,, \quad \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}^T = [\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}\,]^\perp$$

Dim.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \iff \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{o} \iff \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{v} = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \iff \\
\iff \mathbf{u} \in [\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}^T\,]^\perp \,.
\end{aligned}$$

La seconda eguaglianza si dimostra in modo analogo. □

Da tale teorema e dalla relazione $W^{\perp\perp} = W$, valida per un qualsiasi sottospazio di dimensione finita, si ricava immediatamente il seguente:

Corollario 3.2. *Sussistono le relazioni di ortogonalità*

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{A} = [\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}^T\,]^\perp \,, \quad \mathrm{Im}\,\mathbf{A}^T = [\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}\,]^\perp \,.$$

Dim. Basta prendere i complementi ortogonali di ambo i membri nel teorema precedente. □

In conseguenza di tale risultato la condizione di esistenza di una soluzione della equazione lineare

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$

può esprimersi imponendo che $\mathbf{b} \in [\,\mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}^T)]^\perp$ e cioè che sia ortogonale a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{o}\,.$$

Esercizi

- Mostrare che ogni operatore lineare può decomporsi univocamente nella somma di uno simmetrico $\mathbf{S}$ ed uno emisimmetrico $\mathbf{E}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{E} \qquad \text{con } \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \text{ ed } \mathbf{E} = -\,[\,\mathbf{E}\,]\,,$$

  e che risulta

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

- Mostrare che se dim $V = n$ ogni insieme di n vettori a due a due ortogonali è una base (detta ortogonale); se in più ogni vettore ha norma unitaria e cioè si ha

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

  la base si dice ortonormale.

- Mostrare che, assumendo come prodotto interno in $\Re^n$ il prodotto interno usuale consistente nella somma dei prodotti degli elementi corrispondenti dei vettori e cioè

$$[\,\mathbf{u}\,] \cdot [\,\mathbf{v}\,] = u^i\,v^i \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

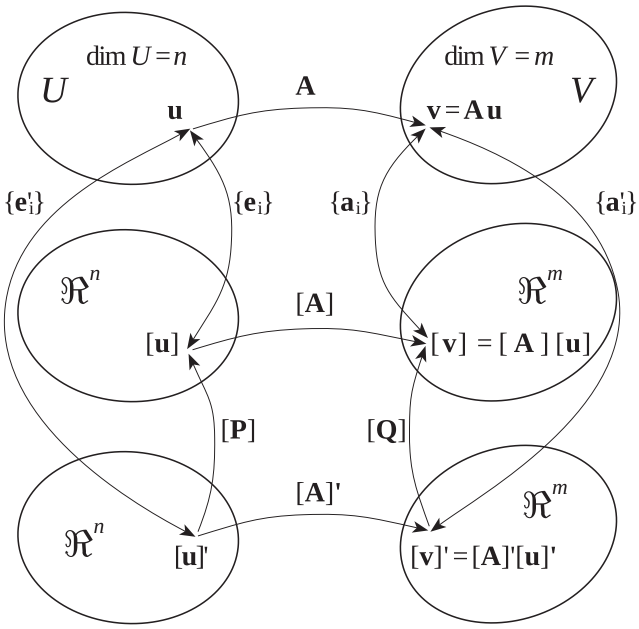
  l'aggiunta di una matrice $[\,\mathbf{M}\,] : \Re^n \to \Re^m$ è la trasposta, quella cioè che si ottiene scambiando le righe con le colonne.

- Mostrare che il prodotto interno di due vettori è uguale alla somma dei prodotti delle componenti omonime ripetto ad una base ortonormale.

- Mostrare che ogni matrice associata ad un operatore simmetrico [emisimmetrico] rispetto ad una base ortonormale è anch'essa simmetrica [emisimmetrica].

4. CAMBIAMENTO DI BASE

Per determinare la corrispondenza tra matrici associate ad una funzione lineare rispetto a basi diverse si consideri il seguente schema



dove con $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}'_i\}$ e rispettivamente $\{\mathbf{a}_i\}$ e $\{\mathbf{a}'_i\}$ si denotano rispettivamente due coppie di basi di U e V. Si deduce che

$$[\,\mathbf{A}\,]' = [\,\mathbf{Q}\,]^{-1}\,[\,\mathbf{A}\,]\,[\,\mathbf{P}\,]\,.$$

Le matrici quadrate $[\,\mathbf{P}\,] : \Re^n \to \Re^n$ e $[\,\mathbf{Q}\,] : \Re^m \to \Re^m$ sono invertibili e quindi costituiscono degli *isomorfismi*. Esse sono dette *matrici di trasferimento* $[\,\mathbf{P}\,]$ da $\{\mathbf{e}_i\}$ a $\{\mathbf{e}'_i\}$ e $[\,\mathbf{Q}\,]$ da $\{\mathbf{a}_i\}$ a $\{\mathbf{a}'_i\}$.

La tabella di $[\,\mathbf{P}\,]$ è determinata dai vettori delle basi $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}'_i\}$.

Si consideri infatti l'operatore lineare invertibile $\mathbf{P}$ (isomorfismo) che ai vettori della base $\{\mathbf{e}_i\}$ associa ordinatamente quelli della base $\{\mathbf{e}'_i\}$

$$\mathbf{P}\,\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

La matrice $[\,\mathbf{P}\,]$ è la matrice associata a $\mathbf{P}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{P}\,\mathbf{e}_k = P^i{}_k\,\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{k'}.$$

Infatti, se $\mathbf{u} = u_i\,\mathbf{e}_i = u'_k\,\mathbf{e}'_k$ si ha

$$\mathbf{u} = u'_k\,\mathbf{P}\,\mathbf{e}_k = \mathbf{P}_{ik}\,u'_k\,\mathbf{e}_i\,,$$

e dunque

$$u_i = \mathbf{P}_{ik} u'_k \iff [\,\mathbf{u}\,] = [\,\mathbf{P}\,]\,[\,\mathbf{u}\,]' \;.$$

Le colonne di $[\,\mathbf{P}\,]$ sono dunque le componenti dei vettori della base $\{\mathbf{e}'_i\}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$.

Se $U \equiv V$ la formula di trasformazione della matrice $[\,\mathbf{M}\,]$ nel passaggio da $\{\mathbf{e}_i\}$ a $\{\mathbf{e}'_i\}$ si scriverà in particolare

$$[\,\mathbf{M}\,]' = [\,\mathbf{P}\,]^{-1}\,[\,\mathbf{M}\,]\,[\,\mathbf{P}\,] \;.$$

5. TRACCIA E DETERMINANTE

Si consideri la matrice quadrata $[\,\mathbf{M}\,] : \Re^n \to \Re^n$.

Si definisce *traccia* o *invariante lineare* di $[\,\mathbf{M}\,]$ la somma degli elementi della diagonale principale:

$$\text{tr}\,[\,\mathbf{M}\,] = M_{11} + M_{22} + \cdots + M_{nn} = M_{ii} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Esercizio

- Verificare le seguenti proprietà della funzione traccia:

$$\begin{aligned} \text{tr}\,([\,\mathbf{M}\,]_1 \ldots [\,\mathbf{M}\,]_n) &= \text{tr}\,([\,\mathbf{M}\,]_{i+1} \ldots [\,\mathbf{M}\,]_n\,[\,\mathbf{M}\,]_1 \ldots [\,\mathbf{M}\,]_i)) \\ \text{tr}\,([\,\mathbf{M}\,]_1 + [\,\mathbf{M}\,]_2) &= \text{tr}\,[\,\mathbf{M}\,]_1 + \text{tr}\,[\,\mathbf{M}\,]_2 && \text{(additività)} \\ \text{tr}\,(\alpha\,[\,\mathbf{M}\,]) &= \alpha\,\text{tr}\,([\,\mathbf{M}\,]) && \text{(omogeneità)} \\ \text{tr}\,[\,\mathbf{M}\,] &= \text{tr}\,([\,\mathbf{M}\,]^T) \\ \text{tr}\,\mathbf{I} &= n \end{aligned}$$

Si ha allora che, se $[\,\mathbf{M}\,]' = [\,\mathbf{P}\,]^{-1}\,[\,\mathbf{M}\,]\,[\,\mathbf{P}\,]$:

$$\text{tr}\,[\,\mathbf{M}\,]' = \text{tr}\,([\,\mathbf{P}\,]\,[\,\mathbf{M}\,]\,[\,\mathbf{P}\,]^{-1}) = \text{tr}\,([\,\mathbf{P}\,]^{-1}\,[\,\mathbf{P}\,]\,[\,\mathbf{M}\,]) = \text{tr}\,([\,\mathbf{M}\,]).$$

Si definisce traccia di un operatore lineare $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{U\,;\,U\}$ la traccia di una qualsiasi matrice associata ad $\mathbf{A}$.

Esercizi

- Verificare che nello spazio vettoriale $\mathrm{L}\{U\,;\,V\}$ degli operatori lineari da U in V si può definire il prodotto interno
$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) \qquad \forall\,\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathrm{L}\{U\,;\,V\}\,.$$
La norma di $\mathbf{A}$ sarà dunque
$$\|\,\mathbf{A}\,\| = (\mathbf{A} : \mathbf{A})^{1/2} = (\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{1/2}\,.$$

- Siano $[\,\mathbf{A}\,]$ e $[\,\mathbf{B}\,]$ le matrici associate agli operatori $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathrm{L}\{U\,;\,V\}$ rispetto a due basi ortonormali $\{\mathbf{e}_i\}$ di U e $\{\mathbf{a}_j\}$ di V. Verificare che il prodotto interno $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ è pari alla somma dei prodotti delle componenti omonime di $[\,\mathbf{A}\,]$ e $[\,\mathbf{B}\,]$, cioè che risulta
$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{ij}.$$

- Verificare che $\mathbf{I} : \mathbf{A} = \mathrm{tr}\,\mathbf{A}$.

- Verificare che per ogni coppia di operatori $\mathbf{S}$ simmetrico e $\mathbf{E}$ emisimmetrico risulta: $\mathbf{S} : \mathbf{E} = 0$.

- Mostrare che ogni operatore $\mathbf{A}$ può essere univocamente decomposto in una parte sferica $\mathrm{sph}\,\mathbf{A}$ ed una deviatorica $\mathrm{dev}\,\mathbf{A}$ con $\mathrm{tr}\;\mathrm{dev}\,\mathbf{A} = 0$ e $\mathrm{sph}\,\mathbf{A} = (1/n)(\mathrm{tr}\,\mathbf{A})\mathbf{I}$.
Verificare inoltre che per ogni $\mathbf{A}$ risulta $\mathbf{I} :\ \mathrm{dev}\,\mathbf{A} = 0$

- Verificare che $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A}^T : \mathbf{B}^T$.

Il *determinante* di una matrice quadrata $[\,\mathbf{M}\,]$ di ordine n è definito da
$$\det\,[\,\mathbf{M}\,] = \sum\,(\mathrm{sgn}\,\pi)\mathbf{M}_{\pi(1)1}\,\mathbf{M}_{\pi(2)2}\ldots\mathbf{M}_{\pi(n)n}\,,$$
dove la sommatoria è estesa a tutte le possibili permutazioni π e la funzione segno è definita da
$$\mathrm{sgn}\,\pi = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \pi \text{ è dispari.} \end{cases}$$
Principali proprietà della funzione $\det$:
$$\begin{aligned}
&1)\ \det\,[\,\mathbf{I}\,] = 1\\
&2)\ \det\,([\,\mathbf{M}\,]_1\,[\,\mathbf{M}\,]_2) = \det\,[\,\mathbf{M}\,]_1\det\,[\,\mathbf{M}\,]_1\\
&3)\ \det\,([\,\mathbf{M}\,]^{-1}) = (\,\det\,[\,\mathbf{M}\,])^{-1}\\
&4)\ \det\,(\alpha\,[\,\mathbf{M}\,]) = \alpha^n\ \det\,[\,\mathbf{M}\,] \qquad \alpha \in \Re\\
&5)\ \det\,[\,\mathbf{M}\,] = 0 \iff \mathrm{r}\,([\,\mathbf{M}\,]) < n\\
&6)\ \det\,[\,\mathbf{M}\,] = \det\,[\,\mathbf{M}\,]^T
\end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\det\,[\,\mathbf{M}\,]' = \det\,([\,\mathbf{P}\,]\,[\,\mathbf{M}\,]\,[\,\mathbf{P}\,]^{-1}) = \det\,[\,\mathbf{P}\,]\;\det\,[\,\mathbf{M}\,]\;\det\,[\,\mathbf{P}\,]^{-1} = \det\,[\,\mathbf{M}\,]\,.$$

Si definisce determinante di un operatore lineare $\mathbf{A}$ il determinante di una qualsiasi matrice associata ad $\mathbf{A}$.

6. ISOMETRIE

Un operatore lineare $\mathbf{R}$ sullo spazio lineare U si dice una *isometria* se vale una delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} i) & \|\,\mathbf{R}\,\mathbf{u}\,\| = \|\,\mathbf{u}\,\| & \forall\,\mathbf{u} \in U & \text{(invarianza della norma)} \\ ii) & \mathbf{R}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in U & \text{(invarianza del prodotto interno)} \\ iii & \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \end{cases}$$

$Esercizi$

- Dimostrare che le proprietà $i)$, $ii)$ e $iii)$ sono equivalenti.
- Dimostrare che $\det\mathbf{R} = \pm 1$.

Una matrice quadrata $[\,\mathbf{M}\,] : \Re^n \to \Re^n$ isometrica si dice ortogonale.

$Esercizi$

- Mostrare che una matrice quadrata è ortogonale se e solo se, considerata come matrice di trasferimento, trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.

- In base al risultato precedente mostrare che le righe e le colonne di matrici ortonormali costituiscono basi ortonormali rispetto al prodotto interno usuale.

La formula di trasformazione di una matrice $[\,\mathbf{M}\,]$ da una base $\{\mathbf{e}_i\}$ ortonormale ad un'altra $\{\mathbf{e}_i'\}$ anch'essa ortonormale si scrive dunque

$$[\,\mathbf{M}\,]' = [\,\mathbf{P}\,]^T\,[\,\mathbf{M}\,]\,[\,\mathbf{P}\,]\,.$$

7. AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

Un vettore $\mathbf{e} \in U$ si dice un autovettore dell'operatore lineare $\mathbf{A}$ se

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \qquad \mathbf{e} \neq \mathbf{o} \qquad \lambda \in \Re.$$

Il moltiplicatore λ si dice l'autovalore associato ad $\mathbf{e}$. L'insieme degli autovalori di $\mathbf{A}$ si dice anche lo *spettro* di $\mathbf{A}$.

Per determinare gli autovalori e gli autovettori si nota che la proprietà caratteristica si può riscrivere nella forma

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e} = \mathbf{o}\,.$$

Il nucleo di $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ è detto l'autospazio associato a λ e contiene vettori non nulli se e solo se

$$\mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) < n \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0\,.$$

Il primo membro di tale equazione, detta l' *equazione caratteristica* di $\mathbf{A}$, è un polinomio di grado n in λ.

Se $[\,\mathbf{A}\,]$ è una qualsiasi matrice associata ad $\mathbf{A}$ l'equazione caratteristica può scriversi equivalentemente

$$\det([\,\mathbf{A}\,] - \lambda\mathbf{I}) = 0\,.$$

Esplicitando si ha

$$(-\lambda)^n + J_1(\mathbf{A})(-\lambda)^{n-1} + \cdots + J_{n-1}(\mathbf{A})(-\lambda) + J_n(\mathbf{A}) = 0\,,$$

dove $J_i(\mathbf{A})\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ è pari alla somma dei minori principali di ordine i della matrice $[\,\mathbf{A}\,]$.

Il teorema fondamentale dell'algebra assicura che vale la fattorizzazione

$$(-\lambda)^n + J_1(\mathbf{A})(-\lambda)^{n-1} + \cdots + J_{n-1}(\mathbf{A})(-\lambda) + J_n(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda)\,,$$

dove λ_i sono le radici del polinomio caratteristico nel campo complesso, contate ciascuna un numero di volte pari alla rispettiva molteplicità algebrica. Si ha quindi che

$$\det([\,\mathbf{A}\,] - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)\,,$$

e gli invarianti hanno le espressioni

$$J_1(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{22} + \cdots + \mathbf{M}_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A})$$

$$J_2(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n = \prod_{i<j}\lambda_i\lambda_j \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$J_n(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \det(\mathbf{A}).$$

I coefficienti $J_i(\mathbf{A})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ si dicono gli *invarianti* dell'operatore $\mathbf{A}$ in quanto risultano indipendenti dalla particolare matrice $[\,\mathbf{A}\,]$ scelta. L'invariante di ordine 1 è detto *invariante lineare* o *traccia*. L'invariante di ordine n è il *determinante*.

Se $n = 3$ si ha

$$J_1(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \,,$$
$$J_2(\mathbf{A}) = \lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_1\,\lambda_3 + \lambda_2\,\lambda_3 \,,$$
$$J_3(\mathbf{A}) = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 \,.$$

Per l'invariante quadratico $J_2(\mathbf{A})$ sussiste la relazione

$$J_2(\mathbf{A}) = \tfrac{1}{2}\,\big[(\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A})^2 - \,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^2)\big] \,.$$

Infatti

$$\frac{1}{2}[(\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A})^2 - \,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^2)] = \frac{1}{2}[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)] = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 .$$

Si ha quindi che

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + \,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}\,\lambda^2 - \frac{1}{2}[(\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A})^2 - \,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^2)]\lambda + \det\mathbf{A}\,.$$

Esercizio

- Mostrare che se λ è un autovalore di $\mathbf{A}$, λ^k è un autovalore di $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\cdots\mathbf{A}$ (k volte).

7.1. Sottospazi invarianti

Un sottospazio W di U si dice *invariante* rispetto all'operatore lineare $\mathbf{A}$ se

$$\mathbf{u} \in W \;\Rightarrow\; \mathbf{Au} \in W.$$

Esercizio

- Dimostrare che se W è invariante rispetto ad $\mathbf{A}$, $W^\perp$ è invariante rispetto ad $\mathbf{A}^T$. Dimostrare che se W è invariante rispetto ad $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}$ è invertibile, W è invariante rispetto ad $\mathbf{A}^{-1}$.

Un operatore lineare si dice *normale* se $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Esercizi

- Dimostrare che se W è un autospazio di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}$ è normale, $W^\perp$ è invariante rispetto ad $\mathbf{A}$.
- Verificare che operatori lineari simmetrici, emisimmetrici, isometrici sono normali.

7.2. Ampliamento complesso

Dato uno spazio vettoriale reale U si definisce *ampliamento complesso* di U lo spazio vettoriale X sul campo complesso C costituito dai vettori

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \qquad (i \text{ unità immaginaria}),$$

e con le operazioni lineari

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) + (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = (\mathbf{u} + \mathbf{a}) + i(\mathbf{v} + \mathbf{b}) \\ \xi\mathbf{x} &= (\alpha + i\beta)\,(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}) + i(\beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} &\mathbf{y} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \\ &\xi = \alpha + i\beta \in C. \end{aligned}$$

Si denoterà con $\xi^* = \alpha - i\beta \in C$ il complesso coniugato di $\xi = \alpha + i\beta \in C$ ed il vettore $\mathbf{x}^* = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ si dice il *complesso coniugato* di $\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$.

Il prodotto interno $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ in U induce su X il prodotto interno $\circ$ definito da

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^* = (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{a} - i\mathbf{b}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} - i(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{a})$$

con le seguenti proprietà

1) $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (\mathbf{y} \circ \mathbf{x})^*$ — simmetria coniugata

2) $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ — definizione positiva

3) $(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \circ \mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \mathbf{y} + \mathbf{z} \circ \mathbf{y}$ — additività

4) $(\xi\mathbf{x}) \circ \mathbf{y} = \xi(\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$ — omogeneità

Indicando con ξ^* è il complesso coniugato di ξ, segue che

$$\mathbf{x} \circ (\xi\mathbf{y}) = \big[(\xi\mathbf{y}) \circ \mathbf{x}\big]^* = \xi^*(\mathbf{y} \circ \mathbf{x})^* l \xi^* \mathbf{x} \circ \mathbf{y},$$

e dunque che $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ è una forma lineare rispetto al primo argomento e lineare coniugata rispetto al secondo.

Esercizi

- Mostrare che se $\mathbf{A}$ è un operatore lineare su X si ha:

$$(\xi\mathbf{A})^T = \xi^* \mathbf{A}^T.$$

- Mostrare che:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{u}+i\mathbf{v})\circ(\mathbf{a}+i\mathbf{b})=0\\[2ex](\mathbf{u}+i\mathbf{v})\circ(\mathbf{a}-i\mathbf{b})=0\end{array}\right\} \iff \mathbf{u}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}=0\,.$$

- Mostrare che una base $\{\mathbf{e}_i\}$ con $i=1,2,\ldots,n$ di U è anche una base per X.
- Mostrare che se $\mathbf{A}$ è un operatore lineare su X e se $\mathbf{A}$ è normale, simmetrico, emisimmetrico e unitario, tale è anche il suo ampliamento complesso.

Se $\lambda+i\mu$ è l'autovalore di $\mathbf{A}$ associato all'autovettore $\mathbf{u}+i\mathbf{v}$, cioè

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}+i\mathbf{v})=(\lambda+i\mu)(\mathbf{u}+i\mathbf{v})\,,$$

si ha che

$$\begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}-\mu\mathbf{v}\,,\\[2ex]\mathbf{A}\mathbf{v}=\mu\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}\,.\end{cases}$$

Dunque il sottospazio di U generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è invariante rispetto ad $\mathbf{A}$ ed è di dimensione 1 o 2 a seconda che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano o meno paralleli. Si ha inoltre che

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}-i\mathbf{v})=(\lambda-i\mu)(\mathbf{u}-i\mathbf{v})\,.$$

Se in particolare $\mu=0$ si ha

$$\begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}\,,\\[2ex]\mathbf{A}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}\end{cases}\,.$$

e dunque λ è un autovalore di $\mathbf{A}$ su U con autospazio di dimensione 1 o 2 a seconda che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano o meno paralleli.

Teorema 7.1. *Se $\mathbf{A}$ è un operatore normale su X esiste una base ortonormale di autovettori.*

Dim. Se $\mathbf{A}$ è normale su X si ha che

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\xi\mathbf{x} \iff \mathbf{A}^T\mathbf{x}=\xi^*\mathbf{x}\,.$$

Infatti

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2=\mathbf{A}\mathbf{x}\circ\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=\mathbf{A}^T\mathbf{x}\circ\mathbf{A}^T\mathbf{x}=\|\mathbf{A}^T\mathbf{x}\|^2\,,$$

e dunque, essendo

$$(\mathbf{A} - \xi\mathbf{I})^T = \mathbf{A}^T - \xi^*\mathbf{I}\,,$$

si ha

$$\|(\mathbf{A} - \xi\mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 = 0 \iff \|(\mathbf{A}^T - \xi^*\mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 = 0.$$

Inoltre autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro in quanto

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \xi_1\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \xi_2\mathbf{x}_2 \end{aligned}\right\} \iff \xi_1(\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{A}^T\mathbf{x}_2 =$$
$$\mathbf{x}_1 \circ \xi_2^*\mathbf{x}_2 = \xi_2(\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2)$$

che se $\xi_1 \neq \xi_2$, implica

$$\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 = 0\,.$$

Ora l'equazione caratteristica di $\mathbf{A}$ ammette almeno una radice nel campo complesso e dunque esiste un autovettore $\mathbf{x}_1$ di $\mathbf{A}$ in X.

Se W_1 è il sottospazio di X generato da $\mathbf{x}_1$, risultando W_1 invariante rispetto ad $\mathbf{A}$, ed essendo $\mathbf{A}$ normale tale sarà anche $W_1^\perp$. La restrizione di $\mathbf{A}$ a $W_1^\perp$ è ancora normale e dunque per iterazione si giunge al risultato. □

Esercizi

- Mostrare che:
  - Se $\mathbf{A}$ è simmetrico e $\mathbf{A}\mathbf{x} = \xi\mathbf{x}$ allora $\xi = \xi^*$,cioè ξ è reale.
  - Se $\mathbf{A}$ è emisimmetrico e $\mathbf{A}\mathbf{x} = \xi\mathbf{x}$ allora $\xi = -\xi^*$, cioè ξ è immaginario.
  - Se $\mathbf{A}$ è isometrico e $\mathbf{A}\mathbf{x} = \xi\mathbf{x}$ allora $|\,\xi\,| = (\xi\xi^*)^{1/2} = 1$.

Dunque un operatore simmetrico $\mathbf{A}$ su U ha autovalori tutti reali ed esiste una base ortonormale di U costituita da autovettori di $\mathbf{A}$.

Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di U costituita da autovettori dell'operatore $\mathbf{A}$, la matrice associata ad $\mathbf{A}$ rispetto a tale base è data da:

$$[\,\mathbf{A}\,] = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori di $\mathbf{A}$ corrispondenti rispettivamente agli autovettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Infatti

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}_{ki}\mathbf{e}_k = \lambda_i\mathbf{e}_i \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{ki} = \lambda_i\delta_{ik}\,.$$

Si noti che nell'ultimo termine non va effettuata la sommatoria rispetto ad i.

Se $\mathbf{R}$ è un'isometria essa ammette autovalori di modulo 1 e dunque del tipo:

$$\begin{array}{lcl}
\xi = \pm 1 \quad \text{reali} & \iff & \begin{cases} \mathbf{Au} = +\mathbf{u} \\ \mathbf{Ae} = -\mathbf{e} \end{cases} \\[2ex]
\xi = \exp(\pm i\alpha) \quad \begin{array}{c}\text{complessi}\\ \text{coniugati}\end{array} & \iff & \begin{cases} \mathbf{Av} = \cos\alpha\,\mathbf{v} - \sin\alpha\,\mathbf{w} \\ \mathbf{Aw} = \sin\alpha\,\mathbf{v} + \cos\alpha\,\mathbf{w} \end{cases}
\end{array} \iff \begin{cases} \mathbf{u}\cdot\mathbf{e} = 0 \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{e} = 0 \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{e} = 0 \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0 \end{cases} .$$

Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di U costituita da autovettori di $\mathbf{R}$ associati agli autovalori reali ± 1, o dalla parte reale e quella immaginaria degli autovettori associati agli autovalori complessi e coniugati $\mathbf{e}^{\pm i\alpha}$, la matrice associata ad $\mathbf{R}$ sarà dunque del tipo a blocchi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & \\ & -\mathbf{I} & & & \\ & & \cos\alpha & -\sin\alpha & \\ & & \sin\alpha & \cos\alpha & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

dove $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ e $-\mathbf{I} = \operatorname{diag}(-1, -1, \ldots, -1)$.

Dunque l'isometria $\mathbf{R}$ gode delle seguenti proprietà

- lascia invariati i vettori dell'autospazio associato all'autovalore 1,
- produce una riflessione dei vettori dell'autospazio associato all'autovalore -1 ed una rotazione di ampiezza α dei vettori del sottospazio invariante bidimensionale associato agli autovalori complessi e coniugati $\mathbf{e}^{\pm i\alpha}$.

Se -1 non è un autovalore di $\mathbf{R}$, si ha che $\det \mathbf{R} = 1$ e l'isometria $\mathbf{R}$ è detta propria, altrimenti è detta impropria.

Nello spazio tridimensionale, essendo $\dim U = 3$, se $\alpha \neq 2k\pi$, con k intero, una isometria propria $\mathbf{R}$ rappresenta una rotazione di ampiezza α attorno ad un asse fisso individuato dall'autospazio monodimensionale associato all'autovalore unitario.

Si noti inoltre che se $\mathbf{R}$ è una isometria anche $-\mathbf{R}$ è una isometria.
Essendo $\det(-\mathbf{R}) = (-1)^n \det \mathbf{R}$ con $n = \dim U$, il cambiamento di segno trasforma una isometria propria in una impropria e viceversa se n è dispari.

7.2. Teorema di decomposizione polare. *Se* $\mathbf{F}$ *è un operatore lineare e* $\det \mathbf{F} \neq 0$ *esso può decomporsi nei prodotti*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \qquad \text{(decomposizione polare)}$$

dove $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *sono operatori lineari simmetrici e definiti positivi:*

$$\mathbf{U}\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} > 0 \qquad \mathbf{V}\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} > 0 \qquad \forall\,\mathbf{e} \in U - \{\mathbf{0}\}$$

ed $\mathbf{R}$ *è un'isometria.*

Dim. Esiste infatti una base ortonormale costituita da autovettori dell'operatore simmetrico e definito positivo $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$, la cui matrice rispetto a tale base è $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ dove $\lambda_i > 0$ sono gli autovalori di $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$.

L'operatore $\mathbf{U} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{1/2}$ è quindi definito come quello rappresentato rispetto alla base principale dalla matrice $\operatorname{diag}(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2})$.

La definizione di $\mathbf{V} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{1/2}$ è analoga. □

$Esercizi$

- Dimostrare che $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}$ è un'isometria e che la decomposizione è unica.
- Mostrare che gli operatori $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ hanno gli stessi autovalori e che se $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_i$ sono autovettori corrispondenti di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ si ha:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{R}\,\mathbf{u}_i .$$

7.3. Prodotto tensoriale e rappresentazione spettrale

Sia U uno spazio vettoriale con prodotto interno e $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ due vettori di $\mathbf{U}$.
Il *prodotto tensoriale* $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ è l'operatore lineare definito dall'identità

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\,\mathbf{e} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}) \qquad \forall\,\mathbf{e} \in U .$$

In termini di componenti rispetto ad una base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ si ha

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i)(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_j) = a_i b_j \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se $\mathbf{A}$ è un operatore simmetrico, $\{\mathbf{e}_i\}$ è una base di U costituita da autovettori di $\mathbf{A}$ e λ_i sono i corrispondenti autovalori, sussiste la rappresentazione

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)\,,$$

detta anche la *rappresentazione spettrale* di $\mathbf{A}$.

8. MATRICI DI HAAR E DI GRAM

Siano $\{\mathbf{a}_i\}$ e $\{\mathbf{b}_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ due arbitrarie n-uple di vettori di U e sia $\{\mathbf{e}_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ una base ortonormale di U.

Si considerino quindi gli operatori lineari $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ definiti da

$$\mathbf{A}\,\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i\,, \qquad \mathbf{B}\,\mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

e le funzioni determinante

$$\begin{cases} \Delta\{\mathbf{a}_i\} = \Delta\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \det \mathbf{A}\,, \\ \Delta\{\mathbf{b}_i\} = \Delta\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\} = \det \mathbf{B}\,. \end{cases}$$

Si noti che le funzioni determinante sono indipendenti dalla particolare scelta della base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ di U.

La matrice quadrata $[\,\mathbf{H}\,]$ il cui generico elemento è dato da

$$\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j$$

è detta la *matrice* di HAAR [14] associata alle n-uple di vettori $\{\mathbf{a}_i\}$ e $\{\mathbf{b}_i\}$ di U.

Risulta

$$\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{B}\mathbf{e}_j = \mathbf{A}_{ki}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{B}_{sj}\mathbf{e}_s = \mathbf{A}_{ki}\mathbf{B}_{sj}\boldsymbol{\delta}_{sk} = \mathbf{A}^T_{ik}\mathbf{B}_{kj}\,,$$

e dunque

$$[\,\mathbf{H}\,] = [\,\mathbf{A}\,]^T\,[\,\mathbf{B}\,]\,.$$

Di conseguenza si ha che

$$\det\,[\,\mathbf{H}\,] = \det\,([\,\mathbf{A}\,]^T\,[\,\mathbf{B}\,]) = \det\,[\,\mathbf{A}\,]^T \det\,[\,\mathbf{B}\,] = \det\,[\,\mathbf{A}\,]\ \det\,[\,\mathbf{B}\,]\,.$$

La matrice di HAAR è dunque non singolare se e solo se le n-uple di vettori $\{\mathbf{a}_i\}$ e $\{\mathbf{b}_i\}$ sono linearmente indipendenti.

La matrice simmetrica $[\,\mathbf{G}\,]$ definita da

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

è detta la *matrice* di GRAM [15] associata ai vettori $\{\mathbf{a}_i\}$.

Si ha dunque che

$$\det\,[\,\mathbf{G}\,] = \det\,([\,\mathbf{A}\,]^T\,[\,\mathbf{A}\,]) = (\det\,[\,\mathbf{A}\,])^2 \geq 0.$$

Pertanto $\det\,[\,\mathbf{G}\,] = 0$ se e solo se $\det \mathbf{A} = 0$ e cioè se e solo se i vettori $\{\mathbf{a}_i\}$ non costituiscono una base.

---

[14] ALFRÉD HAAR (1855-1933). Matematico ungherese allievo di HILBERT a Göttingen. Fondò insieme a F. RIESZ l'Università e la Scuola di Matematica a Szeged.

[15] JORGEN PEDERSEN GRAM (1850-1916). Matematico danese puro ed applicato. Lavorando nella compagnia di assicurazioni Hafnia si interessò di probabilità e di analisi numerica. I suoi maggiori contributi alla matematica pura sono nel campo dell'algebra e della teoria dei numeri.

Esercizio

- Mostrare che se $\{\mathbf{a}_i\}$ è una base di U il prodotto interno tra due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ in termini di componenti rispetto alla base $\{\mathbf{a}_i\}$ si scrive
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{G}_{ij}\, x_i\, y_j = [\,\mathbf{G}\,]\,[\,\mathbf{y}\,] \cdot [\,\mathbf{x}\,] = [\,\mathbf{G}\,]\,[\,\mathbf{x}\,] \cdot [\,\mathbf{y}\,]$$
dove $[\,\mathbf{G}\,]$ è la matrice di Gram della base $\{\mathbf{a}_i\}$, $[\,\mathbf{x}\,]$ e $[\,\mathbf{y}\,]$ sono i vettori delle componenti di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Il punto denota sia il prodotto interno in U che quello usuale in $\Re^n$.

9. SPAZI VETTORIALI TRIDIMENSIONALI

Sia $\{\mathbf{e}_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ una base ortonormale ed $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vettori di uno spazio vettoriale U di dimensione 3.

Il *prodotto vettoriale* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è definito da
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \epsilon_{ijk}\, u_j\, v_k\, .$$
Sia $\mathbf{\Omega}$ un operatore emisimmetrico su U. Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ definito dalla identità
$$\mathbf{\Omega}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \qquad \forall\, \mathbf{a} \in U\, ,$$
si dice il *vettore assiale* associato all'operatore $\mathbf{\Omega}$, e si scrive
$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{axial} \mathbf{\Omega}.$$
La funzione axial è biunivoca. In termini di componenti si ha
$$\mathbf{\Omega}\, \mathbf{e}_j = \mathit{\Omega}_{ij}\, \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_j = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_j)_i\, \mathbf{e}_i = (\epsilon_{ikq}\, \omega_k\, \delta_{jq})\, \mathbf{e}_i = \epsilon_{ikj}\, \omega_k\, \mathbf{e}_i\, ,$$
e dunque
$$\mathit{\Omega}_{ij} = -\epsilon_{ijk}\, \omega_k\, ,$$
ed esplicitamente
$$[\,\mathbf{\Omega}\,] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Viceversa si ha:
$$\epsilon_{ijk}\, \mathit{\Omega}_{jk} = -\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{jkq}\, \omega_q = -\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{qjk}\, \omega_q = -2\, \omega_i$$
e cioè
$$\omega_i = -\frac{1}{2}\, \epsilon_{ijk}\, \mathit{\Omega}_{jk}\, ,$$
ed esplicitamente
$$[\,\boldsymbol{\omega}\,] = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathit{\Omega}_{32} - \mathit{\Omega}_{23} \\ \mathit{\Omega}_{13} - \mathit{\Omega}_{31} \\ \mathit{\Omega}_{21} - \mathit{\Omega}_{12} \end{bmatrix}.$$

Esercizio

- Mostrare che
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0\,.$$

Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono vettori non nulli di U, il coseno dell'angolo α tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ si definisce mediante il prodotto interno:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\,\mathbf{a}\,\|\,\|\,\mathbf{b}\,\|}.$$

Cio è lecito in quanto la disuguaglianza di SCHWARZ assicura che $|\cos\alpha\,| \le 1$.

Si noti ora che

$$\|\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}\,\|^2 = (\epsilon_{ijk}\,a_j\,b_k)\,(\epsilon_{ipq}a_p\,b_q) = (\delta_{jp}\,\delta_{kq} - \delta_{jq}\,\delta_{kp})\,a_j\,a_p\,b_k\,b_q =$$
$$= a_j\,a_j\,b_k\,b_k - a_j\,b_k\,a_k\,b_j = \|\,\mathbf{a}\,\|^2\,\|\,\mathbf{b}\,\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2,$$

e dunque:
$$|\sin\alpha\,| = (1 - \cos^2\alpha)^{1/2} = \frac{\|\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}\,\|}{\|\,\mathbf{a}\,\|\,\|\,\mathbf{b}\,\|}.$$

Il *prodotto esterno* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ è l'operatore emisimmetrico associato al vettore assiale $-(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ e cioè

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\,\mathrm{axial}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -2\,\mathrm{axial}\;\mathrm{emi}\;(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$$

ed in termini di componenti

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_{ij} = \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{krs}\,a_r\,b_s$$

od esplicitamente

$$[\,\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\,] = \begin{bmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 & a_3b_2 - a_2b_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sia $\mathbf{R}$ una isometria propria di U ($\det\mathbf{R} = 1$) che non coincida con l'identità e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di U rispetto alla quale $\mathbf{R}$ assume la forma canonica

$$[\,\mathbf{R}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Sia $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{R} - \mathbf{R}^{-1})$ la parte emisimmetrica di $\mathbf{R}$

$$[\,\mathbf{\Omega}\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Il vettore $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{axial}\mathbf{\Omega}$ appartiene al sottospazio monodimensionale invariante rispetto ad $\mathbf{R}$ detto l'asse della rotazione. Infatti è immediato verificare che

$$\boldsymbol{\omega} = (\sin\alpha)\,\mathbf{e}_1.$$

Si ha dunque

$$|\,\sin\alpha\,| = \|\,\boldsymbol{\omega}\,\|$$

ed essendo inoltre

$$\operatorname{tr}\mathbf{R} = 2\cos\alpha + 1,$$

si ha

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\,\operatorname{tr}\mathbf{R} - 1).$$

Il segno di $\sin\alpha$ (e dunque di α) è determinato dall'orientamento di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto ad $\mathbf{e}_1$.

III – ALGEBRA MULTILINEARE

1. FORME INVARIANTI

Le nozioni introdotte precedentemente possono essere estese e completate facendo ricorso alla teoria delle forme multilineari.

1.1. k-forme, funzioni determinante ed invarianti

Una funzione scalare (a valori reali) su di un campo vettoriale V di dimensione n è detta una *forma* se è lineare, e cioè additiva ed omogenea.

Considerando il prodotto cartesiano $V^k = V \times V \times, \ldots \times V$ (k copie di V) con $k \leq n$ una funzione scalare $f : V^k \mapsto \Re$ è una *forma k-lineare* se è lineare separatamente in ogni argomento.

L'insieme delle forme k-lineari costituisce lo spazio vettoriale $\mathrm{L}^k(V, \Re)$ di dimensione n^k.

- Una *forma multilineare* è alternante se $f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ cambia segno quando due qualsiasi argomenti sono scambiati di posto.

La funzione f è detta una *forma multilineare alternante* di ordine k su V o anche una *k-forma* su V.

Dalla proprietà di alternanza segue che

- se due argomenti sono uguali il valore della k-forma f è nullo,
- se un argomento dipende linearmente dai rimanenti, la k-forma f assume il valore nullo.

Le *n-forme* si dicono di ordine massimo in quanto ogni forma di ordine $k > n$ risulta identicamente nulla in virtù della proprietà di alternanza.

Le n-forme su uno spazio V di dimensione n sono dette *forme di volume* o *forme di volume* e saranno denotate col simbolo $\boldsymbol{\mu}$.

Si denoti con S_n il *gruppo delle permutazioni* su n elementi e cioè l'insieme delle biiezioni $\sigma : \{1 \ldots n\} \mapsto \{1 \ldots n\}$ con la struttura di gruppo indotta dall'operazione di composizione. Tale gruppo ha ordine pari a $n!$.

Una *permutazione* è detta *pari* o *dispari* rispettivamente se si può ottenere da quella fondamentale mediante un numero *pari* o *dispari* di scambi di elementi.

Sia inoltre $\operatorname{sgn}(\sigma) : S^n \mapsto \{-1, 1\}$ la *funzione segno* definita da

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è pari,} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Essa gode della proprietà

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \operatorname{sgn}(\sigma_2) \,.$$

- La proprietà di alternanza equivale ad assumere che per ogni $\sigma \in S_n$ si abbia

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \,.$$

Un risultato fondamentale è il seguente [16] (vedi p.e. [7], [10]).

Proposizione 1.1. Proprietà delle forme di volume. *Le forme di volume su V formano uno spazio vettoriale di dimensione 1. Una funzione determinante non banale si annulla se e solo se l'insieme degli argomenti è linearmente dipendente.*

Dim. Se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di V si ponga $\mathbf{u}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_i^k \, \mathbf{e}_k \,.$

Vale allora la formula

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \sum_{\sigma} \alpha_1^{\sigma(1)} \dots \alpha_n^{\sigma(n)}\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \,,$$

e quindi

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \sum_{\sigma \in S^n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha_1^{\sigma(1)} \dots \alpha_n^{\sigma(n)} \,.$$

Ne segue che una funzione determinante è identicamente nulla se si annulla in corrispondenza di una base.

Se $\boldsymbol{\mu}$ e $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ sono forme di volume, con $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ non banale, risulta $\boldsymbol{\mu} = \lambda\, \overline{\boldsymbol{\mu}}$. Infatti

$$\overline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \overline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \sum_{\sigma \in S^n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha_1^{\sigma(1)} \dots \alpha_n^{\sigma(n)} \,,$$

ed il risultato segue ponendo $\lambda = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \,/\, \overline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \,.$ $\square$

---

[16] Contributi importanti alla teoria dei determinanti furono portati da JAMES JOSEPH SYLVESTER $(1814\text{-}1897)$. Ebreo inglese, emigrò negli Stati Uniti dove insegnò alla John Hopkins University dal 1876 e poi ad Oxford dal 1884. Fu l'iniziatore della ricerca matematica negli U.S.A. SYLVESTER è noto per aver formulato la Legge d'Inerzia delle forme quadratiche (1852). La prima dimostrazione della Legge d'Inerzia è dovuta a JACOBI nel 1857.

Le forme di volume definiscono i due *orientamenti di uno spazio vettoriale* di dimensione finita. Ciò si persegue suddividendo le forme di volume non banali in due classi di equivalenza indotte dalla relazione

$$\boldsymbol{\mu}_1 \sim \boldsymbol{\mu}_2 \quad \text{se } \ \boldsymbol{\mu}_1 = \lambda\, \boldsymbol{\mu}_2\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Sia V uno spazio vettoriale tridimensionale, $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{V\,;\,V\right\}$ un operatore lineare e $\boldsymbol{\mu}$ una funzione determinante non banale. Si consideri quindi le forme di volume

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}^1_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3) &:= \boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3) + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1,\mathbf{A}\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3) + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{A}\mathbf{u}_3)\,,\\
\boldsymbol{\mu}^2_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3) &:= \boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}\mathbf{u}_1,\mathbf{A}\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3) + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1,\mathbf{A}\mathbf{u}_2,\mathbf{A}\mathbf{u}_3) + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{A}\mathbf{u}_3)\,,\\
\boldsymbol{\mu}^3_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3) &:= \boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}\mathbf{u}_1,\mathbf{A}\mathbf{u}_2,\mathbf{A}\mathbf{u}_3)\,.
\end{aligned}$$

Gli *invarianti principali* $J_1(\mathbf{A}), J_2(\mathbf{A}), J_3(\mathbf{A})$ dell'operatore $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{U}\,;\mathcal{U}\right\}$ sono defìnti in termini della funzione determinante dalle relazioni

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}^1_{\mathbf{A}} &= J_1(\mathbf{A})\,\boldsymbol{\mu}\,,\\
\boldsymbol{\mu}^2_{\mathbf{A}} &= J_2(\mathbf{A})\,\boldsymbol{\mu}\,,\\
\boldsymbol{\mu}^3_{\mathbf{A}} &= J_3(\mathbf{A})\,\boldsymbol{\mu}\,.
\end{aligned}$$

e sono detti rispettivamente

- $J_1(\mathbf{A})$ l'*invariante lineare* o *traccia* $\mathrm{tr}\,(\mathbf{A})$,
- $J_2(\mathbf{A})$ l'*invariante quadratico,*
- $J_3(\mathbf{A})$ l'*invariante cubico* o *determinante* $\det\,(\mathbf{A})$.

Gli invarianti principali sono i coefficienti del *polinomio caratteristico* associato allo operatore $\mathbf{A}$. Infatti, sviluppando per multilinearità, si ha

$$\begin{aligned}
&\left[\,\det\,(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\,\right]\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3) = \boldsymbol{\mu}((\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{u}_1,(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{u}_2,(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{u}_3) =\\
&= \left[-\lambda^3 + \lambda^2\,J_1(\mathbf{A}) + \lambda\,J_2(\mathbf{A}) + J_3(\mathbf{A})\,\right]\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)\,.
\end{aligned}$$

Un famoso risultato dovuto a A. Cayley [17] e W.R. Hamilton [18] stabilisce che

Proposizione 1.2. Teorema di Cayley-Hamilton. *Ogni operatore* $\mathbf{A}$ *è radice del suo polinomio caratteristico* $-\mathbf{A}^3 + J_1(\mathbf{A})\,\mathbf{A}^2 - J_2(\mathbf{A})\,\mathbf{A} + J_3(\mathbf{A}) = \mathbf{O}\,.$ □

[17] Arthur Cayley (1821-1895). Professore di matematica a Cambridge, amico e collega del matematico Sylvester, è considerato il creatore della teoria delle matrici.

[18] William Rowan Hamilton (1805-1865). Professore di matematica al Trinity College di Dublino è considerato il più grande fisico e matematico inglese dopo Newton. Noto particolarmente per la scoperta dei quaternioni, per aver fondato l'ottica geometrica e per le ricerche di dinamica.

In modo analogo vengono definiti gli invarianti di un operatore lineare su uno spazio lineare V di dimensione n considerando per $1 \le k \le n$ il sottoinsieme delle permutazioni

$$S^{k,(n-k)} \subset S^n$$

tali che $\sigma(1) < \ldots < \sigma(k)$ e $\sigma(k+1) < \ldots < \sigma(n)$, con $S^{(0),n} = S^{n,(0)} := S^n$.

Si definisce quindi per $1 \le k \le n$

$$\boldsymbol{\mu}^k_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) := \sum_{\sigma \in S^{k,(n-k)}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{e}_{\sigma(k)}, \mathbf{e}_{\sigma(k+1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) .$$

Rispetto ad una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la matrice dell'operatore lineare $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{V\,;V\}$ è denotata con $M(\mathbf{A})$ ed è definita da

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = M^k{}_i\, \mathbf{e}_k .$$

Risulta allora

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_n) = M^k{}_k\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_n) ,$$
$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{e}_n) = \sum_{\sigma \in S^n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, M^1{}_{\sigma(1)} \ldots M^n{}_{\sigma(n)}\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) .$$

e dunque

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} M^k{}_k , \\ &\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S^n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, M^1{}_{\sigma(1)} \ldots M^n{}_{\sigma(n)} . \end{aligned}}$$

I termini a secondo membro sono per definizione la traccia ed il determinante della matrice $M(\mathbf{A})$. Si ha quindi che

$$\boxed{\operatorname{tr} \mathbf{A} = \operatorname{tr} M(\mathbf{A}) , \quad \det \mathbf{A} = \det M(\mathbf{A}) .}$$

e cioè tutte le matrici simili associate ad un operatore lineare al variare della base hanno la stessa traccia e lo stesso determinante. Tale risultato sussiste anche per gli altri invarianti. In generale per $1 \le k \le n$ l'invariante $J_k(\mathbf{A})$ risulta pari alla somma dei minori principali di ordine k:

$$J_k(\mathbf{A}) = \sum_{\tau \in S^k} \sum_{\sigma \in S^{k,(n-k)}} \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\sigma)\, M^{\tau\sigma(1)}{}_{\sigma(1)} \ldots M^{\tau\sigma(k)}{}_{\sigma(k)} .$$

Per ogni $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{V\,;V\}$ e $\mathbf{B} \in \mathrm{L}\{V\,;V\}$ si ha

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB})\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) =& \boldsymbol{\mu}(\mathbf{AB}\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{AB}\mathbf{u}_n) = (\det \mathbf{A})\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{B}\,\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{B}\,\mathbf{u}_n) = \\ =& (\det \mathbf{A})\,(\det \mathbf{B})\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) , \end{aligned}$$

e dunque

$$\boxed{\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\det\mathbf{A})\,(\det\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}\mathbf{A}).}$$

Dall'espressione della traccia in termini di una matrice associata si deduce che vale la proprietà

$$\boxed{\operatorname{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}\,\mathbf{A})}\,.$$

Infatti si ha che

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \operatorname{tr} M(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{n} M_{k}^{\,k}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \sum_{k,j=1}^{n} M_{k}^{\,j}(\mathbf{A})\, M_{j}^{\,k}(\mathbf{B}) =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} M_{j}^{\,k}(\mathbf{B})\, M_{k}^{\,j}(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} M_{j}^{\,j}(\mathbf{B}\,\mathbf{A}) = \operatorname{tr} M(\mathbf{B}\,\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}\,\mathbf{A})\,.$$

1.2. Spazi e basi duali

Siano

- V uno spazio lineare di dimensione n e $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base di V,
- V' lo *spazio duale* delle forme lineari $\mathbf{u}^* \in \mathrm{L}\{V\,;\,\Re\}$ su V.

Le forme $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ di V' definite dalle condizioni

$$\langle\, \mathbf{e}^i\,,\, \mathbf{e}_j\,\rangle = \delta^i_{\ j} \qquad j = 1, \dots, n\,,$$

costituiscono una base di V' che è detta la *base duale* di $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Ne segue che V e V' hanno la stessa dimensione.

Posto $\mathbf{u} = u^i\,\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{u}^* = u_i\,\mathbf{e}^i$ le componenti u^i e u_i possono ottenersi mediante i prodotti scalari

$$\boxed{\langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{e}^i\,\rangle = u^i\,, \quad \langle\, \mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{e}_i\,\rangle = u_i \qquad i = 1, \dots, n\,.}$$

Si consideri una trasformazione della base da $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ a $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \dots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$ definita dalla matrice

$$\boxed{\overline{\mathbf{e}}_i = \mathrm{Q}^k_{\ i}\,\mathbf{e}_k\,.}$$

Risulta allora

$$\boxed{\mathbf{u} = u^i\,\mathbf{e}_i = \overline{u}^k\,\mathbf{e}_k = \mathrm{Q}^i_{\ k}\,\overline{u}^k\,\mathbf{e}_i \;\Rightarrow\; u^i = \mathrm{Q}^i_{\ k}\,\overline{u}^k\,.}$$

La legge di trasformazione delle componenti è quindi *controvariante* rispetto a quella dei vettori di base.

Per una forma $\mathbf{u}^* \in V'$ la legge di trasformazione è invece

$$\boxed{\overline{u}^*_{\ i} = \langle\, \mathbf{u}^*\,,\, \overline{\mathbf{e}}_i\,\rangle = \langle\, \mathbf{u}^*\,,\, \mathrm{Q}^k_{\ i}\,\mathbf{e}_k\,\rangle = \mathrm{Q}^k_{\ i}\,u^*_{\ k}\,.}$$

La legge di trasformazione delle forme lineari è quindi *covariante* rispetto a quella dei vettori di base.

1.3. Funzioni determinante duali

Nello spazio $\{V, \mathbf{g}\}$ si ponga

$$\mathbf{v}_I = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}\,,$$

con $I = \{1, \ldots, n\}$ multiindice di ordine n di interi crescenti.
Analogamente nello spazio $\{V', \mathbf{g}^*\}$ si scrive $\mathbf{u}^I = \{\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^n\}$.

La *matrice di* HAAR associata alle n-uple di vettori $\mathbf{u}^I = \{\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^n\} \subset V'$ e $\mathbf{v}_I = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ è definita dalla relazione

$$\boxed{\mathbb{H}^i{}_j(\mathbf{u}^I, \mathbf{v}_I) = \langle\, \mathbf{u}^i\,,\, \mathbf{v}_j\,\rangle}$$

La funzione $\det \mathbb{H}(\mathbf{u}^I, \mathbf{v}_I)$ è multilineare alternante nei suoi argomenti e quindi è il prodotto di due *forme di volume duali* $\boldsymbol{\mu}^*(\mathbf{u}^I)$ e $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}_I)$ tali che

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}^*(\mathbf{u}^I)\,\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}_I) = \det \mathbb{H}(\mathbf{u}^I, \mathbf{v}_I)\,.}$$

Siano $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{V\,;\,V\}$ e $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\{V'\,;\,V'\}$ operatori lineari duali

$$\boxed{\langle\, \mathbf{v}^*\,,\, \mathbf{A}\mathbf{u}\,\rangle = \langle\, \mathbf{A}'\mathbf{v}^*\,,\, \mathbf{u}\,\rangle \quad \forall\,\mathbf{u} \in V \quad \forall\,\mathbf{v}^* \in V'\,.}$$

Risulta allora

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}^*(\mathbf{A}'\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{A}'\mathbf{u}^n)\,\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) &= \det(\langle\, \mathbf{A}'\mathbf{u}^i\,,\, \mathbf{u}_j\,\rangle) = \det(\langle\, \mathbf{u}^i\,,\, \mathbf{A}\mathbf{u}_j\,\rangle) = \\ &= \boldsymbol{\mu}^*(\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^n)\,\boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{u}_n)\,,\end{aligned}$$

e quindi segue che $\boxed{\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A})}$.

2. ALGEBRA TENSORIALE

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e V' lo spazio duale. Si denoti con $\mathbf{u} \in V$ e $\mathbf{u}^* \in V'$ gli elementi dei due spazi.

Un *tensore doppio* è una forma bilineare su uno degli spazi prodotto

$$V \times V\,, \quad V' \times V\,, \quad V \times V'\,, \quad V' \times V'\,.$$

Si adotti nel seguito la seguente notazione di tipo musicale ($\flat$ bemolle, $\sharp$ diesis)

$$\mathbf{a}^{\flat\flat} \in \mathrm{Bil}\{V, V\}\,, \quad \mathbf{b}^{\sharp\flat} \in \mathrm{Bil}\{V', V\}\,, \quad \mathbf{c}^{\flat\sharp} \in \mathrm{Bil}\{V, V'\}\,, \quad \mathbf{d}^{\sharp\sharp} \in \mathrm{Bil}\{V', V'\}\,.$$

Ad ogni tensore doppio si associa una coppia di operatori lineari duali tramite le identità:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{a}^{\flat\flat}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{A}^{\flat\flat}\mathbf{v}\,\rangle & \text{con} & \mathbf{A}^{\flat\flat} \in \mathrm{L}\left\{V\,;\,V'\right\} \\
\mathbf{a}^{\flat\flat}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle\, (\mathbf{A}')^{\flat\flat}\mathbf{u}\,,\, \mathbf{v}\,\rangle & \text{con} & (\mathbf{A}')^{\flat\flat} \in \mathrm{L}\left\{V\,;\,V'\right\} \\
\mathbf{b}^{\sharp\flat}(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = \langle\, \mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{B}^{\sharp\flat}\mathbf{v}\,\rangle & \text{con} & \mathbf{B}^{\sharp\flat} \in \mathrm{L}\left\{V\,;\,V\right\} \\
\mathbf{b}^{\sharp\flat}(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = \langle\, (\mathbf{B}')^{\flat\sharp}\mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{v}\,\rangle & \text{con} & (\mathbf{B}')^{\flat\sharp} \in \mathrm{L}\left\{V'\,;\,V'\right\} \\
\mathbf{c}^{\flat\sharp}(\mathbf{v},\mathbf{u}^*) = \langle\, \mathbf{v}\,,\, \mathbf{C}^{\flat\sharp}\mathbf{u}^*\,\rangle & \text{con} & \mathbf{C}^{\flat\sharp} \in \mathrm{L}\left\{V'\,;\,V'\right\} \\
\mathbf{c}^{\sharp\flat}(\mathbf{v},\mathbf{u}^*) = \langle\, (\mathbf{C}')^{\sharp\flat}\mathbf{v}\,,\, \mathbf{u}^*\,\rangle & \text{con} & (\mathbf{C}')^{\sharp\flat} \in \mathrm{L}\left\{V\,;\,V\right\} \\
\mathbf{d}^{\sharp\sharp}(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*) = \langle\, \mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{D}^{\sharp\sharp}\mathbf{v}^*\,\rangle & \text{con} & \mathbf{D}^{\sharp\sharp} \in \mathrm{L}\left\{V'\,;\,V\right\} \\
\mathbf{d}^{\sharp\sharp}(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*) = \langle\, (\mathbf{D}')^{\sharp\sharp}\mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{v}^*\,\rangle & \text{con} & (\mathbf{D}')^{\sharp\sharp} \in \mathrm{L}\left\{V'\,;\,V\right\}
\end{array}
$$

Si dice di tipo $\binom{p}{q}$ un tensore p volte contravariante e q volte covariante. Dunque

- $\mathbf{a}^{\flat\flat} \in \mathrm{Bil}\{V \times V\}$ è un *tensore* due volte covariante o di tipo $\binom{0}{2}$,
- $\mathbf{d}^{\sharp\sharp} \in \mathrm{Bil}\{V' \times V'\}$ è un *tensore* due volte contravariante o di tipo $\binom{2}{0}$,
- $\mathbf{b}^{\sharp\flat} \in \mathrm{Bil}\{V' \times V\}$ è un *tensore misto* una volta controvariante ed una volta covariante o di tipo $\binom{1}{1}$,
- $\mathbf{c}^{\flat\sharp} \in \mathrm{Bil}\{V \times V'\}$ è un *tensore misto* una volta covariante ed una volta controvariante o di tipo $\binom{1}{1}$.

Analoga nomenclatura si applica in generale ai tensori definiti come forme multilineari sul prodotto cartesiano di n spazi vettoriali del tipo V o V' .

2.1. Tensori metrici

Nello spazio vettoriale V si consideri un prodotto interno e cioè una forma bilineare simmetrica e definita positiva $\mathbf{g} \in \mathrm{L}^2(V\,;\,\Re)$

$$
\begin{cases}
\mathbf{g}\,(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{g}\,(\mathbf{v},\mathbf{u}) \quad \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in V \\
\mathbf{g}\,(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0\,, \quad \mathbf{g}\,(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{u} = \mathbf{o}\,.
\end{cases}
$$

Il tensore $\mathbf{g} \in \mathrm{Bil}\{V, V\}$ è detto il *tensore metrico* dello spazio $\{V, \mathbf{g}\}$.

Ad esso è associato un operatore lineare $\mathbf{G} \in \mathrm{L}\left\{V\,;\,V'\right\}$ simmetrico e definito positivo, tale che

$$
\boxed{\langle\, \mathbf{G}\mathbf{u}\,,\, \mathbf{v}\,\rangle = \langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{G}\mathbf{v}\,\rangle = \mathbf{g}\,(\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in V\,.}
$$

Proposizione 2.1. Teorema di rappresentazione. *Il tensore metrico induce un isomorfismo* $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{L}\left\{V' \,;\, V\right\}$ *che associa ad ogni vettore* $\mathbf{u}^* \in V'$ *dello spazio duale il vettore* $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}^*) \in V$ *tale che*

$$\boxed{\langle\, \mathbf{u}^* \,,\, \mathbf{v} \,\rangle = \mathbf{g}\left(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}^*), \mathbf{v}\right) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \,.}$$

Dim. Se $\{\mathbf{e}_i\}$ è una base ortonormale di $\{V, \mathbf{g}\}$ si ponga $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}^*) = \langle\, \mathbf{u}^* \,,\, \mathbf{e}_k \,\rangle\, \mathbf{e}_k \,.$

Essendo $\mathbf{g}\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k\right) = \delta_{ik}$, risulta

$$\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}^*), \mathbf{e}_i\right) = \langle\, \mathbf{u}^* \,,\, \mathbf{e}_k \,\rangle\, \mathbf{g}\left(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i\right) = \langle\, \mathbf{u}^* \,,\, \mathbf{e}_i \,\rangle \,,$$

e dunque l'eguaglianza vale per ogni $\mathbf{v} \in V$. □

L'isomorfismo $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{L}\left\{V' \,;\, V\right\}$ induce nello spazio duale V' un prodotto interno definito da

$$\mathbf{g}^*\left(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*\right) := \mathbf{g}\left(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}^*), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}^*)\right) .$$

I tensori metrici sono rispettivamente detti

- $\mathbf{g} = \mathbf{g}^{\flat\flat}$ tensore metrico *covariante*,
- $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}^{*\sharp\sharp}$ tensore metrico *contravariante*.

Si noti che risulta

$$\begin{aligned} &\langle\, \mathbf{G}\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}^*) \,,\, \mathbf{v} \,\rangle = \mathbf{g}\left(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}^*), \mathbf{v}\right) = \langle\, \mathbf{u}^* \,,\, \mathbf{v} \,\rangle \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \,, \quad \forall\, \mathbf{u}^* \in V' \,, \\ &\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{G}\left(\mathbf{u}\right), \mathbf{v}\right) = \langle\, \mathbf{G}(\mathbf{u}) \,,\, \mathbf{v} \,\rangle = \mathbf{g}\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V \,, \quad \forall\, \mathbf{u} \in V \,, \end{aligned}$$

e dunque $\mathbf{G}\, \boldsymbol{\mu} = \mathbf{I} \in \mathrm{L}\left\{V' \,;\, V'\right\}$ e $\boldsymbol{\mu}\, \mathbf{G} = \mathbf{I} \in \mathrm{L}\left\{V \,;\, V\right\}$ per cui

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \mathbf{G}^{-1} \in \mathrm{L}\left\{V' \,;\, V\right\} , \quad \mathbf{G} = \boldsymbol{\mu}^{-1} \in \mathrm{L}\left\{V \,;\, V'\right\} .}$$

Ne segue che

$$\mathbf{g}^*\left(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*\right) = \mathbf{g}\left(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}^*), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}^*)\right) = \langle\, \mathbf{G}\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}^*) \,,\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}^*) \,\rangle = \langle\, \mathbf{u}^* \,,\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}^*) \,\rangle \,.$$

Dunque l'isomorfismo $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{G}^{-1} \in \mathrm{L}\left\{V' \,;\, V\right\}$ è l'operatore associato al tensore metrico $\mathbf{g}^*\left(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*\right)$.

Si consideri

- nello spazio $\{V, \mathbf{g}\}$ una base $\{\mathbf{e}_i \,, i = 1, \ldots, n\}$ ortonormale rispetto al prodotto interno $\mathbf{g}$,
- nello spazio duale $\{V', \mathbf{g}^*\}$ una base $\{\mathbf{e}^i \,, i = 1, \ldots, n\}$ ortonormale rispetto al prodotto interno $\mathbf{g}^*$.

Allora

- la base $\{\boldsymbol{\mu}\mathbf{e}^i \,, i = 1, \ldots, n\}$ di V è ortonormale in $\{V, \mathbf{g}\}$ ed è in dualità con la base $\{\mathbf{e}^i \,, i = 1, \ldots, n\}$ di V',
- la base $\{\mathbf{G}\mathbf{e}_i \,, i = 1, \ldots, n\}$ di V' è ortonormale in $\{V', \mathbf{g}^*\}$ ed è in dualità con la base $\{\mathbf{e}_i \,, i = 1, \ldots, n\}$ di V.

Basta infatti osservare che

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{G}\mathbf{e}_i, \mathbf{G}\mathbf{e}_k) = \langle\, \mathbf{G}\mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{e}_k \,\rangle = \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik} \,,$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{e}^i, \boldsymbol{\mu}\mathbf{e}^k) = \langle\, \boldsymbol{\mu}\mathbf{e}^i \,,\, \mathbf{e}^k \,\rangle = \mathbf{g}^*(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k) = \delta^{ik} \,.$$

In uno spazio con prodotto interno $\{V, \mathbf{g}\}$ l'isomorfismo esistente tra gli spazi duali V e V' consente di correlare i tensori doppi $\mathbf{a}^{\flat\flat}$, $\mathbf{a}^{\sharp\flat}$, $\mathbf{a}^{\flat\sharp}$, $\mathbf{a}^{\sharp\sharp}$ mediante formule del tipo

$$\mathbf{a}^{\flat\flat}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}^{\sharp\flat}(\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{u} \in V \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \,,$$

$$\mathbf{a}^{\sharp\sharp}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \mathbf{a}^{\sharp\flat}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\mu}\, \mathbf{v}^*) \quad \forall\, \mathbf{u}^* \in V \quad \forall\, \mathbf{v}^* \in V \,.$$

Si noti che, con la notazione introdotta in questa sezione, l'operatore lineare $\mathbf{G} = \boldsymbol{\mu}^{-1} \in \mathrm{L}\left\{V \,;\, V'\right\}$ e l'isomorfismo $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{L}\left\{V' \,;\, V\right\}$ associati al tensore metrico $\mathbf{g} \in \mathrm{Bil}\{V \,;\, V\}$ si scrivono $\mathbf{G}^{\flat\flat}$ e $\boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp}$.

E' immediato verificare che valgono le regole di trasformazione

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}^{\flat\flat}\,\mathbf{A}^{\sharp\flat} = \mathbf{A}^{\flat\flat}\,, \quad \mathbf{G}^{\flat\flat}\,\mathbf{A}^{\sharp\sharp} = \mathbf{A}^{\flat\sharp}\,, \quad \boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp}\,\mathbf{A}^{\flat\sharp} = \mathbf{A}^{\sharp\sharp}\,, \quad \boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp}\,\mathbf{A}^{\flat\flat} = \mathbf{A}^{\sharp\flat}\,, \\ &\mathbf{A}^{\flat\sharp}\,\mathbf{G}^{\flat\flat} = \mathbf{A}^{\flat\flat}\,, \quad \mathbf{A}^{\sharp\sharp}\,\mathbf{G}^{\flat\flat} = \mathbf{A}^{\sharp\flat}\,, \quad \mathbf{A}^{\sharp\flat}\,\boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp} = \mathbf{A}^{\sharp\sharp}\,, \quad \mathbf{A}^{\flat\flat}\,\boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp} = \mathbf{A}^{\flat\sharp}\,. \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}^{\flat\flat}\,\mathbf{A}^{\sharp\flat}\,\boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp} = \mathbf{A}^{\flat\sharp}\,, \quad \boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp}\,\mathbf{A}^{\flat\sharp}\,\mathbf{G}^{\flat\flat} = \mathbf{A}^{\sharp\flat}\,, \\ &\mathbf{G}^{\flat\flat}\,\mathbf{A}^{\sharp\sharp}\,\mathbf{G}^{\flat\flat} = \mathbf{A}^{\flat\flat}\,, \quad \boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp}\,\mathbf{A}^{\flat\flat}\,\boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp} = \mathbf{A}^{\sharp\sharp}\,. \end{aligned}$$

Poichè $\mathbf{B}^{\sharp\flat} \in \mathrm{L}\left\{V \,;\, V\right\}$ e $\mathbf{B}^{\flat\sharp} \in \mathrm{L}\left\{V' \,;\, V'\right\}$ è possibile definire la *traccia* dei tensori doppi misti

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{b}^{\sharp\flat}) \;:=\; \mathrm{tr}\,(\mathbf{B}^{\sharp\flat}) = \;\mathrm{tr}\,((\mathbf{B}')^{\flat\sharp})\,,$$

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{c}^{\flat\sharp}) \;:=\; \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^{\flat\sharp}) = \;\mathrm{tr}\,((\mathbf{C}')^{\sharp\flat})\,.$$

Si noti che risulta

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^{\flat\sharp}) = \;\mathrm{tr}\,(\mathbf{G}^{\flat\flat}\,\mathbf{A}^{\sharp\flat}\,\boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp}) = \;\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\mu}^{\sharp\sharp}\,\mathbf{G}^{\flat\flat}\,\mathbf{A}^{\sharp\flat}) = \;\mathrm{tr}\,(\mathbf{I}^{\sharp\flat}\,\mathbf{A}^{\sharp\flat}) = \;\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^{\sharp\flat})$$

e quindi anche $\mathrm{tr}\,(\mathbf{a}^{\sharp\flat}) = \;\mathrm{tr}\,(\mathbf{a}^{\flat\sharp})$.

2.2. Forme di volume

Nello spazio $\{V, \mathbf{g}\}$ si ponga

$$\mathbf{u}_I = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\},$$

con $I = \{1, \ldots, n\}$ multiindice di ordine n di interi crescenti. Una funzione determinante $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_I)$ è *normalizzata* se risulta

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_I)\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}_I) = \det \mathbb{G}(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}_I)\,,}$$

dove $\mathbb{G}(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}_I)$ è la matrice definita da

$$\boxed{\mathbb{G}_{ij}(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}_I) := \mathbf{g}\,(\mathbf{u}_i\,, \mathbf{v}_j)\,.}$$

In $\{V, \mathbf{g}\}$ l'operatore $\mathbf{A}^* \in \mathrm{L}\{V\,;\,V\}$ *aggiunto* di $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{V\,;\,V\}$ è definito dalla identità

$$\boxed{\mathbf{g}\,(\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{g}\,(\mathbf{A}^*\mathbf{v}, \mathbf{u})\,, \quad \forall\, \mathbf{u} \in V\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V\,.}$$

Se $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\{V'\,;\,V'\}$ è l'operatore duale di $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{V\,;\,V\}$ risulta

$$\mathbf{g}\,(\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{u}) = \langle\, \mathbf{G}\mathbf{v}\,,\, \mathbf{A}\mathbf{u}\,\rangle = \langle\, \mathbf{A}'\mathbf{G}\mathbf{v}\,,\, \mathbf{u}\,\rangle\,,$$

$$\mathbf{g}\,(\mathbf{A}^*\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \langle\, \mathbf{G}\mathbf{A}^*\mathbf{v}\,,\, \mathbf{u}\,\rangle = \langle\, \mathbf{G}\mathbf{A}^*\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{v}\,,\, \mathbf{u}\,\rangle\,,$$

e dunque la non singolarità di $\mathbf{G} \in \mathrm{L}\{V\,;\,V'\}$ implica che

$$\boxed{\mathbf{A}' = \mathbf{G}\mathbf{A}^*\mathbf{G}^{-1}\,.}$$

Risulta quindi

$$\boxed{\det(\mathbf{A}^*) = \det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A})\,.}$$

Sia $\boldsymbol{\mu}$ una funzione determinante normalizzata, e si consideri la matrice di GRAM

$$\boxed{\mathbb{G}_{ij}(\mathbf{u}_I) := \mathbf{g}\,(\mathbf{u}_i\,, \mathbf{u}_j)\,.}$$

associata alla n-upla di vettori $\mathbf{u}_I = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset \{V, \mathbf{g}\}$.

Sussiste la relazione

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_I)^2 = \det \mathbb{G}(\mathbf{u}_I)\,.}$$

Pertanto la lista di vettori $\mathbf{u}_I = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset \{V, \mathbf{g}\}$ è linearmente indipendente se e solo se la corrispondente matrice di GRAM è non singolare.

In uno spazio orientato $\{V, \mathbf{g}\}$ si dice:

- *forma di volume* la funzione determinante normalizzata che in corrispondenza di ogni base ortonormale in $\{V, \mathbf{g}\}$ positivamente orientata assume il valore unitario.

Sia $\boldsymbol{\mu}$ l'elemento di volume nello spazio $\{V, \mathbf{g}\}$ e $\boldsymbol{\mu}^*$ è l'elemento di volume nello spazio duale $\{V', \mathbf{g}^*\}$ e siano $\mathbf{u}^I$ e $\mathbf{u}_I$ basi duali in $\{V, \mathbf{g}\}$ e $\{V', \mathbf{g}^*\}$. Risulta allora

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}^*(\mathbf{u}^I)\,\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_I) = 1\,,}$$

e quindi, definita la matrice $\mathbb{G}^*(\mathbf{u}^I)$ con la posizione

$$\boxed{(\mathbb{G}^*)^{ij}(\mathbf{u}^I) = \mathbb{G}^{ij}(\mathbf{u}^I) := \mathbf{g}^*(\mathbf{u}^i\,, \mathbf{u}^j)\,,}$$

si ha che

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}^*(\mathbf{u}^I)^2 = \det \mathbb{G}^*(\mathbf{u}^I) = \frac{1}{\det \mathbb{G}(\mathbf{u}_I)}\,.}$$

Se la base $\mathbf{u}^I$ è ortonormale in $\{V, \mathbf{g}\}$ tale è anche la base $\mathbf{u}^I$ in $\{V', \mathbf{g}^*\}$ e risulta

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}^*(\mathbf{u}^I) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_I) = 1\,.}$$

2.3. Prodotto tensoriale

Dati due spazi vettoriali V e $\mathcal{U}$ si definisca il *prodotto tensoriale* tra V e $\mathcal{U}$ come una operazione *bilineare*

$$\otimes : V \times \mathcal{U} \mapsto V \otimes \mathcal{U}\,,$$

che associa allo spazio prodotto $V \times \mathcal{U}$ uno spazio vettoriale $V \otimes \mathcal{U}$ e gode della seguente proprietà.

- Se $\tilde{\otimes}$ è una operazione bilineare che associa allo spazio prodotto $V \times \mathcal{U}$ uno spazio vettoriale $V \tilde{\otimes} \mathcal{U}$, allora esiste un'unica trasformazione lineare

  $$\mathbf{L} : V \otimes \mathcal{U} \mapsto V \tilde{\otimes} \mathcal{U}\,,$$

  tale che $\tilde{\otimes} = \mathbf{L} \circ \otimes$. La proprietà di unicità della trasformazione lineare $\mathbf{L}$ equivale ad assumere che la mappa $\otimes : V \times \mathcal{U} \mapsto V \otimes \mathcal{U}$ sia suriettiva.

Il prodotto tensoriale così definito è unico a meno di un isomorfismo. Una trattazione generale delle proprietà del prodotto tensoriale può essere trovata in [11].

Nel seguito, per semplicità, si svilupperà una trattazione più elementare.

Si considerino due spazi duali V e V' di dimensione finita n e siano

- $\{\mathbf{e}_i\,, i = 1, \ldots, n\}$ una base di V,
- $\{\mathbf{e}^i\,, i = 1, \ldots, n\}$ la base duale in V'.

Si consideri quindi un tensore $\mathbf{a}$ del tipo $\binom{p}{q}$ e cioè p volte contravariante e q volte covariante.

Il tensore $\mathbf{a}$ può essere considerato equivalentemente come

- una forma multilineare sullo spazio prodotto

$$\times_q^p\,[\,V, V'\,] \; := \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p \text{ volte}} \times \underbrace{V' \times \ldots \times V'}_{q \text{ volte}}\,,$$

- una forma lineare definita sullo spazio prodotto tensoriale

$$\otimes_q^p\,[\,V, V'\,] \; := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ volte}} \otimes \underbrace{V' \otimes \ldots \otimes V'}_{q \text{ volte}}\,.$$

Per chiarire tale affermazione si consideri ad esempio un tensore $\mathbf{a}$ del quarto ordine e del tipo $\binom{2}{2}$ e cioè 2 volte contravariante e 2 volte covariante.

I valori assunti dal tensore $\mathbf{a}$ in corrispondenza dei vettori

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*\} \in V \times V \times V' \times V'\,,$$

possono essere espressi in funzione delle componenti rispetto ad una coppia di basi duali in V e V'. A tal fine si definiscano le componenti

$$A_{ij}^{\;\;kp} := \mathbf{a}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}^k, \mathbf{e}^p)\,.$$

Si ha quindi che $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = A_{ij}^{\;\;kp}\, u^i\, v^j\, {u^*}_k\, {v^*}_p$ o equivalentemente

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = A_{ij}^{\;\;kp} \langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{e}^i\,\rangle \langle\, \mathbf{v}\,,\, \mathbf{e}^j\,\rangle \langle\, \mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{e}_k\,\rangle \langle\, \mathbf{v}^*\,,\, \mathbf{e}_p\,\rangle\,.$$

Si definisca allora il *prodotto tensoriale* $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{v}^*$ come la forma multilineare su $V' \times V' \times V \times V$ tale che

$$\boxed{(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{v}^*)\,(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_p) \; := \langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{e}^i\,\rangle \langle\, \mathbf{v}\,,\, \mathbf{e}^j\,\rangle \langle\, \mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{e}_k\,\rangle \langle\, \mathbf{v}^*\,,\, \mathbf{e}_p\,\rangle\,.}$$

Analogamente si definsce la forma multilineare su $V \times V \times V' \times V'$

$$\boxed{(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_p)\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \; := \langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{e}^i\,\rangle \langle\, \mathbf{v}\,,\, \mathbf{e}^j\,\rangle \langle\, \mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{e}_k\,\rangle \langle\, \mathbf{v}^*\,,\, \mathbf{e}_p\,\rangle\,.}$$

Si definisca quindi lo *spazio prodotto tensoriale* $V \otimes V \otimes V' \otimes V'$ associato allo spazio prodotto cartesiano $V \times V \times V' \times V'$ come lo spazio generato dalle forme multilineari del tipo $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{v}^*$.

E' evidente che lo spazio $V \otimes V \otimes V' \otimes V'$ ammette una base costituita dai prodotti tensoriali $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_p$ con $i, j, p, k = 1, \dots, n$.

Allo spazio prodotto tensoriale $V \otimes V \otimes V' \otimes V'$ corrisponde uno spazio duale $V' \otimes V' \otimes V \otimes V$ con la *dualità* indotta dal prodotto scalare

$$\boxed{\langle\, \overline{\mathbf{u}}^* \otimes \overline{\mathbf{v}}^* \otimes \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{v}} \,,\, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{v}^* \,\rangle := \langle\, \overline{\mathbf{u}}^* \,,\, \mathbf{u} \,\rangle \langle\, \overline{\mathbf{v}}^* \,,\, \mathbf{v} \,\rangle \langle\, \overline{\mathbf{u}} \,,\, \mathbf{u}^* \,\rangle \langle\, \overline{\mathbf{v}} \,,\, \mathbf{v}^* \,\rangle \,.}$$

Si può pertanto scrivere

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = A_{ij}^{\,kp} \langle\, \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_p \,,\, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{v}^* \,\rangle \,.$$

Il tensore $\mathbf{a}$ su $V \times V \times V' \times V'$ viene così ad essere identificato con una forma lineare su $V \otimes V \otimes V' \otimes V'$

$$\mathbf{a} \equiv A_{ij}^{\,kp} \, (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_p) \,,$$

e cioè con un elemento dello spazio $V' \otimes V' \otimes V \otimes V$ duale di $V \otimes V \otimes V' \otimes V'$.

Il *prodotto tensoriale* di due tensori doppi qualsiasi $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e $\mathbf{b}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}})$ è il tensore

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}) := \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\; \mathbf{b}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}) \,.$$

Le componenti di $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ si esprimono in funzione di quelle di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \,,$$
$$\mathbf{b}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}) = B^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \,,$$

mediante la formula

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = A^{ij} B^{kp} \, (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_p) \,.$$

2.4. Espressioni dei tensori metrici

In uno spazio con prodotto interno $\{V, \mathbf{g}\}$ si consideri una base ortonormale $\{\mathbf{e}_i \,, i = 1, \dots, n\}$ così che

$$\mathbf{g}\,(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik} \,.$$

Nello spazio duale $\{V', \mathbf{g}^*\}$ si consideri una base ortonormale $\{\mathbf{e}^i \,, i = 1, \dots, n\}$ rispetto al prodotto interno in esso indotto da $\mathbf{g}$, cioè tale che

$$\mathbf{g}^*\,(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k) = \delta^{ik} \,.$$

Proposizione 2.2. *I tensori metrici covariante* $\mathbf{g}$ *e contravariante* $\mathbf{g}^*$ *possono essere espressi in termini di prodotti tensoriali mediante le formule*

$$\boxed{\begin{aligned} i) \quad & \mathbf{g} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^k \,, \\ ii) \quad & \mathbf{g}^* = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k \,. \end{aligned}}$$

Dim. Dimostrazione della $i)$. Considerando la base $\{\boldsymbol{\mu}\mathbf{e}^i \,, i = 1, \ldots, n\}$ ortonormale in $\{V, \mathbf{g}\}$ e duale di $\{\mathbf{e}^i \,, i = 1, \ldots, n\}$, ponendo

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} u^i \,\boldsymbol{\mu}\mathbf{e}^i \,, \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} v^k \,\boldsymbol{\mu}\mathbf{e}^k \,,$$

ed osservando che

$$\begin{aligned} \mathbf{g}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}\,(\boldsymbol{\mu}\mathbf{e}^i, \boldsymbol{\mu}\mathbf{e}^k)\, u^i\, v^k = \sum_{k=1}^{n} u^k\, v^k = \sum_{k=1}^{n} \langle\, \mathbf{e}^k \,,\, \mathbf{u} \,\rangle \langle\, \mathbf{e}^k \,,\, \mathbf{v} \,\rangle = \\ = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^k)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \,, \end{aligned}$$

si ottiene il risultato. □

Si noti che valgono le formule

$$\boxed{\begin{aligned} i) \quad & \mathbf{g}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle\, \mathbf{g} \,,\, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \,\rangle \,, \\ ii) \quad & \mathbf{g}^*\,(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \langle\, \mathbf{g}^* \,,\, \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{v}^* \,\rangle \,. \end{aligned}}$$

Se le basi $\{\mathbf{e}_i \,, i = 1, \ldots, n\}$ in $\{V, \mathbf{g}\}$ ed $\{\mathbf{e}^i \,, i = 1, \ldots, n\}$ in $\{V', \mathbf{g}^*\}$ sono duali, i tensori metrici hanno le espressioni

$$\boxed{\begin{aligned} i) \quad & \mathbf{g} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{g}\,(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\, \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \,, \\ ii) \quad & \mathbf{g}^* = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{g}^*\,(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j)\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \,. \end{aligned}}$$

2.5. Operazioni di contrazione

Un'analoga definizione vale per una qualsiasi coppia di tensori. E' facile verificare che il prodotto tensoriale gode della proprietà associativa.

Sia $\mathbf{a}^{\sharp\flat}$ un tensore doppio misto e $\mathbf{A}^{\sharp\flat} \in \mathrm{L}\left\{V\,;\,V\right\}$ e $\mathbf{A}^{\flat\sharp} \in \mathrm{L}\left\{V'\,;\,V'\right\}$ gli operatori duali ad esso associati tramite l'identità

$$\mathbf{a}^{\sharp\flat}(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = \langle\, \mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{A}^{\sharp\flat}\mathbf{v}\,\rangle = \langle\, \mathbf{A}^{\flat\sharp}\mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{v}\,\rangle\,.$$

- Si definisce *contrazione* del tensore $\mathbf{a}^{\sharp\flat}$ la traccia $\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^{\sharp\flat}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^{\flat\sharp})$.

Si consideri un tensore di ordine n, e per semplificare le notazioni si ponga $n = 4$, del tipo

$$\mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*)\,.$$

Effettuando la *contrazione* tra due argomenti, uno in V e l'altro in V' si ottiene un tensore di ordine $n-2$.

- L'*operazione di contrazione* tra $\mathbf{u} \in V$ e $\mathbf{u}^* \in V'$, denotata con $\mathtt{C}[\,\mathbf{u}^*,\mathbf{u}\,]$, in corrispondenza del tensore $\mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*)$ ha per risultato il tensore doppio

$$\boxed{\overline{\mathbf{a}}^{\flat\sharp}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*) = \mathtt{C}[\,\mathbf{u},\mathbf{u}^*\,]\,\mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*) := \mathrm{tr}\left[\mathbf{A}^{\flat\sharp}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\right] = \mathrm{tr}\left[\mathbf{A}^{\sharp\flat}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\right].}$$

Gli operatori duali

$$\mathbf{A}^{\flat\sharp}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*) \in \mathrm{L}\left\{V'\,;\,V'\right\}, \quad \mathbf{A}^{\sharp\flat}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*) \in \mathrm{L}\left\{V\,;\,V\right\},$$

sono definiti, per ogni fissata coppia $\{\mathbf{v},\mathbf{v}^*\}$, dalle identità

$$\boxed{\langle\, \mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{A}^{\sharp\flat}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\mathbf{u}\,\rangle = \langle\, \mathbf{A}^{\flat\sharp}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\mathbf{u}^*\,,\, \mathbf{u}\,\rangle := \mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*)\,.}$$

Tale definizione dell'operatore $\mathtt{C}[\,\mathbf{u}^*,\mathbf{u}\,]$ ha il vantaggio di essere invariante e cioè indipendente dalla rappresentazione del tensore $\mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*)$ in termini di componenti rispetto ad una base.

E' comunque essenziale esplicitare l'espressione dell'operatore $\mathtt{C}[\,\mathbf{u}^*,\mathbf{u}\,]$ in termini di componenti per poterne dedurre le principali proprietà e per fornire una forma esplicita del tensore contratto.

A tal fine si osservi che, essendo

$$\mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*) = A_{ij}{}^{kp}\,(\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_p)(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}^*\,\mathbf{v}^*) =$$

$$= \langle\, \mathbf{u}^*\,,\, A_{ij}{}^{kp}\,(\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_p)\,(\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\,(\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}_k)\,\mathbf{u}\,\rangle\,,$$

risulta

$$\boxed{\mathbf{A}^{\sharp\flat}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*) = A_{ij}{}^{kp}\,(\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_p)\,(\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\,(\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}_k)\,.}$$

Analogamente si deduce che

$$\boxed{\mathbf{A}^{\flat\sharp}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*) = A_{ij}{}^{kp}\,(\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_p)\,(\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\,(\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}^i)\,.}$$

In definitiva si ha che

$$\boxed{\overline{\mathbf{a}}^{\flat\sharp}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*) = \operatorname{tr}\left[\mathbf{A}^{\flat\sharp}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\right] = \operatorname{tr}\left[\mathbf{A}^{\sharp\flat}(\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\right] = A_{kj}{}^{kp}\,(\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_p)\,(\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\,.}$$

Si può quindi concludere che in termini di componenti la contrazione tra il primo ed il terzo argomento del tensore

$$\mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp} = A_{ij}{}^{kp}\,(\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_p)\,,$$

che si denota con $\mathtt{C}^1_3(\mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp})$, si effettua eguagliando il primo ed il terzo indice ed effettuando la relativa sommatoria per ottenere

$$\mathtt{C}^1_3(\mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp}) = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}{}^{kp}\,(\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_p)\,.$$

Dalla rappresentazione del tensore contratto in termini di componenti si deduce che lo scalare che si ottiene effettuando n contrazioni successive in un tensore di ordine $2\,n$ è indipendente dall'ordine con cui si effettuano le contrazioni.

Vale cioè l'eguaglianza (per $n=2$)

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathtt{C}[\,\mathbf{u},\mathbf{u}^*\,]\,\mathtt{C}[\,\mathbf{v},\mathbf{v}^*\,]\,\mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*) =\\ &\mathtt{C}[\,\mathbf{v},\mathbf{v}^*\,]\,\mathtt{C}[\,\mathbf{u},\mathbf{u}^*\,]\,\mathbf{a}^{\flat\flat\sharp\sharp}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}{}^{ik}\,.\end{aligned}}$$

In particolare effettuando la contrazione $\mathtt{C}[\,\mathbf{u}^*,\mathbf{u}\,]$ del tensore $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}^*\otimes\mathbf{v}^*$ si ottiene

$$\boxed{\mathtt{C}[\,\mathbf{u},\mathbf{u}^*\,]\,(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}^*\otimes\mathbf{v}^*) = \langle\,\mathbf{u}^*\,,\,\mathbf{u}\,\rangle\,(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}^*)\,.}$$

- La *traccia* di un tensore doppio misto $(\mathbf{a}^* \otimes \mathbf{b})(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) := \langle\, \mathbf{a}^*, \mathbf{u}\,\rangle \langle\, \mathbf{b}, \mathbf{u}^*\,\rangle$ è pari alla sua contrazione e quindi è data da

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{a}^* \otimes \mathbf{b}) = \mathtt{C}[\,\mathbf{u}, \mathbf{u}^*\,]\,(\mathbf{a}^* \otimes \mathbf{b})\,(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \langle\, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}\,\rangle = a^*_k\, b^k$$

  dove b^k e a^*_k sono le componenti di $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a}^*$ rispetto ad una coppia di basi duali, $\{\mathbf{e}_k\,, k = 1, \ldots, n\}$ in V e $\{\mathbf{e}^k\,, k = 1, \ldots, n\}$ in V'.
- L'*operazione di contrazione* $\mathtt{C}[\,\mathbf{u}^*, \mathbf{u}\,]$ tra una coppia ordinata di tensori

$$\mathbf{a}^{\flat\flat}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,, \quad \mathbf{b}^{\sharp\sharp}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)\,,$$

  si definisce effettuando la contrazione del prodotto tensoriale

$$(\mathbf{a}^{\flat\flat} \otimes \mathbf{b}^{\sharp\sharp})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) := \mathbf{a}^{\flat\flat}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \mathbf{b}^{\sharp\sharp}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)\,,$$

  ottenendo così

$$\boxed{\mathtt{C}[\,\mathbf{u}, \mathbf{u}^*\,]\,(\mathbf{a}^{\flat\flat} \otimes \mathbf{b}^{\sharp\sharp})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ki}\, B^{kj}\, (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*)\,.}$$

- Assegnata una coppia di tensori,

$$\mathbf{a}^{\flat\flat}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,, \quad \mathbf{b}^{\sharp\sharp}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)\,,$$

  l'*operazione di contrazione completa* ha per risultato lo scalare che si ottiene effettuando n contrazioni successive di due tensori di ordine n.

Il risultato è indipendente dall'ordine con cui si effettuano le contrazioni. Vale cioè l'eguaglianza (per $n = 2$)

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathtt{C}[\,\mathbf{u}, \mathbf{u}^*\,]\,\mathtt{C}[\,\mathbf{v}, \mathbf{v}^*\,]\,(\mathbf{a}^{\flat\flat} \otimes \mathbf{b}^{\sharp\sharp})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \\ &\mathtt{C}[\,\mathbf{v}, \mathbf{v}^*\,]\,\mathtt{C}[\,\mathbf{u}, \mathbf{u}^*\,]\,(\mathbf{a}^{\flat\flat} \otimes \mathbf{b}^{\sharp\sharp})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, B^{ik}\,.\end{aligned}}$$

Analogamente si definisce l'operazione di contrazione completa tra coppie di tensori del tipo

$$\mathbf{a}^{\flat\sharp}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*)\,, \quad \mathbf{b}^{\sharp\flat}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v})\,,$$

ed in generale tra coppie di tensori tali che le sequenze degli spazi prodotto di definizione siano tali da far corrispondere, in posizioni omologhe, spazi in dualità.

2.6. Prodotto interno tra tensori

In uno spazio con prodotto interno $\{V, \mathbf{g}\}$ si definisce

- *prodotto interno* tra due tensori covarianti

$$\mathbf{a}^{\flat\flat}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) , \quad \mathbf{b}^{\flat\flat}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}) ,$$

lo scalare che si ottiene effettuando la contrazione completa tra i due tensori dopo averli opportunamente trasformati. La trasformazione deve essere tale da rendere possibile la contrazione completa, tenendo presente che è lecito contrarre solo coppie di variabili in dualità.

Il risultato è indipendente dalla trasformazione effettuata. Si può quindi ad esempio trasformare uno di essi in un tensore controvariante ed effettuare la contrazione completa con l'altro, ovvero trasformare entrambi in tensori misti.

Posto allora

$$\mathbf{a}^{\sharp\sharp}(\mathbf{G}\,\mathbf{u}, \mathbf{G}\mathbf{v}) := \mathbf{a}^{\flat\flat}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) ,$$

e ricordando la definizione di prodotto tensoriale

$$(\mathbf{a}^{\sharp\sharp} \otimes \mathbf{b}^{\flat\flat})(\mathbf{G}\,\mathbf{u}, \mathbf{G}\mathbf{v}, \overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}) := \mathbf{a}^{\sharp\sharp}(\mathbf{G}\,\mathbf{u}, \mathbf{G}\mathbf{v})\, \mathbf{b}^{\flat\flat}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}) ,$$

il *prodotto interno* in $\mathrm{L}^n(V\,;\Re)$ è espresso da

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^n(\mathbf{a}^{\flat\flat}, \mathbf{b}^{\flat\flat}) &:= \mathtt{C}[\,\overline{\mathbf{u}}, \mathbf{G}\mathbf{u}\,]\, \mathtt{C}[\,\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{G}\mathbf{v}\,]\, (\mathbf{a}^{\sharp\sharp} \otimes \mathbf{b}^{\flat\flat})(\mathbf{G}\,\mathbf{u}, \mathbf{G}\mathbf{v}, \overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}) = \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} B^{ik} = \sum_{i,k=1}^{n} A^{ik} B_{ik} = \sum_{i,k=1}^{n} A^{i}{}_{k} B_{i}{}^{k} = \sum_{i,k=1}^{n} A_{i}{}^{k} B^{i}{}_{k} . \end{aligned}$$

Dalla definizione si evince che il prodotto interno tra due tensori fornisce il medesimo risultato se l'operazione è effettuata tra una qualsiasi delle coppie di tensori ottenibili l'una dall'altra mediante una operazione di alterazione.

2.7. Forme esterne

Una forma multilineare alternante di ordine k sullo spazio lineare n-dimensionale V è anche detta una k*-forma esterna* o k*-forma differenziale* su V. Le k-forme esterne formano uno spazio vettoriale denotato con

$$\Lambda^k(V\,;\Re) ,$$

che è un sottospazio $n!/(k!(n-k)!)$-dimensionale di $\mathrm{L}^k(V\,;\Re)$.

Per mostrarlo si introduca l'*operatore lineare di alternazione*

$$\mathbb{A} \in \mathrm{L}\left\{\mathrm{L}^k(V\,;\Re)\,;\,\mathrm{L}^k(V\,;\Re)\right\},$$

definito dalla proprietà

$$(\mathbb{A}\mathbf{f})(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S^k}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathbf{f}(\mathbf{u}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{u}_{\sigma(k)})\,.$$

E' facile verificare che

- l'operatore $\mathbb{A}$ ha per immagine il sottospazio $\Lambda^k(V\,;\Re) \subset \mathrm{L}^k(V\,;\Re)$,
- la restrizione di $\mathbb{A}$ a $\Lambda^k(V\,;\Re)$ è l'dentità,
- l'operatore lineare $\mathbb{A}$ è idempotente: $\mathbb{A}\circ\mathbb{A} = \mathbb{A}$.

Il *prodotto esterno* di due forme multilineari $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{L}^k(V\,;\Re)$ e $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{L}^p(V\,;\Re)$ è quindi definito da

$$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta} = \frac{(k+p)!}{k!p!}\,\mathbb{A}\,(\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta})\,.$$

Si consideri il sottoinsieme $S^{k,p} \subset S^{k+p}$ delle permutazioni tali che

$$\sigma(1) < \ldots < \sigma(k)\,, \qquad \sigma(k+1) < \ldots < \sigma(k+p)\,,$$

e sia $\{\mathbf{e}_i\,, i = 1,\ldots,n\}$ una base di V.

■ Il *prodotto esterno* di due forme esterne $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(V\,;\Re)$ e $\boldsymbol{\beta} \in \Lambda^p(V\,;\Re)$ è dato da

$$(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})\,(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{k+p}) = \sum_{\sigma\in S^{k,p}}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(k)})\,\boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}_{\sigma(k+1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(k+p)})\,.$$

Le principali proprietà del prodotto esterno sono le seguenti.

Se $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{L}^k(V\,;\Re)$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{L}^p(V\,;\Re)$ e $\boldsymbol{\gamma} \in \mathrm{L}^s(V\,;\Re)$ si ha che

- $\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta} = \mathbb{A}\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\wedge\mathbb{A}\boldsymbol{\beta}$,
- $\wedge$ è bilineare,
- $\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta} = (-1)^{kp}\,\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\alpha}$,
- $\boldsymbol{\alpha}\wedge(\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})\wedge\boldsymbol{\gamma} = \dfrac{(k+p+s)!}{k!p!s!}\,\mathbb{A}\,(\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\gamma})\,.$

Se $\boldsymbol{\alpha}^i \in \mathrm{L}^1(V\,;\Re)$ con $i = 1,\ldots,k$ sono 1-forme su V, il loro prodotto esterno è una forma multilineare alternante di ordine k e cioè una k-forma esterna.

In particolare se $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{L}^1(V\,;\Re)$ è una 1-forma su V si ha che

$$\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha} = -1\, \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{o}\,.$$

Se $\boldsymbol{\alpha}_i$ con $1 \le i \le k$ è una d_i-forma esterna su V, applicando ripetutamente la regola di composizione del prodotto esterno si ha che

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\alpha}_k = \frac{(d_1 + \cdots + d_k)!}{d_1! \cdots d_k!}\, \mathbb{A}\,(\boldsymbol{\alpha}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\alpha}_k)\,.$$

In particolare se le forme $\boldsymbol{\alpha}_i$ sono 1-forme risulta

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\alpha}_k = k!\, \mathbb{A}\,(\boldsymbol{\alpha}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\alpha}_k)\,.$$

Dunque dalla definizione di $\mathbb{A}$ segue che

$$\boxed{\begin{aligned}&(\boldsymbol{\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\alpha}^k)\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) = \\ &= \sum_{\sigma \in S^k} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \langle\, \boldsymbol{\alpha}^1\,,\, \mathbf{e}_{\sigma(1)}\,\rangle \cdots \langle\, \boldsymbol{\alpha}^k\,,\, \mathbf{e}_{\sigma(k)}\,\rangle = \det\,(\langle\, \boldsymbol{\alpha}^i\,,\, \mathbf{e}_j\,\rangle)\,.\end{aligned}}$$

Quindi se le basi $\{\mathbf{e}_i\,, i = 1, \ldots, n\}$ di V e $\{\mathbf{e}^i\,, i = 1, \ldots, n\}$ di V' sono in dualità, risulta

$$\boxed{\begin{aligned}&(\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^k)\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) = \\ &= \sum_{\sigma \in S^k} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \langle\, \mathbf{e}^1\,,\, \mathbf{e}_{\sigma(1)}\,\rangle \cdots \langle\, \mathbf{e}^k\,,\, \mathbf{e}_{\sigma(k)}\,\rangle = \det\,(\langle\, \mathbf{e}^i\,,\, \mathbf{e}_j\,\rangle) = 1\,.\end{aligned}}$$

■ Se $\{V, \mathbf{g}\}$ è uno spazio n-dimensionale con prodotto interno tale è anche ogni spazio $\Lambda^k(V\,;\Re)$. Infatti il *prodotto interno* indotto in $\Lambda^k(V\,;\Re)$ è definito da

$$\boxed{\langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\beta}\,\rangle_{\mathbf{g}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} A^{i_1 \cdots i_k}\, B_{i_1 \cdots i_k}\,,}$$

dove

$$A^{i_1 \cdots i_k} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}^{i_1}, \ldots \mathbf{e}^{i_k})\,, \qquad B_{i_1 \cdots i_k} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots \mathbf{e}_{i_k})\,,$$

essendo

- $\{\mathbf{e}_i\,, i = 1, \ldots, n\}$ una base ortonormale in $\{V, \mathbf{g}\}$ ed
- $\{\mathbf{e}^i\,, i = 1, \ldots, n\}$ la base duale ortonormale in $\{V', \mathbf{g}^*\}$.

Si noti che $\{\mathbf{e}^i = \mathbf{G}\mathbf{e}_i\,, i = 1, \ldots, n\}$.

Osservazione 2.1. Il prodotto interno $\langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\beta}\, \rangle_{\mathbf{g}}$ tra k-forme esterne di $\Lambda^k(V\,;\,\Re) \subset \mathrm{L}^k(V\,;\,\Re)$ non coincide con quello $\mathbf{g}^k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ definito in $\mathrm{L}^k(V\,;\,\Re)$ e precisamente risulta

$$\langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\beta}\, \rangle_{\mathbf{g}} = \frac{1}{k!}\, \mathbf{g}^k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\,.$$

Nel seguito la norma delle k-forme esterne si intende valutata rispetto al prodotto interno $\langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\beta}\, \rangle_{\mathbf{g}}$ ponendo $\|\, \boldsymbol{\alpha}\, \|^2 = \langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\alpha}\, \rangle_{\mathbf{g}}\,.$ ■

In conclusione

Proposizione 2.3. *Lo spazio vettoriale* $\Lambda^k(V\,;\,\Re)$ *è un sottospazio di* $\mathrm{L}^k(V\,;\,\Re)$ *di dimensione pari al numero* $n!/(k!(n-k)!)$ *di combinazioni di* n *elementi su* k *posti. Una base è costituita dai vettori indipendenti*

$$\{\mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k} \mid 1 < i_1 < \cdots < i_k < n\,\}\,,$$

e si ha che

$$\begin{aligned}
&\{\mathbf{e}_i\,, i = 1, \ldots, n\} \quad \text{ortonormale in } \{V, \mathbf{g}\} \iff \\
&\{\mathbf{e}^i\,, i = 1, \ldots, n\} \quad \text{ortonormale in } \{V', \mathbf{g}^*\} \Rightarrow \\
&\{\mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k} \mid 1 < i_1 < \cdots < i_k < n\,\} \quad \text{ortonormale in } \Lambda^k(V\,;\,\Re)\,.
\end{aligned}$$

Dim. L'indipendenza lineare dei vettori considerati si deduce osservando che se risulta

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} A_{i_1 \cdots i_k}\, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k} = \mathbf{o}\,,$$

allora, formando il prodotto esterno con un sottoinsieme costituito da $n-k$ vettori $\{\mathbf{e}^{j_{k+1}}, \ldots, \mathbf{e}^{j_n}\}$ della base $\{\mathbf{e}^i\,, i = 1, \ldots, n\}$, si ottiene

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} A_{i_1 \cdots i_k}\, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k} \wedge \mathbf{e}^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{j_n} = \mathbf{o}\,,$$

e cioè

$$A_{j_1 \cdots j_k}\, \mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n = \mathbf{o}\,,$$

dove $\{j_1, \ldots, j_k\}$ sono gli indici complementari di $\{j_{k+1}, \ldots, j_n\}$.

Poichè $\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n \neq \mathbf{o}$ in quanto $(\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n)\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$, ne segue che i coefficienti $A_{j_1 \cdots j_k}$ devono essere nulli.

Sia ora $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(V)$ e si ponga

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum A_{i_1 \cdots i_k}\, \mathbf{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{i_k}\,,$$

dove la somma è estesa a tutte le scelte degli indici $\{i_1, \ldots, i_k\}$ nell'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

Applicando l'operatore $\mathbb{A}$ si ottiene

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbb{A}\boldsymbol{\alpha} = \sum A_{i_1 \cdots i_k} \frac{1}{k!} \mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k} \,.$$

Si può assumere che i vettori $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ sono tra loro distinti in quanto in corrispondenza delle altre scelte i coefficienti $A_{i_1 \cdots i_k} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k})$ risultano nulli.

Raggruppando tutti i termini non nulli e notando che in ogni gruppo vi sono $k!$ addendi eguali in quanto ogni scambio di indici fa cambiare segno sia al coefficiente che al prodotto esterno, si perviene all'espressione

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} A_{i_1 \cdots i_k} \mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k} \,.$$

Infine il fatto che l'ortonormalità della base $\{\mathbf{e}_i \,, i = 1, \ldots, n\}$ in $\{V, \mathbf{g}\}$ induce l'ortonormalità della base $\{\mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k} \mid 1 < i_1 < \cdots < i_k < n\}$ in $\Lambda^k(V)$ è una diretta conseguenza della definizione del prodotto interno indotto in $\Lambda^k(V)$ dal tensore metrico $\mathbf{g}$. □

E' facile verificare che

- un insieme di 1-forme $\{\boldsymbol{\alpha}^1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^k\}$ su V con $k \leq n$ è linearmente dipendente se e solo se risulta $\boldsymbol{\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\alpha}^k = \mathbf{o}$.

2.8. Stella di Hodge

Si noti che, posto $\dim V = n$, gli spazi $\Lambda^k(V\,;\Re)$ e $\Lambda^{n-k}(V\,;\Re)$ hanno entrambi dimensione pari a $n!/(k!(n-k)!)$.

Esiste quindi un isomorfismo $\mathbf{L} \in \mathrm{L}\left\{\Lambda^k(V\,;\Re)\,;\,\Lambda^{n-k}(V\,;\Re)\right\}$.

Si osservi ora che per $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \Lambda^k(V)$ risulta $\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{L}\boldsymbol{\beta} \in \Lambda^n(V\,;\Re)$ e dunque se $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda^n(V\,;\Re)$ è una n-forma esterna non nulla si può porre $\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{L}\boldsymbol{\beta} = c\,\boldsymbol{\mu}$ con $c \in \Re$.

In uno spazio con prodotto interno $\{V, \mathbf{g}\}$ con $\dim V = n$ la n-forma esterna non nulla può essere univocamente scelta ponendola eguale alla relativa *forma di volume*.

Si ricordi che la forma di volume è la forma $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda^n(V\,;\Re)$ tale che $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n) = 1$ in corrispondenza di ogni base $\{\mathbf{e}_i \,, i = 1, \ldots, n\}$ positivamente orientata ed ortonormale in $\{V, \mathbf{g}\}$. Si può quindi porre

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n \,.$$

Si noti poi che lo scalare $c \in \Re$ tale che $\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{L}\boldsymbol{\beta} = c\,\boldsymbol{\mu}$, deve dipendere linearmente da $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \Lambda^k(V\,;\Re)$.

E' dunque naturale porre $c = \langle\, \boldsymbol{\alpha} \,,\, \boldsymbol{\beta} \,\rangle_{\mathbf{g}}$, essendo $\langle\, - \,,\, - \,\rangle_{\mathbf{g}}$ il *prodotto interno* indotto da $\mathbf{g}$ in $\Lambda^k(V\,;\Re)$.

Si perviene così alla definizione dell'operatore di HODGE [19] .

■ L'*operatore stella di* HODGE $\star \in \mathrm{L}\left\{\Lambda^k(V\,;\Re)\,;\,\Lambda^{n-k}(V\,;\Re)\right\}$ è definito dalla condizione

$$\boxed{a)\quad \boldsymbol{\alpha} \wedge \star\boldsymbol{\beta} = \langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\beta}\,\rangle_{\mathbf{g}}\, \boldsymbol{\mu}\,, \qquad \boldsymbol{\beta} \in \Lambda^k(V\,;\Re)\,, \quad \forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(V\,;\Re)\,,}$$

che equivale a

$$\boxed{b)\quad \star\,(\mathbf{e}^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,(\mathbf{e}^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\sigma(n)})\,,}$$

per ogni $\sigma \in S^{k,(n-k)} \subset S^n$.

Per mostrare l'equivalenza tra le definizioni $a)$ e $b)$ basta osservare che, al variare di $\sigma \in S^{k,(n-k)} \subset S^n$,

- i vettori $\mathbf{e}^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\sigma(k)}$ generano una base $\mathbf{g}$-ortonormale di $\Lambda^k(V\,;\Re)$,
- i vettori $\mathbf{e}^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\sigma(n)}$ generano una base $\mathbf{g}$-ortonormale di $\Lambda^{n-k}(V\,;\Re)$.

Dunque se nella $a)$ si pone

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k} \quad \text{con} \quad 1 < i_1 < \cdots < i_k < n\,, \qquad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\sigma(k)}\,,$$

allora $\boldsymbol{\alpha} \wedge \star\boldsymbol{\beta} = \langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\beta}\,\rangle_{\mathbf{g}}\, \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{o}$ solo se $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\sigma(k)}$.
Ne segue che deve essere $\star\boldsymbol{\beta} = c\,\mathbf{e}^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\sigma(n)}$ con $c \in \Re$.
Pertanto $\boldsymbol{\alpha} \wedge \star\boldsymbol{\beta} = c\,\mathbf{e}^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\sigma(n)} = \langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\beta}\,\rangle_{\mathbf{g}}\, \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$ e quindi $c = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

Viceversa è facile mostrare che la $b)$ implica la $a)$ applicando ambo i membri ad una base ortonormale.

■ Le principali proprietà stella di HODGE sono le seguenti

$i)$ $\boldsymbol{\alpha} \wedge \star\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \wedge \star\boldsymbol{\alpha} = \langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\beta}\,\rangle_{\mathbf{g}}\, \boldsymbol{\mu}\,, \quad \forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \Lambda^k(V\,;\Re)\,,$

$ii)$ $\star 1 = \boldsymbol{\mu}\,, \qquad \star\boldsymbol{\mu} = 1\,,$

$iii)$ $\star\star\,\boldsymbol{\alpha} = (-1)^{k(n-k)}\boldsymbol{\alpha}\,, \qquad \forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(V\,;\Re)\,,$

$iv)$ $\langle\, \star\boldsymbol{\alpha}\,,\, \star\boldsymbol{\beta}\,\rangle_{\mathbf{g}} = \langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\beta}\,\rangle_{\mathbf{g}}\,, \qquad \forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \Lambda^k(V\,;\Re)\,,$

$v)$ $\langle\, \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\gamma}\,,\, \boldsymbol{\mu}\,\rangle_{\mathbf{g}} = \langle\, \star\boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\gamma}\,\rangle_{\mathbf{g}}\,, \qquad \forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(V\,;\Re)\,, \boldsymbol{\gamma} \in \Lambda^{n-k}(V\,;\Re)\,,$

$vi)$ $\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\gamma} = \langle\, \star\boldsymbol{\alpha}\,,\, \boldsymbol{\gamma}\,\rangle_{\mathbf{g}}\, \boldsymbol{\mu}\,, \qquad \forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(V\,;\Re)\,, \boldsymbol{\gamma} \in \Lambda^{n-k}(V\,;\Re)\,.$

[19] WILLIAM VALLANCE DOUGLAS HODGE (1903-1975). Allievo di WHITTAKER ad Edinburgo in Scozia. Studiò a Cambridge dove divenne professore di matematica. Particolarmente rilevante è la sua teoria degli integrali armonici.

La $i)$ è dovuta alla simmetria del prodotto interno. Le $ii)$ seguono da

$$1 \wedge \star 1 = \langle\, 1\,,\,1\,\rangle_{\mathbf{g}}\, \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} \;\Rightarrow\; \star 1 = \boldsymbol{\mu}\,,$$

$$\boldsymbol{\mu} \wedge \star \boldsymbol{\mu} = \langle\, \boldsymbol{\mu}\,,\,\boldsymbol{\mu}\,\rangle_{\mathbf{g}}\, \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} \;\Rightarrow\; \star \boldsymbol{\mu} = 1\,.$$

La proprietà $iii)$ è di immediata verifica facendo riferimento alla definizione $b)$ della stella di HODGE in termini di prodotti esterni. La proprietà $iv)$ segue dalle relazioni

$$\langle\, \star\boldsymbol{\alpha}\,,\,\star\boldsymbol{\beta}\,\rangle_{\mathbf{g}}\, \boldsymbol{\mu} = \star\boldsymbol{\alpha} \wedge \star\star\boldsymbol{\beta} = (-1)^{(n-k)k} \star\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \wedge \star\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \star\boldsymbol{\beta} = \langle\, \boldsymbol{\alpha}\,,\,\boldsymbol{\beta}\,\rangle_{\mathbf{g}}\, \boldsymbol{\mu}\,.$$

Le $v)$ e $vi)$ sono equivalenti tra loro ed alla $a)$. Possono pertanto essere assunte quali definizioni alternative della stella di HODGE. Per mostrarlo si osservi che l'equivalenza delle $v)$ e $vi)$ segue dall'implicazione

$$\langle\, \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\gamma}\,,\,\boldsymbol{\mu}\,\rangle = \langle\, \star\boldsymbol{\alpha}\,,\,\boldsymbol{\gamma}\,\rangle_{\mathbf{g}} \langle\, \boldsymbol{\mu}\,,\,\boldsymbol{\mu}\,\rangle = \langle\, \star\boldsymbol{\alpha}\,,\,\boldsymbol{\gamma}\,\rangle_{\mathbf{g}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\gamma} = \langle\, \star\boldsymbol{\alpha}\,,\,\boldsymbol{\gamma}\,\rangle_{\mathbf{g}}\, \boldsymbol{\mu}\,,$$

valida in quanto, essendo $\dim \Lambda^n(V\,;\Re) = 1$, le forme

$$\boldsymbol{\mu} \in \Lambda^n(V\,;\Re)\,, \qquad \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\gamma} \in \Lambda^n(V\,;\Re)\,,$$

sono tra loro proporzionali.

Inoltre dalla definizione $a)$ e dalla $iv)$, ponendo $\boldsymbol{\gamma} = \star\boldsymbol{\beta}$, si deduce la $vi)$. Viceversa dalla $vi)$ si deduce la $b)$ con un ragionamento del tutto simile a quello visto in precedenza partendo dalla $a)$.

2.9. Prodotto di Gibbs

Sia $\{V, \mathbf{g}\}$ con $\dim V = n$ uno spazio orientato.

- Il *prodotto di* GIBBS tra due forme esterne $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(V\,;\Re)$ e $\boldsymbol{\beta} \in \Lambda^p(V\,;\Re)$ con $k + p < n$ è la forma esterna di ordine $n - k - p$ definita da

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \,:= \star(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta})\,.}$$

Una nuova definizione dell'operatore di HODGE, in cui i ruoli degli spazi orientati $\{V, \mathbf{g}\}$ e $\{V', \mathbf{g}^*\}$ sono scambiati, consente di definire il prodotto di GIBBS [20] tra vettori di $\{V, \mathbf{g}\}$. Sia $\boldsymbol{\mu}^*$ l'elemento di volume in $\{V', \mathbf{g}^*\}$.

[20] JOSIAH WILLARD GIBBS (1839-1903). Nato nel Connecticut da famiglia di origine inglese, studiò a Yale. Viaggiò in Europa ed a Heidelberg conobbe KIRCHHOFF e HELMHOLTZ dai quali rimase fortemente influenzato. Nel 1876 pubblicò il lavoro *On the Equilibrium of Heterogeneous Substances* che lo rese famoso e impressionò MAXWELL. A GIBBS è dovuto lo sviluppo del calcolo vettoriale di GRASSMANN che soppiantò nelle applicazioni alla fisica quello basato sui quaternioni di HAMILTON. Di grande rilievo furono anche le sue ricerche in meccanica statistica che apparvero nel testo *Elementary Principles in Statistical Mechanics*.

■ L'*operatore stella di* HODGE $* \in \mathrm{L}\left\{\Lambda^k(V' ; \Re) ; \Lambda^{n-k}(V' ; \Re)\right\}$ è definito dalla condizione variazionale

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha}^* \wedge *\boldsymbol{\beta}^* = \langle\, \boldsymbol{\alpha}^* , \boldsymbol{\beta}^* \,\rangle_{\mathbf{g}^*} \boldsymbol{\mu}^* , \qquad \boldsymbol{\beta}^* \in \Lambda^k(V') , \quad \forall\, \boldsymbol{\alpha}^* \in \Lambda^k(V') ,}$$

che equivale a

$$\boxed{* \left(\mathbf{e}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{\sigma(k)}\right) = \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\mathbf{e}_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{\sigma(n)}\right) ,}$$

per ogni $\sigma \in S^{k,(n-k)} \subset S^n$.

Osservando che $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V = V'' = \Lambda^1(V' ; \Re)$, il *prodotto di* GIBBS tra vettori dello spazio orientato $\{V, \mathbf{g}\}$ è definito da

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} := *\big(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\big) \in \Lambda^{n-2}(V' ; \Re) .}$$

Dalla definizione di prodotto esterno si ha che

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} := 2\, \mathbb{A} \left(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\right) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} .$$

Il prodotto di GIBBS gode della proprietà involutiva

$$\boxed{*(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = * * (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (-1)^{2(n-2)}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} .}$$

Si deduce ora un'identità notevole. Ponendo

$$\|\, \mathbf{u} \,\|^2 = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) , \qquad (\!(\, \mathbf{u} , \mathbf{v} \,)\!) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) ,$$

si ha che

$$\begin{aligned} &\langle\, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} , \mathbf{G}\mathbf{u} \otimes \mathbf{G}\mathbf{v} \,\rangle = \langle\, \mathbf{u} , \mathbf{G}\mathbf{u} \,\rangle \langle\, \mathbf{v} , \mathbf{G}\mathbf{v} \,\rangle = \|\, \mathbf{u} \,\|^2 \,\|\, \mathbf{v} \,\|^2 , \\ &\langle\, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} , \mathbf{G}\mathbf{v} \otimes \mathbf{G}\mathbf{u} \,\rangle = \langle\, \mathbf{u} , \mathbf{G}\mathbf{v} \,\rangle^2 = (\!(\, \mathbf{u} , \mathbf{v} \,)\!)^2 . \end{aligned}$$

Ne segue che risulta

$$\begin{aligned} \langle\, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} , \mathbf{G}\mathbf{u} \wedge \mathbf{G}\mathbf{v} \,\rangle &= \langle\, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} , \mathbf{G}\mathbf{u} \otimes \mathbf{G}\mathbf{v} - \mathbf{G}\mathbf{v} \otimes \mathbf{G}\mathbf{u} \,\rangle = \\ &= 2 \left[\|\, \mathbf{u} \,\|^2 \,\|\, \mathbf{v} \,\|^2 - (\!(\, \mathbf{u} , \mathbf{v} \,)\!)^2\right] . \end{aligned}$$

Si può dunque concludere che vale la relazione

$$\boxed{\|\, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \,\|^2 = \|\, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \,\|^2 = \tfrac{1}{2} \langle\, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} , \mathbf{G}\mathbf{u} \wedge \mathbf{G}\mathbf{v} \,\rangle = \|\, \mathbf{u} \,\|^2 \,\|\, \mathbf{v} \,\|^2 - (\!(\, \mathbf{u} , \mathbf{v} \,)\!)^2 .}$$

Da essa può dedursi in particolare la diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ nel contesto degli spazi vettoriali di dimensione finita. Si noti inoltre che ponendo

$$\cos\alpha = \frac{(\!(\mathbf{u}\,, \mathbf{v})\!)}{\|\,\mathbf{u}\,\|\,\|\,\mathbf{v}\,\|}\,, \qquad |\sin\alpha\,| = \frac{\|\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}\,\|}{\|\,\mathbf{u}\,\|\,\|\,\mathbf{v}\,\|}\,,$$

la relazione precedente diventa $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Si deduce ora una espressione per il doppio prodotto di GIBBS.

Preliminarmente si osservi che, essendo

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} \in \Lambda^{n-2}(V'\,;\Re)\,, \qquad (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\wedge\mathbf{x} \in \Lambda^{n-1}(V'\,;\Re)\,,$$

risulta $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{x} = *\big[(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\wedge\mathbf{x}\big] \in \Lambda^1(V') = V'' = V$. Si osservi ora che

$$\langle\, (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{x}\,, \mathbf{y}\,\rangle_{\mathbf{g}} = \langle\; * \big[(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\wedge\mathbf{x}\big]\,, \mathbf{y}\,\rangle_{\mathbf{g}} = \langle\, \big[(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\wedge\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\big]\,, \boldsymbol{\mu}\,\rangle_{\mathbf{g}}\,.$$

Poichè $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\wedge\mathbf{x}\wedge\mathbf{y} \in \Lambda^n(V'\,;\Re)$ si può porre $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\wedge\mathbf{x}\wedge\mathbf{y} = c\,\boldsymbol{\mu}$. Daltronde si ha che

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\wedge\mathbf{x}\wedge\mathbf{y} = *(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}) = \langle\, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\,, \mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\,\rangle_{\mathbf{g}}\,\boldsymbol{\mu}\,,$$

e quindi risulta

$$\langle\, (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{x}\,, \mathbf{y}\,\rangle_{\mathbf{g}} = c = \langle\, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\,, \mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\,\rangle_{\mathbf{g}}\,.$$

Essendo dunque

$$\begin{aligned}\langle\, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\,, \mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\,\rangle_{\mathbf{g}} &= \tfrac{1}{2}\,(\!(\, \mathbf{u}\otimes\mathbf{v} - \mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\,, \mathbf{x}\otimes\mathbf{y} - \mathbf{y}\otimes\mathbf{x}\,)\!) = \\ &= (\!(\, \mathbf{u}\,, \mathbf{x}\,)\!)(\!(\, \mathbf{v}\,, \mathbf{y}\,)\!) - (\!(\, \mathbf{v}\,, \mathbf{x}\,)\!)\langle\, \mathbf{u}\,, \mathbf{y}\,\rangle\,,\end{aligned}$$

si può concludere che

$$\boxed{(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{x} = (\!(\, \mathbf{u}\,, \mathbf{x}\,)\!)\,\mathbf{v} - (\!(\, \mathbf{v}\,, \mathbf{x}\,)\!)\,\mathbf{u}\,.}$$

2.10. Prodotto vettoriale

Se $\dim V = 3$ il prodotto di GIBBS $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ di due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{V, \mathbf{g}\}$, è un vettore di $\{V, \mathbf{g}\}$ definito da

$$\boxed{\mathbf{u}\times\mathbf{v} := *(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\,.}$$

detto *prodotto vettoriale* di $\mathbf{u}$ per $\mathbf{v}$.

L'operatore stella di HODGE $* \in L\left\{\Lambda^1(V'\,;\Re)\,;\,\Lambda^2(V'\,;\Re)\right\}$ tra i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{V, \mathbf{g}\}$ ha l'espressione

$$\boxed{\mathbf{u} \wedge *\mathbf{v} = \langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{v}\,\rangle_{\mathbf{g}^*}\, \boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{g}\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,\boldsymbol{\mu}^*\,, \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in \{V,\mathbf{g}\}\,.}$$

Si noti che

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{u}) = \langle\, \mathbf{u}\times\mathbf{v}\,,\, \mathbf{u}\,\rangle_{\mathbf{g}^*} = \langle\, *(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\,,\, \mathbf{u}\,\rangle_{\mathbf{g}^*} = \langle\, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\,,\, \boldsymbol{\mu}^*\,\rangle_{\mathbf{g}^*} = 0\,,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{v}) = \langle\, \mathbf{u}\times\mathbf{v}\,,\, \mathbf{v}\,\rangle_{\mathbf{g}^*} = \langle\, *(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\,,\, \mathbf{v}\,\rangle_{\mathbf{g}^*} = \langle\, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}\,,\, \boldsymbol{\mu}^*\,\rangle_{\mathbf{g}^*} = 0\,.$$

Dunque

- se i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ sono proporzionali, il prodotto $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ è nullo,
- se i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ sono non nulli e non proporzionali il prodotto $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ è un vettore non nullo ortogonale al piano generato dai vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{V, \mathbf{g}\}$.

Si osservi ora che sussiste la seguente notevole identità che può essere assunta come definizione alternativa dell'operazione prodotto vettoriale.

$$\boxed{\mathbf{g}\,(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)\,, \quad \forall\, \mathbf{u}_i \in V \quad i = 1,2,3\,.}$$

Infatti risulta

$$\begin{aligned}\mathbf{g}\,(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3) &= \langle\, \mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2\,,\, \mathbf{u}_3\,\rangle_{\mathbf{g}^*} = \langle\, *(\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2)\,,\, \mathbf{u}_3\,\rangle_{\mathbf{g}^*} = \\ &= \langle\, \mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3\,,\, \boldsymbol{\mu}^*\,\rangle_{\mathbf{g}^*} = c\,.\end{aligned}$$

Ponendo $\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3 = c\,\boldsymbol{\mu}^*$ si ha che

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3)(\mathbf{G}\mathbf{u}_1,\mathbf{G}\mathbf{u}_2,\mathbf{G}\mathbf{u}_3) &= \det\,[\,\mathbf{g}\,(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)\,] = \\ &= \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)^2 = \boldsymbol{\mu}^*(\mathbf{G}\mathbf{u}_1,\mathbf{G}\mathbf{u}_2,\mathbf{G}\mathbf{u}_3)^2\,,\end{aligned}$$

e quindi $c = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$.

Dall'identità segue in particolare che

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \|\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}\,\|^2 = \|\,\mathbf{u}\,\|^2\,\|\,\mathbf{v}\,\|^2 - (\!(\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,)\!)^2\,.}$$

Dunque dalla relazione

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u},\mathbf{v},\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\|\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}\,\|}) = \|\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}\,\|\,,}$$

si deduce che

- la terna $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$ è una base di $\{V, \mathbf{g}\}$ positivamente orientata,
- la norma $\|\, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \,\|$ del prodotto vettoriale è pari alla misura dell'area del parallelogramma di lati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Vale inoltre l'identità

$$\boxed{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle\, (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{x} \,,\, \mathbf{y} \,\rangle \,, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \,,}$$

che in forza della relazione $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ equivale a

$$\boxed{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{x} = \langle\, \mathbf{u} \,,\, \mathbf{x} \,\rangle\, \mathbf{v} - \langle\, \mathbf{v} \,,\, \mathbf{x} \,\rangle\, \mathbf{u} \,, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x} \in V \,.}$$

Considerando quindi l'operatore lineare $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \in \mathrm{L}\left\{V \,;\, V'\right\}$ associato al tensore emisimmetrico $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \in \Lambda^2(V \,;\, \Re)$ tramite la relazione

$$\boxed{\langle\, (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})[\,\mathbf{x}\,] \,,\, \mathbf{y} \,\rangle = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \,,}$$

si deduce che sussiste la relazione

$$\boxed{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})[\,\mathbf{x}\,] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{x} \,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in V \,.}$$

Il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è pertanto il vettore assiale associato al tensore emisimmetrico $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$. Si ha cioè che

$$\boxed{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\,\mathrm{axial}\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \,.}$$

2.11. Tensore cofattore

In uno spazio con prodotto interno $\{V, \mathbf{g}\}$ sia $\mathbf{a} \in L(V, V \,;\, \Re)$ un tensore 2-covariante e $\mathbf{A} \in L(V \,;\, V)$ l'operatore lineare ad esso associato rispetto alla metrica $\mathbf{g} \in L(V, V \,;\, \Re)$:

$$\mathbf{g}\,(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{a}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \,.$$

Assumendo che

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T \neq 0 \,,$$

il tensore cofattore associato al tensore $\mathbf{A} \in L(V \,;\, V)$ è il tensore $\mathrm{cof}\, \mathbf{A} \in L(V \,;\, V)$ definito dalla relazione

$$\boxed{\text{i)} \quad \mathrm{cof}\, \mathbf{A} = (\,\det \mathbf{A})\, \mathbf{A}^{-T} \,.}$$

Risulta quindi

$$\boxed{\mathbf{A}^T \operatorname{cof} \mathbf{A} = (\operatorname{cof} \mathbf{A})^T \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\, \mathbf{I}\,.}$$

Tale proprietà caratteristica del tensore cofattore equivale a ciascuna delle seguenti:

$$\boxed{\begin{array}{ll} ii) & (\operatorname{cof} \mathbf{A})\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{a}) \times (\mathbf{A}\mathbf{b})\,, \\[2ex] iii) & (\operatorname{cof} \mathbf{A})\ \operatorname{axial} \mathbf{W} = \operatorname{axial} (\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^T)\,. \end{array}}$$

con $\mathbf{W} \in L(V\,;\,V)$ tensore emisimmetrico. Per semplicità sia $\dim V = 3$.
L'equivalenza tra $i)$ e $ii)$ segue osservando che dalle relazioni

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{x}) = (\det \mathbf{A})\, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})\,,$$

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{g}\,(\mathbf{A}\mathbf{a} \times \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{x})\,,$$

si deduce che

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}\,(\mathbf{A}\mathbf{a} \times \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{g}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, (\det \mathbf{A})\, \mathbf{I}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{g}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, (\operatorname{cof} \mathbf{A})^T \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{g}\,((\operatorname{cof} \mathbf{A})(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{A}\mathbf{x})\,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in V\,. \end{aligned}$$

Allora la regolarità di $\mathbf{A}$ implica la $i)$ e la $ii)$ sono equivalenti.
Per mostrare l'equivalenza tra $i)$ e $iii)$ si noti che per definizione

$$\boldsymbol{\mu}(\operatorname{axial} \mathbf{W}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{g}\,(\mathbf{W}\mathbf{x}, \mathbf{y})\,.$$

Allora dalla regolarità di $\mathbf{A}$ si deduce che

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mu}(\operatorname{axial} (\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^T), \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{g}\,(\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^T\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{g}\,(\mathbf{W}\mathbf{A}^T\mathbf{x}, \mathbf{A}^T\mathbf{y}) \\ &= \boldsymbol{\mu}(\operatorname{axial} \mathbf{W}, \mathbf{A}^T\mathbf{x}, \mathbf{A}^T\mathbf{y}) = (\det \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}^T (\operatorname{cof} \mathbf{A}) \operatorname{axial} \mathbf{W}, \mathbf{A}^T\mathbf{x}, \mathbf{A}^T\mathbf{y}) \\ &= (\det \mathbf{A}^T)(\det \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\mu}((\operatorname{cof} \mathbf{A}) \operatorname{axial} \mathbf{W}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\mu}((\operatorname{cof} \mathbf{A}) \operatorname{axial} \mathbf{W}, \mathbf{x}, \mathbf{y})\,. \end{aligned}$$

L'equivalenza tra $i)$ e $iii)$ segue quindi dalla proprietà

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \iff \mathbf{a} = \mathbf{o}\,.$$

IV – VARIETA' DIFFERENZIABILI

Il concetto di varietà differenziabile è una estensione di quella di superficie regolare di uno spazio euclideo e consente di analizzare oggetti geometrici costituiti da un insieme che localmente è messo in corrispondenza biunivoca con uno spazio topologico. I vari pezzi locali sono messi insieme mediante corrispondenze sufficientemente regolari da garantire un opportuno ordine di differenziabilità.

1. VARIETA' MODELLATE SU $\Re^n$

Nel seguito si considerano varietà differenziabili che localmente sono in corrispondenza biunivoca con uno spazio di dimensione finita n.

- Tali varietà differenziabili sono dette *varietà modellate su* $\Re^n$.

Si premette la seguente definizione

- Siano M_1 ed M_2 due spazi metrici. Una mappa $\varphi : M_1 \mapsto M_2$ è un *omeomorfismo* se è biunivoca e continua con l'inversa.

Gli spazi M_1 ed M_2 sono allora detti *omeomorfi*.

E'fondamentale la seguente proprietà [20].

Proposizione 1.1. Invarianza dei domini. *Sia $U \subseteq \Re^n$ un aperto e $f : U \to \Re^n$ un'applicazione biunivoca continua. Allora l'insieme immagine $f(U) \subseteq \Re^n$ è aperto in $\Re^n$. L'applicazione $f : U \to \Re^n$ è quindi un omeomorfismo di $U \subseteq \Re^n$ su $f(U) \subseteq \Re^n$.* □

Si noti che la prima affermazione della proposizione 1.1 assicura che per ogni aperto $V \subseteq U$ l'insieme $f(V) \subseteq \Re^n$ è aperto in $\Re^n$. Ne segue che l'applicazione inversa $f^{-1} : f(U) \to \Re^n$ è continua e pertanto l'applicazione $f : U \to \Re^n$ è un omeomorfismo di $U \subseteq \Re^n$ su $f(U) \subseteq \Re^n$.

La proprietà enunciata nella proposizione 1.1 è detta invarianza dei domini in quanto essa implica che la proprietà di essere un dominio (un aperto connesso) è invariante rispetto ad applicazioni biunivoche continue in $\Re^n$.

Sia $\Re^n_+ \subset \Re^n$ il semispazio chiuso definito da

$$\Re^n_+ := \big\{x_1, \ldots, x_n \in \Re^n \, : \, x_n \geq 0\big\} \, .$$

Si dà allora la seguente definizione.

> Una *varietà modellata su* $\Re^m$ dotata di *frontiera* in $\Re^n$ è una varietà $\mathbb{M} \subseteq \Re^n$ tale che
>
> - Per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ esistono un intorno $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ di $\mathbf{p}$ ed un intero m tali che $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ è omeomorfo ad $\Re^m$ oppure ad $\Re^m_+$.

In forza della proprietà di invarianza dei domini, un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ non può avere un intorno omeomorfo sia a $\Re^m$ che a $\Re^m_+$ ed inoltre in ogni punto $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ l'intero m risulta univocamente definito.

L'esponente m in $\Re^m$ è detto la *dimensione della varietà* $\mathbb{M}$ in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$. Se la dimensione è la stessa in ogni punto si dice che la varietà $\mathbb{M}$ ha *dimensione* m.

- Se un intorno $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ di $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ è omeomorfo ad $\Re^m$ si dice che $\mathbf{p}$ è *interno* ad $\mathbb{M}$.
- Se un intorno $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ di $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ è omeomorfo ad $\Re^m_+$ si dice che $\mathbf{p}$ appartiene alla *frontiera* $\partial\mathbb{M}$ di $\mathbb{M}$.

2. CARTE ED ATLANTI

Siano $\mathbb{U}$ e V sono sottoinsiemi aperti della varietà $\mathbb{M}$. Due omeomorfismi $x : \mathbb{U} \to \Re^m$ e $\overline{x} : \overline{\mathbb{U}} \to \Re^m$ sono detti *relativamente-* C^∞ se le mappe composte

$$\begin{cases} \overline{x} \circ x^{-1} : x(\mathbb{U} \cap \overline{\mathbb{U}}) \to \overline{x}(\mathbb{U} \cap \overline{\mathbb{U}}) \, , \\ x \circ \overline{x}^{-1} : \overline{x}(\mathbb{U} \cap \overline{\mathbb{U}}) \to x(\mathbb{U} \cap \overline{\mathbb{U}}) \, , \end{cases} \quad \text{sono} \quad \mathrm{C}^\infty.$$

Una famiglia di omeomorfismi relativamente- C^∞ i cui domini ricoprono $\mathbb{M}$ e detto un *atlante* $\mathcal{A}$ di $\mathbb{M}$.

Un omeomorfismo $x : \mathbb{U} \to \Re^m$ di un atlante $\mathcal{A}$ è detto una *carta* o un *sistema di coordinate* di dominio $\mathbb{U}$ ed è indicato con $\{x, \mathbb{U}\}$. Risulta

$$\begin{cases} x(\mathbf{p}) = \{x_1, \ldots x_n\} \in V \subset \Re^m \, , \\ x^{-1}(x_1, \ldots x_n) = \mathbf{p} \in \mathbb{U} \, . \end{cases}$$

- Un atlante $\mathcal{A}$ è detto massimale per $\mathbb{M}$ se non esiste alcun atlante di $\mathbb{M}$ che lo contiene.
- Dato un atlante $\mathcal{A}$ di $\mathbb{M}$ esiste un unico *atlante massimale* di $\mathbb{M}$ che lo contiene. Esso è costituito da tutte le carte relativamente-C^∞ alle carte di $\mathcal{A}$.
- La coppia $\{\mathbb{M}, \mathcal{A}\}$ è detta una varietà C^∞ o una *varietà differenziabile*.
- L'atlante $\mathcal{A}$ è detto anche la *struttura differenziale* di $\mathbb{M}$.

Dalle definizioni si evince che la topologia di spazio metrico non gioca un ruolo essenziale nel definire le proprietà delle varietà differenziabili.

Ciò che realmente conta è la struttura differenziale indotta dai sistemi di coordinate, come risulta evidente dalle definizioni che seguono.

- Una funzione $f : \mathbb{M} \mapsto \Re$ è *differenziabile* se, per ogni sistema di coordinate $\{x, \mathbb{U}\}$ su $\mathbb{M}$ risulta differenziabile la composizione

$$f \circ x^{-1} : \Re^m \mapsto \Re\,.$$

La proprietà sussiste per ogni sistema di coordinate.

- Un'applicazione $F : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^n$ è una *applicazione differenziabile* o un *morfismo* se, per ogni coppia di sistemi di coordinate $\{x, \mathbb{U}\}$ su $\mathbb{M}$ e $\{y, V\}$ su $\mathbb{N}$ risulta differenziabile la composizione

$$y \circ F \circ x^{-1} : \Re^m \mapsto \Re^m\,.$$

La proprietà sussiste per ogni coppia di sistemi di coordinate.

- Un'applicazione $F : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^n$ è una *diffeomorfismo* se è un omeomorfismo differenziabile e se $F^{-1} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{M}$ è differenziabile.

Se $F : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$ è un diffeomorfismo, l'applicazione inversa $F^{-1} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{M}$ è anch'essa un diffeomorfismo.

Se esiste un diffeomorfismo $F : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$ le varietà $\mathbb{M}$ e $\mathbb{N}$ sono dette *diffeomorfe*.

3. RANGO E PUNTI CRITICI

Si denotino con

- D_i la derivazione partiale rispetto all' i-esima componente di $\{x^1, \ldots, x^n\}$

e si ponga

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(\mathbf{p}) = D_i\,(F \circ x^{-1})\,(x(\mathbf{p}))\,.$$

Siano allora $\{x, \mathbb{U}\}$ e $\{\xi, \overline{\mathbb{U}}\}$ due sistemi di coordinate sulla varietà $\mathbb{M}$.

Alla derivata della mappa $\xi \circ x^{-1}$ nel punto $x(\mathbf{p})$ si associa la *matrice Jacobiana*

$$D\,[\,\xi \circ x^{-1}\,]\,(x(\mathbf{p})) \iff \left[\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\mathbf{p})\right].$$

La regolarità delle carte assicura che l'*operatore Jacobiano* è non singolare.

L'operatore inverso è

$$D\,[\,x \circ y^{-1}\,]\,(\xi(\mathbf{p})) \iff \left[\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}(\mathbf{p})\right].$$

Ne segue che per ogni mappa differenziabile $f : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}^n$ la derivata

$$D\,[\,y \circ F \circ x^{-1}\,]\,(x(\mathbf{p})) \iff \left[\frac{\partial (y^i \circ F)}{\partial x^j}(\mathbf{p})\right],$$

ha rango indipendente dai sistemi di coordinate $\{x, \mathbb{U}\}$ su $\mathbb{M}$ e $\{y, \mathbb{V}\}$ su $\mathbb{N}^n$ e si dice che esso è il *rango* di F in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$.

- I *punti critici* della mappa F sono i $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ in cui il rango di F è $< n$ e cioè minore della dimensione della varietà $\mathbb{N}^n$ di arrivo.
  Gli altri punti sono detti *regolari*.

Proposizione 3.1. Trasformazione di coordinate. *Siano $\{x, \mathbb{U}\}$ e $\{y, \mathbb{V}\}$ due sistemi di coordinate su $\mathbb{M}^n$ e $f : \mathbb{M}^n \mapsto \Re$ una mappa differenziabile.*
Allora su $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^k}\,\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\,.$$

Dim. Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p}) =& D_i\,(f\circ x^{-1})\,(x(\mathbf{p})) = D_i\,[\,f\circ y^{-1}\,]\circ[\,y\circ x^{-1}\,]\,(x(\mathbf{p})) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} D_k\,[f\circ y^{-1}]\,(y(\mathbf{p}))\circ D_i\,[\,y\circ x^{-1}\,]^k\,(x(\mathbf{p})) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} D_k\,[\,f\circ y^{-1}\,]\,(y(\mathbf{p}))\circ D_i\,[\,y^k\circ x^{-1}\,]\,(x(\mathbf{p})) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^k}(\mathbf{p})\,\frac{\partial y^k}{\partial x^i}(\mathbf{p})\,,\end{aligned}$$

si ottiene il risultato. □

La formula della trasformazione di coordinate può anche scriversi

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\,.$$

- L'operatore $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ mappa f in $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$.
- L'operatore $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{p})$ mappa f in $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p})$.
- ■ Si noti che definendo $\mathbf{u} := \dfrac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{p})$ sussiste la proprietà caratteristica

$$\boxed{\mathbf{u}(f\,g) = f(\mathbf{p})\,\mathbf{u}(g) + \mathbf{u}(f)\,g(\mathbf{p})\,.}$$

e l'operatore $\mathbf{u}$ è detto una *derivazione puntuale*.

Vale la seguente proprietà ([20], vol. I, teor. 10, pag. 59).

Proposizione 3.2. *Siano* $\mathbb{M}$ *e* $\mathbb{N}$ *due varietà differenziabili ed* $F:\mathbb{M}\mapsto\mathbb{N}$ *una mappa differenziabile. Allora*

- $\boxed{\textit{se } n\le m \textit{ ed } F \textit{ ha rango } n \textit{ in } \mathbf{p}\in\mathbb{M}}$

per ogni sistema di coordinate $\{y,\mathbb{V}\}$ *attorno a* $F(\mathbf{p})\in\mathbb{N}$ *esiste un sistema di coordinate* $\{x,\mathbb{U}\}$ *attorno a* $\mathbf{p}\in\mathbb{M}$ *tale che*

$$y\circ F\circ x^{-1}\,(a^1,\dots,a^m) = \{a^1,\dots,a^n\}\,,$$

- $\boxed{\textit{se } n\ge m \textit{ ed } F \textit{ ha rango } m \textit{ in } \mathbf{p}\in\mathbb{M}}$

per ogni sistema di coordinate $\{x,\mathbb{U}\}$ *attorno a* $\mathbf{p}\in\mathbb{M}$ *esiste un sistema di coordinate* $\{y,\mathbb{V}\}$ *attorno a* $F(\mathbf{p})\in\mathbb{N}$ *tale che*

$$y\circ F\circ x^{-1}\,(a^1,\dots,a^m) = \{a^1,\dots,a^m,0,\dots,0\}\,.$$

□

Si danno le seguenti definizioni.

- Una mappa differenziabile $F : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$ con $n \geq m$ ed avente rango m in tutti i punti di $\mathbb{M}$ è detta una *immersione*.
- Un'immersione è detta una *inclusione differenziabile* se è un omeomorfismo tra il suo dominio $\mathbb{M}$ e la sua immagine $F(\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{N}$.

4. SPAZIO TANGENTE

Sia $\mathbb{M}$ una varietà di *dimensione* n.

- Una *curva regolare* $c(\lambda)$ passante per $\mathbf{p} \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ è un insieme di punti di $\mathbb{M}$ che nella carta $\{x, \mathbb{U}\}$ corrisponde ad una curva regolare contenuta in $V = x(\mathbb{U})$ e passante per $x(\mathbf{p}) = \{x^1, \dots x^m\} \in V \subset \Re^m$. Sia $c(0) = \mathbf{p}$.
- Un *vettore tangente* in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ è la derivata di $c(\lambda)$ rispetto a λ in 0.
- Lo *spazio tangente* $T_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ è lo spazio vettoriale di dimensione n costituito dai vettori tangenti in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$.
- La *fibra tangente* $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ è lo spazio lineare delle coppie $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ con $\mathbf{v} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ e con le operazioni lineari definite da
$$\begin{aligned}&\{\mathbf{p}, \mathbf{v}_1\} + \{\mathbf{p}, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{p}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}\,,\\ &\{\mathbf{p}, \alpha\,\mathbf{v}\} = \alpha\,\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}\,.\end{aligned}$$
- La *varietà tangente* $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ alla varietà $\mathbb{M}$ è l'unione disgiunta delle fibre tangenti $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ al variare di $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$.
- La mappa di proiezione $\boldsymbol{\pi} : \mathbb{T}_{\mathbb{M}} \mapsto \mathbb{M}$ associa ad ogni coppia $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ la posizione $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$. Dunque $\boldsymbol{\pi}\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} := \mathbf{p}$.
- L'insieme $\boldsymbol{\pi}^{-1}(\mathbf{p})$ è la fibra tangente in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$.

Sia $F : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$ una mappa differenziabile.

- La derivata di F nel punto $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ è una trasformazione lineare tra gli spazi tangenti:
$$dF(\mathbf{p}) : T_{\mathbb{M}}(\mathbf{p}) \mapsto T_{\mathbb{N}}(F(\mathbf{p}))\,.$$

Alla derivata si associa naturalmente la seguente trasformazione lineare tra le fibre tangenti.

- Il *differenziale* di F in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ è la trasformazione lineare tra le fibre tangenti
$$F_{*\mathbf{p}} : \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p}) \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}(F(\mathbf{p}))\,,$$
definita dalla relazione
$$F_{*\mathbf{p}}\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} := \{F(\mathbf{p}), dF(\mathbf{p})[\,\mathbf{v}\,]\}\,, \quad \forall\,\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})\,,$$
dove $dF(\mathbf{p})[\,\mathbf{v}\,]$ è la derivata direzionale di F nella direzione $\mathbf{v} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ calcolata nel punto $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$.

L'applicazione

$$F_* : \mathbb{T}_{\mathbb{M}} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$$

è l'unione delle applicazioni $F_{*\mathbf{p}}$ al variare di $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$.

Se $F : \mathbb{T}_{\mathbb{M}} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$ e $G : \mathbb{T}_{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{L}}$ sono mappe differenziabili, allora la regola di derivazione a catena si traduce nella semplice relazione

$$G_* F_* = (G \circ F)_* .$$

4.1. Derivazioni puntuali

Lo *spazio tangente* $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathbb{M})$ ad una varietà $\mathbb{M}$ può anche essere definito come lo spazio delle *derivazioni puntuali* in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$.

Una *derivazione puntuale* è un operatore lineare $\ell \in \mathrm{L}\left\{\mathrm{C}^\infty(\mathbb{M}), \Re\right\}$ che gode della proprietà caratteristica

$$\boxed{\ell(f\, g) = f(\mathbf{p})\, \ell(g) + \ell(f)\, g(\mathbf{p})\,.}$$

Per dimostrare che lo spazio delle derivazioni puntuali in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ ha dimensione n si fa ricorso al lemma seguente.

Lemma 4.1. *Sia $f : U \mapsto \Re$ una funzione C^∞ in un intorno $U \subseteq \Re^m$ aperto e convesso dell'origine e sia $f(\mathbf{o}) = 0$. Allora esistono n funzioni $\mathrm{C}^\infty(U)$ $g_i : U \mapsto \Re$ $i = 1, \ldots, n$ tali che*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x^i\, g_i(\mathbf{x})\,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in U\,.$$

Dim. La convessità di U consente di porre $h_{\mathbf{x}}(t) := f(t\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in U$ e $t \in [\,0, 1\,]$. Quindi dal teorema fondamentale del calcolo si evince che

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^1 D\, h_{\mathbf{x}}(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} D_i\, f(t\mathbf{x})\, x^i\ \mathrm{d}t\,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in U\,.$$

Basta quindi porre

$$g_i(\mathbf{x}) = \int_0^1 D_i\, f(t\mathbf{x})\ \mathrm{d}t \quad \forall\, \mathbf{x} \in U\,.$$

Si noti che risulta $g_i(\mathbf{o}) = D_i\, f(\mathbf{o})$. $\square$

Si osservi ora che

$$\ell(1) = \ell(1 \cdot 1) = 1\,\ell(1) + 1\,\ell(1)$$

per cui $\ell(1) = 0$ e quindi anche $\ell(c) = c\,\ell(1) = 0$.

Proposizione 4.2. *Lo spazio delle derivazioni puntuali in* $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ *ha dimensione* n. *Se* $\{x, \mathbb{U}\}$ *è una carta in* $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ *ogni derivazione puntuale può scriversi univocamente come*

$$\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell(I^i)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,,$$

dove $I^i\,\mathbf{x} = x^i$.

Dim. Si può assumere che $\mathbb{U}$ sia convesso e che sia $\mathbb{M} = \Re^m$ e $\mathbf{p} = \mathbf{o}$. La formula del lemma 4.1 si può scrivere

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (I^i\,g_i)(\mathbf{x})\,, \quad \forall\,\mathbf{x} \in \mathbb{U}\,.$$

Allora si ha che

$$\ell(f) = \ell(f) - \ell(f(\mathbf{o})) = \ell(\sum_{i=1}^{n} I^i\,g_i) = \sum_{i=1}^{n} \big[\ell(I^i)\,g_i(\mathbf{o}) + \ell(g_i)\,I^i(\mathbf{o})\big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ell(I^i)\,g_i(\mathbf{o})\,,$$

ed essendo $g_i(\mathbf{o}) = D_i\,f(\mathbf{o})$ segue il risultato. Per trasferire il risultato da $\Re^m$ a $\mathbb{M}$ basta far ricorso ad un carta. □

In definitiva in un punto in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ è possibile

- identificare un vettore della fibra tangente $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ con la derivazione puntuale definita da

$$\ell_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} v^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

L' n-upla di vettori

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

costituisce quindi una *base dello spazio tangente*.

Una definizione alternativa della mappa $F_* : \mathbb{T}_{\mathbb{M}} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$ è quindi

$$[F_*(\ell)]\,(g) := \ell(g \circ F)\,, \quad \forall\,g \in \mathrm{L}\left\{\mathrm{C}^\infty(\mathbb{M}), \Re\right\}.$$

Infatti se $F_{*\mathbf{p}}(\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\})$ è un vettore della fibra tangente in $F(\mathbf{p})$ alla varietà $\mathbb{N}$ allora $F_{*\mathbf{p}}(\ell)$ è la derivazione nel punto $F(\mathbf{p}) \in \mathbb{N}$ e nella direzione $dF(\mathbf{p})[\mathbf{v}]$.

La relazione precedente è una riscrittura della regola di derivazione a catena:

$$dg(F(\mathbf{p}))\,[\,dF(\mathbf{p})[\mathbf{v}]\,] = d(g \circ F)(\mathbf{p})[\mathbf{v}]\,.$$

Effettuare la derivata direzionale della funzione g su $\mathbb{N}$ nel punto $F(\mathbf{p}) \in \mathbb{N}$ e nella direzione $dF(\mathbf{p})[\mathbf{v}]$ equivale ad effettuare la derivata direzionale della funzione composta $g \circ F$ definita su $\mathbb{M}$, nel punto $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ e nella direzione $\mathbf{v} \in T_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$.

L'identificazione tra vettori tangenti e derivazioni puntuali consente di riscrivere anche la relazione precedente nella forma

$$(F_* \mathbf{v})\,(g) \,:= \mathbf{v}(g \circ F)\,.$$

4.2. Varietà cotangenti

In ogni punto $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ si definisce per dualità un *spazio cotangente* $T^*_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ come lo spazio vettoriale costituito dalle forme lineari o *covettori* $\mathbf{v}^* \in \mathrm{L}\left\{T_{\mathbb{M}}(\mathbf{p}), \Re\right\}$.

- La *fibra cotangente* $\mathbb{T}^*_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ è lo spazio vettoriale di dimensione n costituito dalle coppie $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}^*\}$ con $\mathbf{v}^* \in T^*_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ e con le operazioni lineari definite da
$$\{\mathbf{p}, \mathbf{v}^*_1\} + \{\mathbf{p}, \mathbf{v}^*_2\} = \{\mathbf{p}, \mathbf{v}^*_1 + \mathbf{v}^*_2\}\,,$$
$$\{\mathbf{p}, \alpha\,\mathbf{v}^*\} = \alpha\,\{\mathbf{p}, \mathbf{v}^*\}\,.$$
- Tra i vettori della fibra tangente e della fibra cotangente in un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ si definisce in modo naturale un prodotto scalare indotto da quello tra gli spazi tangenti e cotangenti in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$.
- Il *prodotto scalare* tra $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}^*\} \in \mathbb{T}^*_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ e $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ è denotato da
$$\langle\, \{\mathbf{p}, \mathbf{v}^*\}\,,\, \{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}\,\rangle\,.$$
- La *varietà cotangente* $\mathbb{T}^*_{\mathbb{M}}$ alla varietà $\mathbb{M}$ è l'unione disgiunta delle fibre cotangenti $\mathbb{T}^*_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ al variare di $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$.

Si ricordi che il *differenziale* di un'applicazione differenziabile $F : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$ è la trasformazione lineare

$$F_{*\mathbf{p}} : \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p}) \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}(F(\mathbf{p}))\,,$$

definita dalla relazione

$$F_{*\mathbf{p}}\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \,:= \{F(\mathbf{p}), dF(\mathbf{p})[\,\mathbf{v}\,]\}\,, \quad \forall\,\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})\,.$$

La trasformazione lineare duale tra le fibre cotangenti

$$F^*_{\mathbf{p}} : \mathbb{T}^*_{\mathbb{N}}(F(\mathbf{p})) \mapsto \mathbb{T}^*_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})\,,$$

è definita dalla relazione di dualità

$$\langle\, F^*_{\mathbf{p}}\{F(\mathbf{p}),\mathbf{u}^*\}\,,\,\{\mathbf{p},\mathbf{v}\}\,\rangle = \langle\,\{F(\mathbf{p}),\mathbf{u}^*\}\,,\,F_{*\mathbf{p}}\{\mathbf{p},\mathbf{v}\}\,\rangle\,,$$

che sussiste per ogni $\{F(\mathbf{p}),\mathbf{u}^*\} \in \mathbb{T}^*_{\mathbb{M}}(F(\mathbf{p}))$ e per ogni $\{\mathbf{p},\mathbf{v}\} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$.

Dunque ad una applicazione differenziabile $F : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$ si associano due trasformazione lineari

- una nella stessa direzione $F_{*\mathbf{p}} : \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{p}) \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}(F(\mathbf{p}))$ tra le fibre tangenti,
- l'altra in direzione opposta tra le fibre cotangenti $F^*_{\mathbf{p}} : \mathbb{T}^*_{\mathbb{N}}(F(\mathbf{p})) \mapsto \mathbb{T}^*_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$.

L' n-upla di covettori

$$\left\{dx^i\right\}, \quad i = 1,\ldots,n\,,$$

è la *base dello spazio cotangente* $T^*_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ duale base dello spazio tangente $T_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}, \quad i = 1,\ldots,n\,.$$

Si ha quindi che

$$\langle\, dx^i\,,\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,\rangle = \delta^i{}_k\,.$$

5. CAMPI VETTORIALI E TENSORIALI

Sia $\mathbb{M}$ una varietà differenziabile e $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ la varietà tangente.

- Una *sezione* della varietà tangente è un'applicazione $\mathbf{s} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ tale che $(\boldsymbol{\pi} \circ \mathbf{s})(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$.

Ciò significa che l'applicazione $\mathbf{s} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ associa ad ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ una coppia $\{\mathbf{p},\mathbf{v}\} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$.

- una sezione $\mathbf{s} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ è anche detta un *campo vettoriale*.
- Una sezione $\mathbf{s}^* : \mathbb{M}^* \mapsto \mathbb{T}^*_{\mathbb{M}}$ è un *campo covettoriale*.

Un campo vettoriale è detto anche un *campo controvariante* ed un campo vettoriale è detto un *campo covariante*.

La motivazione di tale classica nomenclatura risiede nella trasformazione delle componenti indotta da una trasformazione lineare di coordinate.

- Un campo covettoriale è *covariante* perché si trasforma con una legge analoga a quella con cui si trasformano le coordinate,
- Un campo vettoriale è *controvariante* perché la legge di trasformazione è l'inversa.

Infatti sia
$$y^i = A^i{}_j \, x^j \,,$$
la legge lineare di trasformazione delle coordinate.

Si ha allora che
$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k} = A^i{}_k \,,$$
e quindi la base covariante si trasforma con la legge diretta
$$dy^i = A^i{}_k \, dx^k \,,$$
mentre quella controvariante si trasforma con la legge inversa
$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^i} = A^i{}_k \, \frac{\partial}{\partial y^i} .$$

- Un *tensore* k-volte covariante $T(\mathbf{p})$ in $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ è una forma multilineare sul prodotto cartesiano
$$\overbrace{T_{\mathbb{M}}(\mathbf{p}) \times \ldots \times T_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})}^{k \text{ volte}} \,.$$
Un tensore k-volte covariante $T(\mathbf{p})$ è quindi un elemento dello spazio lineare che si ottiene effettuando il k-prodotto tensoriale dello spazio tangente $T_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})$ per se stesso. L'unione disgiunta di tali spazi prodotto al variare di $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ costituisce la varietà fibrata dei tensori k-volte covarianti.
- Un *campo tensoriale* T k-volte covariante sulla varietà differenziabile $\mathbb{M}$ è una sezione della varietà fibrata dei tensori k-volte covarianti.
- Ad ogni *campo tensoriale* T k-volte covariante sulla varietà differenziabile $\mathbb{M}$ si associa un'applicazione multilineare
$$A_T : \overbrace{\mathbb{T}_{\mathbb{M}} \times \ldots \times \mathbb{T}_{\mathbb{M}}}^{k \text{ volte}} \mapsto \Re \,,$$
che manda il prodotto cartesiano di k copie della varietà tangente $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ nel campo dei reali, definita da
$$A_T(\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k)(\mathbf{p}) := T(\mathbf{p})(\mathbf{v}_1(\mathbf{p}), \ldots, \mathbf{v}_k(\mathbf{p})) \,, \quad \forall\, \mathbf{p} \in \mathbb{M} \,.$$

L'applicazione A_T è lineare sullo spazio delle funzioni reali $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{M})$.

Infatti vale la proprietà
$$\begin{aligned} A(\mathbf{v}_1, \ldots, f\, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)(\mathbf{p}) &= A_T(\mathbf{p})(\mathbf{v}_1(\mathbf{p}), \ldots, f(\mathbf{p})\, \mathbf{v}_i(\mathbf{p}), \ldots, \mathbf{v}_k(\mathbf{p})) = \\ &= f(\mathbf{p})\, T(\mathbf{p})(\mathbf{v}_1(\mathbf{p}), \ldots, \mathbf{v}_i(\mathbf{p}), \ldots, \mathbf{v}_k(\mathbf{p})) = \\ &= A_T(\mathbf{p})\, T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)(\mathbf{p}) \,, \end{aligned}$$
per ogni $\forall\, \mathbf{p} \in \mathbb{M}$.

Tale proprietà è caratteristica dei campi tensoriali in quanto sussiste il seguente risultato (vedi [20], teor. 4.2).

Proposizione 5.1. *Se un'applicazione multilineare*

$$A : \overbrace{\mathbb{T}_{\mathbb{M}} \times \ldots \times \mathbb{T}_{\mathbb{M}}}^{k \text{ volte}} \mapsto \Re \,,$$

è lineare sullo spazio $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{M})$ *allora esiste un'unico campo tensoriale* T *su* $\mathbb{M}$ *tale che* $A = A_T$. □

La proposizione 5.1 consente di identificare un campo tensoriale T su $\mathbb{M}$ con la corrispondente applicazione A_T e fornisce un criterio di tensorialità di un'applicazione multilineare definita sullo spazio prodotto

$$\overbrace{T_{\mathbb{M}}(\mathbf{p}) \times \ldots \times T_{\mathbb{M}}(\mathbf{p})}^{k \text{ volte}} \,.$$

Analoghe considerazioni valgono per i campi tensoriali k-volte covarianti e s-volte contravarianti in cui lo spazio prodotto è costruito su k copie dello spazio tangente e su s copie dello spazio cotangente.

V – ELEMENTI DI ANALISI VETTORIALE

Si considerino due spazi vettoriali U e V di dimensione finita e dotati di prodotto interno. Posto $\dim U = n$ e $\dim V = m$ siano

$$\{\mathbf{e}_i : i = 1, \dots, n\}\,, \qquad \{\mathbf{a}_i : i = 1, \dots, m\}$$

basi ortonormali di U e V.

Sia $\mathbf{f} : \Omega \subseteq U \mapsto V$ una funzione definita in un aperto Ω di U.

- La *derivata direzionale* di $\mathbf{f}$ nel punto $\mathbf{x} \in \Omega$, secondo l'*incremento* $\mathbf{h} \in U$ è definita dal limite

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x};\mathbf{h}) := \lim_{\epsilon \mapsto 0} \frac{1}{\epsilon}[\mathbf{f}(\mathbf{x}+\epsilon\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})]\,.$$

Esercizio

- Mostrare che

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x};\alpha\mathbf{h}) = \alpha\, d\mathbf{f}(\mathbf{x};\mathbf{h})\,, \quad \forall\, \alpha \in \Re \qquad \text{(omogeneità)}\,.$$

1. DERIVATE DI GATEAUX E DI FRÉCHET

Se esiste la derivata direzionale di $\mathbf{f}$ nel punto $\mathbf{x} \in \Omega$ per ogni incremento $\mathbf{h} \in U$ e risulta

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x};\mathbf{h}+\mathbf{k}) = d\mathbf{f}(\mathbf{x};\mathbf{h}) + d\mathbf{f}(\mathbf{x};\mathbf{k})\,, \quad \forall\, \mathbf{h},\mathbf{k} \in U \qquad \text{(additività)}\,,$$

la funzione f si dice *derivabile* secondo GATEAUX in $\mathbf{x} \in \Omega$ e l'operatore lineare

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}(U\,;\,V)\,,$$

definito da

$$\mathbf{G}(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,] := d\mathbf{f}(\mathbf{x};\mathbf{h}) \quad \forall\, \mathbf{h} \in U\,,$$

si dice la *derivata* secondo GATEAUX di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x} \in \Omega$.

La derivata $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ è quindi l'operatore lineare che associa ad ogni incremento $\mathbf{h} \in U$ la derivata direzionale di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x} \in \Omega$ secondo l'incremento $\mathbf{h} \in U$.

Si dice poi che $\mathbf{f}$ è *differenziabile* secondo FRÉCHET o semplicemente *differenziabile* con derivata $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x} \in \Omega$ se vale la relazione

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,] + o\|\,\mathbf{h}\,\|\,,$$

dove $o\|\,\mathbf{h}\,\|$ è il simbolo di LANDAU che denota una funzione continua tale che

$$\lim_{\|\,\mathbf{h}\,\|\to 0} \frac{o\|\,\mathbf{h}\,\|}{\|\,\mathbf{h}\,\|} = 0\,.$$

Una funzione $\mathbf{f} : \Omega \subseteq U \mapsto V$ derivabile nel senso di FRÉCHET è anche derivabile nel senso di GATEAUX e le due derivate coincidono.

Non è però vero il viceversa in quanto la derivabilità nel senso di GATEAUX non implica quella nel senso di FRÉCHET.

■ Se però la derivata $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}(U\,;\,V)$ di GATEAUX di $\mathbf{f} : \Omega \subseteq U \mapsto V$ esiste ed è continua in Ω, allora $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}(U\,;\,V)$ è anche la derivata nel senso di FRÉCHET.
Sia infatti $\mathbf{c} : [\,0,1\,] \mapsto U$ continua con $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{c}(1) = \mathbf{y}$.
La funzione $\mathbf{c} : [\,0,1\,] \mapsto U$ fornisce quindi la rappresentazione parametrica di un arco che unisce $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$. Allora

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_0^1 d\mathbf{f}(c(t))\,[\,c'(t)\,]\;\mathrm{d}t\,.$$

Risulta pertanto

$$\|\,\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})\,\| = \|\,\left(\int_0^1 \mathbf{G}(\mathbf{x}+t\mathbf{h}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})\;\mathrm{d}t\right)\mathbf{h}\,\| \le$$

$$\le \left[\sup_{0\le t\le 1} \|\,\mathbf{G}(\mathbf{x}+t\mathbf{h}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})\,\|\right] \|\,\mathbf{h}\,\|\,.$$

Ora il sup converge a zero per $\mathbf{h} \to \mathbf{o}$ in virtù della uniforme continuità della funzione

$$t \in [0,1] \mapsto \mathbf{G}(\mathbf{x}+t\mathbf{h}) \in \mathrm{L}(U\,;\,V)\,.$$

Pertanto $\mathbf{G}(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,] = \mathbf{F}(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,]$ per ogni $\mathbf{h} \in U$.

La derivata di FRÉCHET gode delle usuali proprietà:

- *Regola di derivazione a catena*. Se $\mathbf{f} : \Omega \subseteq U \mapsto V$ e $\mathbf{g} : V \mapsto W$ sono derivabili con continuità allora

$$d(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{u}) = d\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \circ d\mathbf{g}(\mathbf{u})\,.$$

- *Derivate parziali*. Siano U_1, U_2, V spazi vettoriali di dimensione finita e sia $\mathbf{f} : \Omega \subseteq U_1 \otimes U_2 \mapsto V$ una funzione derivabile. Definendo le derivate parziali

$$d_1\mathbf{f}(\mathbf{u})\,[\,\mathbf{h}_1\,] = d\mathbf{f}(\mathbf{u})\,[\,\mathbf{h}_1, \mathbf{o}\,]\,,$$

$$d_2\mathbf{f}(\mathbf{u})\,[\,\mathbf{h}_2\,] = d\mathbf{f}(\mathbf{u})\,[\,\mathbf{h}_2, \mathbf{o}\,]\,,$$

dove $\mathbf{u} \in U_1 \otimes U_2$, $\mathbf{h}_1 \in U_1$, $\mathbf{h}_2 \in U_2$, si ha che

$$d\mathbf{f}(\mathbf{u})\,[\,\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\,] = d_1\mathbf{f}(\mathbf{u})\,[\,\mathbf{h}_1\,] + d_2\mathbf{f}(\mathbf{u})\,[\,\mathbf{h}_2\,]\,.$$

- *Regola di* LEIBNIZ. Se $\mathbf{b} : U \times V \mapsto F$ è una mappa bilineare e le funzioni $\mathbf{f} : X \mapsto U$ e $\mathbf{g} : X \mapsto V$ sono derivabili con continuità allora

$$d\mathbf{b}\,(\mathbf{f}, \mathbf{g})(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,] = \mathbf{b}\,(d\mathbf{f}(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,], \mathbf{g}(\mathbf{x})) + \mathbf{b}\,(\mathbf{f}(\mathbf{x}), d\mathbf{g}(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,])\,.$$

Se $U = V = F = \Re$ e la forma bilineare $\mathbf{b} : \Re \times \Re \mapsto \Re$ è il prodotto in $\Re$, la regola di LEIBNIZ fornisce l'usuale regola di derivazione del prodotto:

$$d(fg)(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,] = df(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,]\,g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\,dg(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,]\,.$$

- *Diseguaglianza del valor medio*. Sia $\mathbf{f} : \Omega \subseteq U \mapsto V$ una funzione di classe C^1 in un aperto convesso Ω di U. Allora

$$\|\,\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\| \le \left[\sup_{0\le t\le 1} \|\,d\mathbf{f}((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y})\,\|\right] \|\,\mathbf{y} - \mathbf{x}\,\|\,.$$

La matrice $[\,d\,\mathbf{f}(\mathbf{x})]$ associata alla trasformazione lineare $d\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}(U\,;V)$ rispetto alle basi $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{a}_i\}$ è detta *matrice di* JACOBI [21] .

In componenti cartesiane si ha

$$[\,d\,\mathbf{f}(\mathbf{x})\,]_{ij} = f_{i/j}(\mathbf{x}),$$

dove il pedice $_/$ indica la derivazione parziale rispetto alle coordinate corrispondenti agli indici che seguono. Più esplicitamente si può scrivere

$$[\,d\,\mathbf{f}(\mathbf{x})\,] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

[21] KARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804-1851). Ebreo tedesco nato a Postdam, insegnò a Berlino e poi a Königsberg. Fu col norvegese NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) il fondatore della teoria delle funzioni ellittiche.

Sia ora $\phi : \Omega \mapsto \Re$ un campo scalare derivabile in $\mathbf{x} \in \Omega$.

La derivata $\ell : \Omega \mapsto \Re$ di ϕ in $\mathbf{x} \in \Omega$, definita da

$$\ell(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,] := d\phi(\mathbf{x};\mathbf{h})\,,$$

è una forma lineare su U ed è dunque rappresentabile mediante un vettore $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in U$ tale che

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \ell(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}\,] \quad \forall\, \mathbf{h} \in U\,,$$

dove $\cdot$ denota il prodotto interno in U.

Il vettore $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ è detto il *gradiente* di ϕ in $\mathbf{x}$ e si scrive

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}).$$

La componente $i-$esima del gradiente rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$

$$[\operatorname{grad} \phi(\mathbf{x})\,]_i = d\phi(\mathbf{x};\mathbf{e}_i) = \phi_{/i}\,(\mathbf{x}),$$

è la derivata parziale di ϕ rispetto all' $i-$esima coordinata.

2. LEMMA DI GAUSS-GREEN

Si enuncia ora un fondamentale teorema di trasformazione integrale dovuto a GAUSS [22], GREEN [23] e OSTROGRADSKI [24]

Proposizione 2.1. Lemma di Gauss-Green-Ostrogradski. *Per un campo scalare ϕ definito in un dominio generalmente regolare Ω di U, differenziabile in Ω, sussiste la seguente formula*

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x})\; \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{x})\, \mathbf{n}(\mathbf{x})\; \mathrm{d}\sigma\,,$$

essendo $\mathbf{n}$ la normale uscente a $\partial\Omega$.

[22] JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855). Genio matematico tedesco, tra i maggiori di ogni tempo. Famosi i suoi contributi alla geometria differenziale delle superfici, alla soluzione dei sistemi lineari ed al metodo dei minimi quadrati. Nelle scienze applicate i maggiori contributi riguardano la teoria del potenziale e lo studio del magnetismo

[23] GEORGE GREEN (1793-1841). Mugnaio e matematico autodidatta inglese. L'opera di GREEN del 1828, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, fu pubblicata nel 1850 per merito di SIR WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN, 1824-1907).

[24] MIKHAIL VASILEVICH OSTROGRADSKI (1801-1862). Nato in Ucraina, tra il 1822 ed il 1827 studiò a Parigi sotto la guida di LAPLACE, FOURIER, LEGENDRE, POISSON, BINET e CAUCHY. Tornò a San Pietroburgo nel 1828 e presentò tre importanti lavori sulla teoria del calore, sugli integrali doppi e sulla teoria del potenziale all'Accademia delle Scienze. Fu eletto accademico nella sezione di matematica applicata.

In termini di componenti rispetto ad $\{\mathbf{e}_i\}$ *si ha*

$$\int_{\Omega} \phi_{,i}\,(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{x})\, n_i\,(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\sigma, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

dove $\mathrm{d}\mu$ *e* $\mathrm{d}\sigma$ *denotano le misure di volume e di area.* □

Osservazione 2.1. Si noti che per $n = 1$ e cioè $U \equiv \Re$, si ritrova la formula fondamentale del calcolo integrale.

Infatti, con riferimento ad un intervallo $\Omega = [\,a, b\,]$, si ha

$$\int_{\Omega} \phi_{/i}\,(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mu = \int_a^b \phi'(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

La prossima figura mostra che nel caso monodimensionale risulta

$$n_a = -1\,, \quad n_b = +1\,.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{x})\,\mathbf{n}(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mu = \phi(b)\, n_b + \phi(a)\, n_a = \phi(b) - \phi(a)\,,$$

e quindi

$$\int_a^b \phi'(x)\ \mathrm{d}x = \phi(b) - \phi(a)\,,$$

che è il ben noto risultato.

La formula del lemma di Gauss-Green può essere dimostrata suddividendo il dominio Ω in tubi sottili paralleli allo i-esimo asse coordinato e notando che il rapporto tra l'area della sezione del tubo e quella delle superfici tagliate dalle estremità del tubo è pari alla componente i-esima del versore normale. ■

3. TRASFORMAZIONI INTEGRALI

Applicando il lemma di GAUSS-GREEN alla derivata parziale $j-$esima della componente $i-$esima di un campo vettoriale $\mathbf{u}$ sufficientemente regolare

$$\int_{\Omega} u_{i/j}(\mathbf{x})\, d\mu = \int_{\partial\Omega} u_i(\mathbf{x})\, n_j(\mathbf{x})\, d\sigma\,,$$

si ottiene il prossimo risultato.

Proposizione 3.1. Corollario. *Sia* $\mathbf{u} : \Omega \subseteq U \mapsto V$ *un campo vettoriale differenziabile in un dominio con frontiera generalmente regolare* Ω *di* U *. Sussiste allora la relazione*

$$\int_{\Omega} \text{grad}\, \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mu = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x})\, d\sigma\,,$$

essendo $\mathbf{n}$ *il versore della normale uscente nei punti della frontiera* $\partial\Omega$ *di* Ω *.* □

3.1. Divergenza di un campo vettoriale

Si consideri U uno spazio vettoriale di dimensione finita n, dotato di prodotto interno e sia $\mathbf{u} : \Omega \subseteq \mathbb{U} \mapsto U$ un campo vettoriale derivabile in $\mathbf{x} \in \Omega$.

■ Si definisce *divergenza* di $\mathbf{u}$ in $\mathbf{x} \in \Omega$ la traccia dell'operatore

$$\text{grad}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) : U \mapsto U$$

e si scrive

$$\text{div}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) := \text{tr grad}\, \mathbf{u}(\mathbf{x})\,.$$

In termini di componenti rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$ si ha

$$\text{div}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_{i/i}\,.$$

Nel caso monodimensionale ($n = \dim U = 1$) la definizione di divergenza coincide con quella di derivata, mentre per $n = 2$ e $n = 3$ si hanno, rispettivamente, le espressioni esplicite

$$\text{div}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \qquad \text{div}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Applicando il lemma di GAUSS alla derivata parziale $i-$esima della componente $i-$esima di $\mathbf{u}$ si ha che

$$\int_{\Omega} u_{i/i}(\mathbf{x})\, d\mu = \int_{\partial\Omega} u_i\, n_i\, d\sigma,$$

Si deduce allora il seguente fondamentale risultato.

Proposizione 3.2. Teorema della divergenza. *Sia* $\mathbf{u} : \Omega \subseteq U \mapsto U$ *un campo vettoriale differenziabile in un dominio generalmente regolare* Ω *di* U. *Sussiste la relazione*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \; d\mu = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \; d\sigma,$$

essendo $\mathbf{n}$ *il versore della normale uscente nei punti della frontiera* $\partial\Omega$ *di* Ω.
La formula si enuncia affermando che l'integrale della divergenza è uguale al flusso del campo uscente dalla frontiera del dominio. □

3.2. Divergenza di un campo tensoriale

La divergenza $\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ di un campo tensoriale $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ è un campo vettoriale definito dalla seguente uguaglianza:

$$[\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div} [\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}] \qquad \forall\, \mathbf{a} \in U .$$

In componenti rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ si ottiene

$$[\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x})]_i \, a_i = (A_{ij} \, a_i)_{/j} = A_{ij/j} \, a_i \, ,$$

da cui

$$[\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x})]_i = A_{ij/j} \, .$$

Per un campo tensoriale tridimensionale si ha in forma esplicita

$$[\operatorname{div} \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_{13}}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_{23}}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} .$$

Tale definizione consente di estendere il teorema della divergenza ai campi tensoriali. Infatti, applicando tale teorema al campo vettoriale $\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \; d\Omega \cdot \mathbf{a} &= \int_{\Omega} \operatorname{div} [\mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \, \mathbf{a}] \; d\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \, \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \; ds = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{n} \; ds \cdot \mathbf{a} \qquad \forall\, \mathbf{a} \, , \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{n}\ \, ds\,,$$

che è l'espressione del teorema della divergenza per campi tensoriali.

3.3. Rotore di un campo vettoriale tridimensionale

Sia $\mathbf{u} : \Omega \subseteq U \mapsto U$ un campo vettoriale tridimensionale su dominio Ω e sia $\mathbf{G}$ la sua derivata. Si definisce *rotore* di $\mathbf{u}$ in $\mathbf{x} \in \Omega$ il doppio del vettore assiale della parte emisimmetrica di $\mathbf{G}$ e si scrive

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 2 \ \operatorname{axial}\ \operatorname{emi} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \ \operatorname{axial} [\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{x})]\,.$$

In componenti rispetto ad $\{\mathbf{e}_i\}$ si ha

$$[\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x})]_i = \epsilon_{ijk}\, u_{k/j}(\mathbf{x}) \ \text{ ed in esteso } \ [\ \operatorname{rot}\ \mathbf{u}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}\,.$$

Si noti che l'espressione del vettore $\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x})$ si può ottenere considerando la tabella

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}\,,$$

e calcolandone il determinante come se fosse una matrice, assumendo che il prodotto tra $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ e u_i valga $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Sussiste la seguente formula

Proposizione 3.3. Teorema del rotore. *Sia $\mathbf{u} : \Omega \subseteq U \mapsto U$ un campo vettoriale differenziabile in un dominio Ω con bordo $\partial\Omega$. Allora:*

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dS = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x})\, ds\,.$$

Dim. Basta osservare che

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = 2 \ \operatorname{axial}\ \operatorname{emi}\ \operatorname{grad}\mathbf{u}\,, \qquad \mathbf{u}\times\mathbf{n} = 2\ \operatorname{axial}\ \operatorname{emi}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\,.$$

La formula segue quindi dalla proposizione 3.1. □

Si enuncia ora un fondamentale risultato di teoria del potenziale che è comunemente attribuito a G. STOKES [25] ma che fu invece formulato nel caso piano da A.M. AMPÈRE [26] nel 1826 e nel caso spaziale da LORD KELVIN [27] nel 1850.

Il risultato relativo al caso piano fu riscoperto indipendentemente dal matematico H. HANKEL [28] che lo pubblicò per primo nel 1861 (vedi J.L. ERICKSEN [6] pag. 817 in cui il teorema è detto *trasformazione di* KELVIN).

Proposizione 3.4. Teorema di Stokes tridimensionale. *Sia* $\mathbf{u} : \Omega \subseteq U \mapsto U$ *un campo vettoriale differenziabile in un dominio* Ω *di* U *ed* $S \subseteq \Omega$ *una superficie generalmente regolare contenuta in* Ω*, con bordo* ∂S*. Sussiste la relazione*

$$\int_S [\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x})]\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\ \, \mathrm{d}S = \oint_{\partial S} \mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x})\ \, \mathrm{d}s,$$

dove $\mathbf{n}$ *è il versore normale ad* S *e* $\mathbf{t}$ *è la tangente al bordo* ∂S *di* S*, orientati come in fig.3.1.*

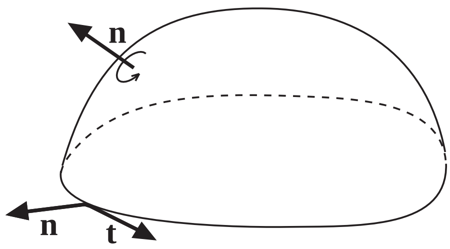
---

[25] GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903). Irlandese di nascita, eminente fisico matematico, professore a Cambridge e presidente della Società Reale.

[26] ANDRÉ MARIE AMPÈRE (1775-1836). Matematico e fisico francese di grande levatura. Si formò sulle opere di BERNOULLI, EULER e sulla Mécanique analytique di LAGRANGE. Autore di un trattato sulla Teoria matematica dei Giochi (1803). Dal 1809 al 1828 fu professore di matematica e meccanica all'École Polytechnique insieme a CAUCHY con cui ebbe forti contrasti. Fu eletto all'Institut National des Sciences nel 1814, vincendo la competizione con CAUCHY. Fu cattedratico all'Università di Francia dal 1826 fino alla sua morte. I contributi scientifici di AMPÈRE spaziano dalla matematica alla fisica (elettricità e magnetismo) ed alla chimica.

[27] SIR WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN) (1824-1907). Nacque a Belfast da famiglia scozzese. Eminente fisico matematico, professore a Glasgow, autore con P.G. TAIT del *Treatise of Natural Philosophy*. Nel 1850 comunicò a STOKES il risultato per lettera e lo pubblicò poi nel 1867. STOKES poneva la dimostrazione del teorema come domanda d'esame a Cambridge. Il fatto fu citato da MAXWELL e per tale motivo è invalso l'uso di chiamare il risultato teorema di STOKES.

[28] HERMANN HANKEL (1839-1873). Nel 1857 entrò all'Università di Leipzig e studiò matematica con MÖBIUS. Andò poi a Göttingen nel 1860 dove fu allievo di RIEMANN. L'anno seguente lavorò con WEIERSTRASS e KRONECKER a Berlino. Nel 1867 divenne professore prima a Leipzig e poi ad Erlangen. Accettò infine la cattedra a Tübingen nel 1869. E' noto per la trasformata di HANKEL e per le funzioni di HANKEL (o funzioni di BESSEL di terza specie). A lui è dovuto il merito di aver capito l'importanza delle opere di GRASSMANN.



La formula di STOKES *stabilisce che il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie è uguale alla sua circuitazione lungo il suo bordo della superficie.* □

3.4. Rotore di un campo vettoriale bidimensionale

Si consideri una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di uno spazio vettoriale tridimensionale U. Se un campo vettoriale $\mathbf{u}$ non dipende dalla componente x_3 di $\mathbf{x}$, cioè

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(x_1, x_2)\,,$$

è facile verificare che il rotore è costantemente parallelo ad $\mathbf{e}_3$. Infatti si ha

$$[\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Tale osservazione consente di estendere la definizione di rotore al caso dei campi bidimensionali. Infatti il rotore in $\mathbf{x}$ di un campo $\mathbf{u} : \Omega \subseteq U \mapsto U$ bidimensionale ($\dim U = 2$), derivabile in $\mathbf{x}$, è uno scalare definito da

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Proposizione 3.5. Teorema di Stokes bidimensionale. *Sia $\mathbf{u} : \Omega \subseteq U \mapsto U$ un campo vettoriale bidimensionale differenziabile in un dominio Ω di U. Sussiste la relazione*

$$\int_{\Omega} \mathrm{rot}\,\mathbf{u}(\mathbf{x})\;\mathrm{d}\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}\;\;\mathrm{d}s\,,$$

dove $\mathbf{t}$ è la tangente al bordo $\partial\Omega$ ottenuta ruotando in senso antiorario la normale uscente.

Dim. Se $\mathbf{R}$ è la rotazione antioraria di $\pi/4$ si ha: $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} = -\mathbf{R}$. Dal teorema della divergenza, verificando le relazioni

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}\mathbf{n}\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{R}\mathbf{u} = -\operatorname{div}\mathbf{u}\,,$$

si deduce allora che

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x})\ d\Omega &= \int_{\Omega} -\operatorname{div}[\mathbf{R}\,\mathbf{u}(\mathbf{x})]\ d\Omega = \\ &= \oint_{\partial\Omega} -[\mathbf{R}\,\mathbf{u}(\mathbf{x})]\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\ ds = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x})\ ds,\end{aligned}\,,$$

che è la formula cercata. Si noti che la formula di STOKES tridimensionale si può dimostrare a partire da quella bidimensionale considerando la porzione di superficie S nello spazio come limite di una superficie poliedrica. □

3.5. Rotore di un campo tensoriale

Il rotore $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ di un campo tensoriale $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ è un campo tensoriale definito dalla seguente uguaglianza

$$[\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x})]^T\mathbf{a} = \operatorname{rot}[\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{a}] \qquad \forall\,\mathbf{a}\,.$$

In componenti si ottiene

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_{ij} = \epsilon_{jkp}\,\mathbf{A}_{ik,p}\,.$$

Tale definizione consente di estendere il teorema di STOKES ai campi tensoriali.

Infatti, applicando il teorema al campo vettoriale $\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}$ si ha

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{n}(\mathbf{x})\ dS\cdot\mathbf{a} &= \int_S \operatorname{rot}[\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{a}]\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\ dS = \\ &= \oint_{\partial S} \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x})\ ds = \oint_{\partial S} \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{t}(\mathbf{x})\ ds\cdot\mathbf{a} \qquad \forall\,\mathbf{a}\,,\end{aligned}$$

dove S è una porzione di superficie regolare e ∂S è il suo bordo. Si ottiene quindi

$$\int_S [\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x})]\,\mathbf{n}(\mathbf{x})\ dS = \oint_{\partial S} \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{t}(\mathbf{x})\ ds\,,$$

che è la formula di STOKES per campi tensoriali.

3.6. Identità notevoli

Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ campi vettoriali di classe C^2 su Ω. Sussistono allora le seguenti identità.

- Prima identità notevole

$$\boxed{\text{rot rot}\,\mathbf{u} = \text{grad div}\,\mathbf{u} - \text{div grad}\,\mathbf{u}\,.}$$

Per verificarlo è conveniente riferirsi all'espressione del rotore in termini di componenti cartesiane e scrivere

$$\begin{aligned}[\,\text{rot rot}\,\mathbf{u}\,]_p &= \epsilon_{piq}\,\epsilon_{ijk}\,u_{j,kq} = \epsilon_{iqp}\,\epsilon_{ijk}\,u_{j,kq} = (\delta_{qp}\,\delta_{jk} - \delta_{pq}\,\delta_{jk})\,u_{j,kq} = \\ &= u_{q/qp} - u_{p/qq} = [\,\text{grad div}\,\mathbf{u}\,]_p - [\,\text{div grad}\,\mathbf{u}\,]_p\,.\end{aligned}$$

- Seconda identità notevole

$$\boxed{\text{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\,\text{grad}\,\mathbf{u})\,[\,\mathbf{v}\,] + (\,\text{div}\,\mathbf{v})\,\mathbf{u} - (\,\text{grad}\,\mathbf{v})\,[\,\mathbf{u}\,] - (\,\text{div}\,\mathbf{u})\,\mathbf{v}\,.}$$

In termini di componenti cartesiane si ha infatti

$$\begin{aligned}[\,\text{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,]_p &= \epsilon_{jik}\,\epsilon_{jpq}\,(u_p\,v_q)_{/k} = (u_i\,v_k)_{/k} - (u_k\,v_i)_{/k} = \\ &= u_{i/k}\,v_k + u_i\,v_{k/k} - v_{i/k}\,u_k + v_i\,u_{k/k}\,.\end{aligned}$$

4. CAMPI POTENZIALI

Sia $\Omega \subset U$ un *dominio* e cioè un aperto connesso e $\phi : \Omega \mapsto \Re$ è un campo scalare in Ω due volte derivabile con continuità. Allora il teorema di EULER-SCHWARZ [29] assicura che

$$d^2\,\phi(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2\,] = d^2\,\phi(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{h}_2,\mathbf{h}_1\,]\,,\quad \mathbf{x}\in\Omega\,,\quad \forall\,\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2\in U\,.$$

Si denoti quindi con

- $\mathbf{g} = \text{grad}\,\phi$ il campo vettoriale in Ω gradiente di ϕ,
- e con $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = d\mathbf{g}(\mathbf{x})$ la derivata del campo vettoriale $\mathbf{g}$.

Sussiste allora la proprietà di simmetria

$$\mathbf{G}(\mathbf{x})\,\mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_2 = \mathbf{G}(\mathbf{x})\,\mathbf{h}_2\cdot\mathbf{h}_1\,,\quad \forall\,\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2\in U\,.$$

[29] HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843-1921). Allievo di Weierstrass e professore a Berlino.

Un fondamentale risultato di teoria del potenziale dovuto a VITO VOLTERRA [30] (1913, [1]) rivela che vale anche la proprietà inversa.

Proposizione 4.1. Teorema di Volterra. *Si consideri ora un dominio* $\Omega \subset U$ *ed un campo vettoriale* $\mathbf{g} : \Omega \mapsto U$ *. Se la derivata* $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = d\,\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *è simmetrica e continua in* Ω *,*

$$i) \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^T(\mathbf{x}) \,,$$

$$ii) \quad \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{o}} \| \, \mathbf{G}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \, \| = 0 \qquad \forall \, \mathbf{x} \in U \,,$$

allora esiste un campo scalare $\phi : \Omega \mapsto \Re$ *di cui* $\mathbf{g} : \Omega \mapsto U$ *è il gradiente e cioè tale che*

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) \,, \quad \forall \, \mathbf{x} \in \Omega.$$

Il campo scalare ϕ *è definito a meno di una costante additiva dalla formula integrale*

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_o) + \int_0^1 \mathbf{g} \left[c(t) \right] \cdot \frac{dc(t)}{dt} \, \mathrm{d}t.$$

dove $c(t)$ *è una qualsiasi curva regolare tale che* $c(0) = \mathbf{x}_o$ *e* $c(1) = \mathbf{x}$ *.* □

Il campo scalare $\phi : \Omega \mapsto \Re$ è detto il *potenziale* del campo vettoriale $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.
Il campo vettoriale $\mathbf{g} : \Omega \mapsto U$ è detto un *campo potenziale*.

Il teorema di VOLTERRA mostra che la simmetria e la continuità dell'operatore $\mathbf{G}$ assicurano che l'integrale

$$\int_0^1 \mathbf{g} \left[c(t) \right] \cdot \frac{dc(t)}{dt} \, \mathrm{d}t \,,$$

risulta nullo lungo ogni percorso chiuso in Ω e cioè lungo ogni curva regolare $c : [\,0,1\,] \mapsto \Omega$ tale che $c(0) = c(1)$.

Un insieme $\Omega \subset U$ si dice *convesso* se ogni segmento che congiunge due punti di Ω appartiene ad Ω e cioè se

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \;\Rightarrow\; \mathbf{x} + t\,(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in \Omega \,, \quad \forall \, t \in [\,0,1\,] \,.$$

Se il dominio $\Omega \subset U$ è convesso il potenziale ϕ può essere convenientemente calcolato integrando lungo il segmento rettilineo che unisce $\mathbf{x}_o$ ed $\mathbf{x}$

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_o) + \int_0^1 \mathbf{g}[\mathbf{x}_o + t\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \;\, \mathrm{d}t \,.$$

[30] VITO VOLTERRA (1860-1940). Allievo di ENRICO BETTI (1823-1892) a Pisa e professore di meccanica e di fisica matematica a Pisa, Torino ed infine a Roma dal 1900. Nel 1931 dovette lasciare la cattedra per il suo antifascismo e visse prevalentemente all'estero, in Spagna ed a Parigi.

5. DERIVATE NOTEVOLI

Le espressioni della derivata del determinante di una trasformazione lineare e della derivata dell'operatore di inversione sono utili in molte applicazioni.

5.1. Derivata del determinante

Siano $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{H}$ operatori lineari su U con $\det \mathbf{F} \neq 0$.
La derivata della funzione $\det(\mathbf{F})$ nella direzione $\mathbf{H}$ è per definizione

$$d \det(\mathbf{F};\mathbf{H}) := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\Big[\det(\mathbf{F}+\epsilon\,\mathbf{H}) - \det\mathbf{F}\Big].$$

Per calcolare il limite si osserva che

$$\det(\mathbf{F}+\epsilon\,\mathbf{H}) - \det\mathbf{F} = \det\mathbf{F}\,\big[\det(\mathbf{I}+\epsilon\,\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H}) - 1\big],$$

e che

$$\det(\mathbf{I}+\epsilon\,\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H}) = \det\mathbf{I} + \epsilon\ \mathrm{tr}\,(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H}) + o(\epsilon),$$

da cui

$$\frac{1}{\epsilon}\big[\det(\mathbf{F}+\epsilon\,\mathbf{H}) - \det\mathbf{F}\big] = \det\mathbf{F}\ \mathrm{tr}\,(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H}),$$

e dunque

$$d \det(\mathbf{F};\mathbf{H}) = \det\mathbf{F}\ \mathrm{tr}\,(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H}).$$

Ricordando che

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H}) = \mathbf{F}^{-T} : \mathbf{H}\,, \quad d \det(\mathbf{F};\mathbf{H}) = \mathrm{grad}\ \det\mathbf{F} : \mathbf{H}\,,$$

si ottiene l'espressione del gradiente della funzione determinante

$$\mathrm{grad}\ \det\mathbf{F} = (\det\mathbf{F})\,\mathbf{F}^{-T}.$$

Se $\mathbf{F}$ è funzione di un parametro reale t $(\mathbf{F}=\mathbf{F}(t))$, si ha quindi

$$\big[\det\mathbf{F}(t)\big]^{\cdot} = \frac{d}{dt}\det\mathbf{F}(t) = d\det(\mathbf{F};\dot{\mathbf{F}}) = \det\mathbf{F}\ \mathrm{tr}\,(\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}) = (\det\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}}\,,$$

dove

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt}\mathbf{F}.$$

All'espressione della derivata del determinante si può anche pervenire derivando la funzione determinante.

Infatti, facendo riferimento per semplicità al caso tridimensionale, si ha

$$d\,\det(\mathbf{F}\,;\mathbf{H})\,\Delta\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\} = d\,\Delta\{\mathbf{Fa}_1,\mathbf{Fa}_2,\mathbf{Fa}_3;\mathbf{H}\}\,,$$

$$\Delta\{\mathbf{Ha}_1,\mathbf{Fa}_2,\mathbf{Fa}_3\} + \Delta\{\mathbf{Fa}_1,\mathbf{Ha}_2,\mathbf{Fa}_3\} + \Delta\{\mathbf{Fa}_1,\mathbf{Fa}_2,\mathbf{Ha}_3\} =$$

$$\Delta\{\mathbf{HF}^{-1}\mathbf{Fa}_1,\mathbf{Fa}_2,\mathbf{Fa}_3\} + \Delta\{\mathbf{Fa}_1,\mathbf{HF}^{-1}\mathbf{Fa}_2,\mathbf{Fa}_3\} + \Delta\{\mathbf{Fa}_1,\mathbf{Fa}_2,\mathbf{HF}^{-1}\mathbf{Fa}_3\} =$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{HF}^{-1})\,\Delta\{\mathbf{Fa}_1,\mathbf{Fa}_2,\mathbf{Fa}_3\} = \operatorname{tr}(\mathbf{HF}^{-1})\,\det\mathbf{F}\,\Delta\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}\,.$$

Ne segue quindi che

$$d\det(\mathbf{F}\,;\mathbf{H}) = \det\mathbf{F}\,\operatorname{tr}(\mathbf{HF}^{-1}) = (\det\mathbf{F})\,\mathbf{F}^{-T} : \mathbf{H}\,.$$

Se $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale, ponendo $\mathbf{H} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ risulta

$$\operatorname{tr}(\mathbf{HF}^{-1}) = \operatorname{tr}((\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\,\mathbf{F}^{-1}) = (\mathbf{F}^{-1})_{ij}\,,$$

e dalla formula di derivazione del determinante si deduce l' *identità di* JACOBI [31]

$$\frac{d\det(\mathbf{F})}{dF_{ij}} = d\det(\mathbf{F}\,;(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)) = (\det\mathbf{F})\,(\mathbf{F}^{-1})_{ij}\,.$$

Si noti che il termine $(\det\mathbf{F})\,(\mathbf{F}^{-1})_{ij}$ è eguale al minore complementare dell'elemento F_{ij}.

5.2. Derivata dell'operatore di inversione

Sia $f \in \mathrm{L}\{U\,;V\}$ un isomorfismo, $f^{-1} \in \mathrm{L}\{V\,;U\}$ l'isomorfismo inverso e $I : \mathrm{L}\{U\,;V\} \mapsto \mathrm{L}\{V\,;U\}$ l'operatore di inversione definito da $I(f) = f^{-1}$.

Per $f, g \in \mathrm{L}\{U\,;V\}$ si definisca la forma bilineare

$$B : \mathrm{L}\{U,V\} \times \mathrm{L}\{V\,;U\} \mapsto \mathrm{L}\{V\,;V\}\,,$$

mediante la posizione $B\,(f, I(g)) = f \circ I(g) \in \mathrm{L}\{V\,;V\}$.

Allora la funzione $F : \mathrm{L}\{U\,;V\} \mapsto \mathrm{L}\{V\,;V\}$, definita da

$$F(f) := B\,(f, I(f)) = f \circ I(f) = \mathbf{I}_V\,,$$

è costante in quanto è pari all'identità $\mathbf{I}_V \in \mathrm{L}\{V\,;V\}$ su V per ogni $f \in \mathrm{L}\{U,V\}$. Valutando la derivata direzionale secondo un incremento $h \in \mathrm{L}\{U,V\}$ si ottiene

$$dF(f;h) = h \circ I(f) + f \circ dI(f;h) = \mathbf{O}_V\,,$$

[31] Pubblicata da JACOBI nel 1841. Vedi TRUESDELL and TOUPIN [5] e [25] vol II, pag. 931.

con $\mathbf{O}_V \in \mathrm{L}\{V\,;\,V\}$ trasformazione nulla su V e quindi

$$dI(f;h) = -I(f) \circ h \circ I(f) = -f^{-1} \circ h \circ f^{-1}\,,$$

che è la formula cercata.

In [23] si può trovare la dimostrazione dell'esistenza del limite che definisce la derivata $dI(f;h)$.

Se $f \in \mathrm{L}\{U,V\}$ dipende da un parametro t si ha che

$$\big[I(f(t))\big]^{\cdot} = dI(f(t);\dot{f}(t)) = -f^{-1} \circ \dot{f} \circ f^{-1}\,.$$

VI – SPAZI FUNZIONALI

Gli spazi topologici che hanno una struttura più ricca consentono di pervenire a risultati più completi. Nelle applicazioni gli spazi più utili sono certamenti quelli di HILBERT.

Nel seguito si richiamano le nozioni di spazio metrico, di spazio normato e di spazio con prodotto interno e si descrivono le principali proprietà degli spazi di HILBERT.

1. SPAZI METRICI

■ Uno *spazio metrico* è una coppia $\{\mathcal{X}, d\}$ costituita da un insieme $\mathcal{X}$ e da una funzione $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mapsto \Re$ detta la *metrica*, o *distanza* tale che

$$\begin{cases} d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geq 0 \quad \text{e} \; d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \iff \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \,, \\ d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \,, \\ d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) \leq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \quad \text{diseguaglianza triangolare} \,. \end{cases}$$

Una successione $\{\mathbf{x}_n\}$ di elementi di uno spazio metrico converge ad un elemento limite $\mathbf{x}$ se

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \to 0 \,.$$

In virtù della diseguaglianza triangolare, ogni successione convergente soddisfa il *criterio di convergenza di* CAUCHY [32]

$$\lim_{n,m\to\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) \to 0 \,.$$

Una successione che soddisfa tale criterio è una *successione di* CAUCHY.

■ Uno spazio metrico $\mathcal{X}$ è detto *completo* se ogni successione di CAUCHY converge a $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

[32] AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857). Professore di matematica all'École Polytechnique, alla Sorbona ed al Collège de France. E' stato uno dei maggiori matematici di ogni tempo.

2. SPAZI NORMATI

■ Uno *spazio normato* $\mathcal{X}$ è uno spazio lineare in cui è definito un funzionale

$$\| \cdot \| : \mathcal{X} \mapsto \Re$$

detto *norma* che gode delle seguenti proprietà

$$\begin{cases} \| \mathbf{u} \| \geq 0 & \forall \mathbf{u} \in \mathcal{X} \quad \text{con } \| \mathbf{u} \| = \mathbf{o} \iff \mathbf{u} = \mathbf{o} \,, \\ \| \alpha \mathbf{u} \| = | \alpha | \, \| \mathbf{u} \| & \forall \mathbf{u} \in \mathcal{X}, \quad \forall \alpha \in \Re \,, \\ \| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \| & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{X} \quad \text{diseguaglianza triangolare} \,. \end{cases}$$

Uno *spazio topologico lineare* è uno spazio lineare in cui è definita una topologia rispetto alla quale le operazioni lineari sono continue.

Uno spazio normato è uno spazio topologico lineare. Infatti

$$\begin{cases} \mathbf{u}_n \to \mathbf{u} \;\Rightarrow\; \| \mathbf{u}_n \| \to \| \mathbf{u} \| \,, \\ \mathbf{u}_n \to \mathbf{u} \,, \quad \alpha_n \to \alpha \;\Rightarrow\; \alpha_n \mathbf{u}_n \to \alpha \mathbf{u} \,, \\ \mathbf{u}_n \to \mathbf{u} \,, \quad \mathbf{v}_n \to \mathbf{v} \;\Rightarrow\; \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n \to \mathbf{u} + \mathbf{v} \,. \end{cases}$$

La norma induce nello spazio una metrica omogenea ed invariante rispetto alle traslazioni

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \,,$$

che consente di definire la nozione di *convergenza forte* di una successione $\{\mathbf{u}_n\} \in \mathcal{X}$ ad un elemento $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X}$:

$$\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}_\infty \iff \lim_{n \to \infty} \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty \| \to 0 \,.$$

Un particolare spazio normato è $\Re$ con la norma euclidea.

■ Uno spazio normato $\mathcal{X}$ *completo* è detto uno *spazio di* BANACH [33] .

Ogni successsione di CAUCHY $\{\mathbf{u}_n\}$ di elementi di $\mathcal{X}$ converge quindi ad un elemento $\mathbf{u}_\infty$ dello spazio $\mathcal{X}$:

$$\lim_{n,m \to \infty} \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m \|_{\mathcal{X}} \to 0 \;\Rightarrow\; \exists\, \mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X} \;:\; \lim_{n \to \infty} \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty \|_{\mathcal{X}} \to 0 \,.$$

[33] STEFAN BANACH (1892-1945). Eminente matematico polacco cui sono dovuti i più importanti contributi alla moderna analisi funzionale.

2.1. Applicazioni lineari continue e spazi normati duali

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi normati e sia $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ un'applicazione.

- L'applicazione lineare $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è *limitata* se vale la diseguaglianza

$$C \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} \geq \| \mathbf{A}\mathbf{x} \|_{\mathcal{Y}} , \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} .$$

Sia $\mathcal{A}$ un insieme e $\mathcal{Y}$ uno spazio lineare normato.

Un'applicazione $\mathbf{f}$ di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{Y}$ è detta *limitata* se $\mathbf{f}(\mathcal{A})$ è limitato in $\mathcal{Y}$ e cioè se

$$\| \mathbf{f} \| := \sup \{ \| \mathbf{f}(\mathbf{x}) \|_{\mathcal{Y}} \, : \, \mathbf{x} \in \mathcal{A} \} < +\infty ,$$

L'insieme delle applicazioni limitate è uno spazio lineare normato $\mathcal{B}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$.
Per le applicazioni lineari tra spazi normati la nozione di limitatezza coincide con quella di continuità. Lo spazio lineare costituito dalle applicazioni lineari limitate $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ è denotato con $\mathrm{L}(\mathcal{X} \, ; \mathcal{Y})$.

- Lo spazio lineare costituito dai funzionali lineari $f : \mathcal{X} \mapsto \Re$ limitati su $\mathcal{X}$ è detto *spazio normato duale* di $\mathcal{X}$ e si denota con $\mathcal{X}' = \mathrm{L}(\mathcal{X} \, ; \Re)$.

La norma di $f \in \mathrm{L} \{ \mathcal{X}, \Re \}$ è definita da

$$\| f \|_{\mathcal{X}'} = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{X}} \{ | f(\mathbf{u}) | \, : \, \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{X}} \leq 1 \} .$$

Il sottospazio lineare $\mathrm{Ker}\, \mathbf{A} = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o} \}$ è detto il *nucleo* della applicazione lineare $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$. Se $\mathbf{A} \in \mathrm{L}(\mathcal{X} \, ; \mathcal{Y})$ il nucleo $\mathrm{Ker}\, \mathbf{A}$ è chiuso in $\mathcal{X}$.

3. SPAZI DI HILBERT

- Uno spazio vettoriale H sul campo reale è detto uno *spazio pre-*HILBERT se sul prodotto cartesiano $H \times H$ è definita una forma bilineare $(\cdot \, , \, \cdot)$, simmetrica e definita positiva:

$$\begin{cases} (\mathbf{u} \, , \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \, , \mathbf{u}) & \forall \, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H , \\ (\mathbf{u} \, , \mathbf{u}) \geq 0 & \forall \, \mathbf{u} \in H , \\ (\mathbf{u} \, , \mathbf{u}) = 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{u} = \mathbf{o} . \end{cases}$$

La forma $(\cdot \, , \, \cdot)$ è detta il *prodotto interno* in H, ed induce una *norma* in H definita da

$$\| \mathbf{u} \| := \sqrt{(\mathbf{u} \, , \mathbf{u})} .$$

In ogni spazio vettoriale con prodotto interno vale la

■ *regola del parallelogramma*

$$\boxed{\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|^2 = 2 \left(\| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2 \right) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \,.}$$

La regola del parallelogramma può enunciarsi affermando che

- la somma dei quadrati costruiti sui lati è eguale alla somma dei quadrati costruiti sulle diagonali.

Viceversa, se in uno spazio normato vale la regola del parallelogramma, allora è possibile definire in esso un prodotto interno mediante una delle due equivalenti relazioni

$$\begin{cases} (\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) := \frac{1}{4}\Big[\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 - \| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2\Big] & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \,, \\ (\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) := \frac{1}{2}\Big[\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 - \| \mathbf{u} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2\Big] & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \,. \end{cases}$$

La diseguaglianza triangolare è conseguenza della

- *diseguaglianza di* CAUCHY-BUNYAKOVSKII [34] -SCHWARZ [35]

$$\boxed{|(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v})| \le \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{v} \| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \,,}$$

dove l'eguaglianza sussiste se e solo se i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli.

La diseguaglianza di CAUCHY-BUNYAKOVSKII-SCHWARZ si dimostra osservando che

$$(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}\,,\, \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \ge 0 \quad \forall \lambda \in \Re \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$$

ed imponendo che il discriminante del polinomio di secondo grado in λ sia non positivo. Si noti che la validità della diseguaglianza sussiste sotto la più debole ipotesi che la forma bilineare $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ sia non negativa.

In ogni spazio vettoriale con prodotto interno vale la

- *regola del parallelogramma*

$$\boxed{\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|^2 = 2 \left(\| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2 \right) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H} \,.}$$

La regola del parallelogramma può enunciarsi affermando che la somma dei quadrati costruiti sui lati è eguale alla somma dei quadrati costruiti sulle diagonali.

---

[34] VIKTOR YAKOVLEVICH BUNYAKOVSKII (1804-1889). Matematico ucraino. Fu allievo di CAUCHY a Parigi nel 1825. Pubblicò il risultato in una monografia del 1859 sulle diseguaglianze tra integrali.

[35] HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843-1921). Pubblicò il risultato in una nota del 1885 scritta in onore di WEIERSTRASS in occasione del suo 70° compleanno

Un notevole risultato dovuto a M. Fréchet, J. von Neumann [36] e P. Jordan assicura che, viceversa, se in uno spazio normato vale la regola del parallelogramma, allora è possibile definire in esso un prodotto interno mediante una delle due equivalenti relazioni (vedi ad es. [17] teor.I.5.1)

$$\begin{cases} (\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,) := \frac{1}{4}\Big[\|\,\mathbf{u}+\mathbf{v}\,\|^2 - \|\,\mathbf{u}+\mathbf{v}\,\|^2\Big] & \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H}\,, \\ (\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,) := \frac{1}{2}\Big[\|\,\mathbf{u}+\mathbf{v}\,\|^2 - \|\,\mathbf{u}\,\|^2 - \|\,\mathbf{v}\,\|^2\Big] & \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H}\,. \end{cases}$$

La regola del parallelogramma caratterizza quindi tra gli spazi normati quelli con prodotto interno.

- Uno spazio pre-Hilbert H è detto uno *spazio di* Hilbert [37] se è *completo* rispetto alla norma indotta dal prodotto interno.

Uno spazio di Hilbert è quindi uno spazio di Banach.

Un *sottospazio lineare chiuso* di uno spazio di Hilbert è anch'esso uno spazio di Hilbert con lo stesso prodotto interno.

La nozione di *spazio di* Hilbert consente di estendere al caso di spazi non finitamente generabili molte delle familiari proprietà degli spazi vettoriali di dimensione finita della geometria Euclidea.

3.1. Proiezione ortogonale

Un insieme $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ è detto *convesso* se, comunque assegnati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in $\mathcal{K}$, tutti i vettori del segmento che li unisce appartengono a $\mathcal{K}$:

$$\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{K} \;\Rightarrow\; \lambda\,\mathbf{u} + (1-\lambda)\,\mathbf{v} \in \mathcal{K} \quad \forall\,\lambda \in [0,1]\,.$$

L'estensione della validità di molti classici risultati di geometria euclidea agli spazi di Hilbert è fondata sulla seguente fondamentale proprietà.

---

[36] John von Neumann (1903-1957). Uno dei matematici più geniali del XX secolo cui sono anche dovuti contributi fondamentali per l'invenzione dei calcolatori elettronici.

[37] David Hilbert (1862-1943). Nativo di Königsberg dove frequentò l'Università insieme all'amico Minkowski e conseguì il dottorato nel 1885 sotto la guida di Lindemann. Nel 1895 ottenne per interessamento di Klein la cattedra di matematica all'Università di Göttingen dove divenne amico di Hurwitz. A Göttingen restò fino alla fine della carriera facendo chiamare presso quella Università anche l'amico Minkowski. Hilbert è certamente il matematico tedesco più illustre del XX secolo. Fondamentali sono stati i suoi contributi in molti settori dell'analisi e della geometria, campo quest'ultimo in cui egli ha avuto la maggiore influenza dopo Euclide (325-265 A.C.).

Proposizione 3.1. Teorema della proiezione ortogonale. *Assegnati un insieme chiuso e convesso $\mathcal{K}$ in uno spazio di* HILBERT $\mathcal{H}$ *ed un vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$, esiste un unico vettore $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ in corrispondenza del quale è minima la distanza di $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ da $\mathcal{K}$:*

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}} \| = \min \big\{ \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \,,\; \mathbf{v} \in \mathcal{K} \big\} \,.$$

Il vettore $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ è detto la proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ su $\mathcal{K}$ e l'operatore lineare $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}$ è detto il proiettore ortogonale su $\mathcal{K}$. □

Assegnato $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$, si consideri il convesso chiuso

$$\mathbf{u} - \mathcal{K} := \big\{ \mathbf{v} \in \mathcal{H} \;:\; \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w} \,,\; \mathbf{w} \in \mathcal{K} \big\} \,.$$

Effettuando la sostituzione $\mathbf{u} - \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, la proposizione 3.1 è equivalente alla seguente.

Proposizione 3.2. Proprietà di minima norma. *Ogni insieme chiuso e convesso $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ in uno spazio di* HILBERT $\mathcal{H}$ *contiene un unico vettore di minima norma.*

Dim. Sia $d = \inf \big\{ \| \mathbf{v} \| \,,\; \mathbf{v} \in \mathcal{K} \big\}$ e $\{\mathbf{v}_n\} \subset \mathcal{K}$ una successione minimizzante cioè tale che $\| \mathbf{v}_n \| \to d$. Per la regola del parallelogramma si ha che

$$\begin{aligned} \| (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m)/2 \|^2 &= 1/2 \, (\| \mathbf{v}_n \|^2 + \| \mathbf{v}_m \|^2) - \| (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2 \|^2 \leq \\ &= 1/2 \, (\| \mathbf{v}_n \|^2 + \| \mathbf{v}_m \|^2) - d^2 \,, \end{aligned}$$

poichè $\| (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2 \| \geq d$ in quanto $(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2 \in \mathcal{K}$ in virtù della convessità di $\mathcal{K}$. La successione $\{\mathbf{v}_n\} \subset \mathcal{K}$ è dunque di CAUCHY.

In forza della completezza di $\mathcal{H}$ e della chiusura di $\mathcal{K}$ la successione $\{\mathbf{v}_n\} \subset \mathcal{K}$ converge ad un elemento $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$. Inoltre la diseguaglianza $\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \geq \big| \| \mathbf{u} \| - \| \mathbf{v} \| \big|$ assicura che $\| \mathbf{u} \| = d$.

Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{K}$ sono due elementi di norma pari a d, la regola del parallelogramma implica che

$$\| (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)/2 \|^2 = d^2 - \| (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)/2 \|^2 \leq 0 \,,$$

cioè che $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. □

Si consideri la forma quadratica $f(\mathbf{w}) := \| \mathbf{u} - \mathbf{w} \|^2$ con $\mathbf{w} \in \mathcal{K}$ e si osservi che i vettori $\mathbf{v} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$ con $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$ sono diretti verso l'interno di $\mathcal{K}$.

Si imponga quindi che la derivata direzionale di $f(\mathbf{w})$ nel punto $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$ e secondo l'incremento $\mathbf{v} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$ sia non negativa.

Si deduce che la proiezione $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$ di $\mathbf{u}$ su $\mathcal{K}$ è caratterizzata dalla condizione variazionale

$$(\, \mathbf{u} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u} \,,\, \mathbf{v} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u} \,) \leq 0 \quad \forall \, \mathbf{v} \in \mathcal{K} \,.$$

Si noti che

- il vettore $\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$ è diretto secondo la normale uscente dal convesso $\mathcal{K}$ nel punto $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}$.

E’ facile vedere che l’operatore $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}$ gode della *proprietà di contrazione* e cioè che

$$\boxed{\| \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{v} \| \le \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}\,.}$$

Infatti risulta

$$\begin{cases} (\, \mathbf{u}_1 - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_1 \,,\, \mathbf{v} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_1 \,) \le 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{K}\,, \\ (\, \mathbf{u}_2 - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_2 \,,\, \mathbf{v} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_2 \,) \le 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{K}\,. \end{cases}$$

Ponendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}_2$ nella prima disuguaglianza e $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$ nella seconda si ottiene per addizione che

$$\| \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_1 - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_2 \|^2 \le (\, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \,,\, \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_1 - \mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}_2 \,)\,,$$

e quindi il risultato segue dalla diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ.

Se il convesso chiuso $\mathcal{K}$ è un sottospazio lineare $\mathcal{S}$ di $\mathcal{H}$ la condizione di normalità si traduce in una di ortogonalità

$$(\, \mathbf{u} - \mathbf{P}_{\mathcal{S}}\mathbf{u} \,,\, \mathbf{v} \,) = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{S}\,.$$

Sia $\mathcal{S}$ un insieme di $\mathcal{H}$ e

$$\mathcal{S}^{\oplus} := \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{H} \,:\, (\, \mathbf{u} \,,\, \mathbf{v} \,) = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{S} \right\},$$

il sottospazio lineare *complemento ortogonale* nella topologia di HILBERT.

Si noti che il sottospazio lineare $\mathcal{S}^{\oplus}$ è chiuso in virtù della continuità del prodotto scalare e della diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ.

Se $\mathcal{S}$ è un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{H}$, la proposizione 3.1 stabilisce che ogni vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ può essere univocamente decomposto nella somma

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}_{\mathcal{S}}\mathbf{u} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathcal{S}})\mathbf{u}\,,$$

con $\mathbf{P}_{\mathcal{S}}\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ e $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathcal{S}})\mathbf{u} \in \mathcal{S}^{\oplus}$.

Sussiste dunque la decomposizione in somma diretta

$$\mathcal{H} = \mathcal{S} \dotplus \mathcal{S}^{\oplus} \quad \text{con} \;\; \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\oplus} = \{\mathbf{o}\}\,.$$

L’unicità della decomposizione consente di affermare che

- un sottospazio lineare $\mathcal{S}$ è chiuso in $\mathcal{H}$ se e solo se

$$\boxed{\mathcal{S}^{\oplus\oplus} = \mathcal{S}\,.}$$

Infatti se $\mathcal{S}$ è chiuso si ha che $\mathcal{H} = \mathcal{S}^{\oplus} \dotplus \mathcal{S}^{\oplus\oplus} = \mathcal{S}^{\oplus} \dotplus \mathcal{S} \;\Rightarrow\; \mathcal{S}^{\oplus\oplus} = \mathcal{S}\,.$

Il proiettore ortogonale $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}$ su un sottospazio lineare chiuso $\mathcal{K}$ è un operatore lineare su $\mathcal{H}$ con peculiari proprietà.

Proposizione 3.3. Proprietà del proiettore. *Il proiettore ortogonale $\mathbf{P}_{\mathcal{K}}$ su di un sottospazio lineare chiuso $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ è un operatore lineare su $\mathcal{H}$ tale che*

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mathcal{K}} = \mathbf{P}_{\mathcal{K}}^2 & & \text{idempotenza}\,, \\ (\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\,,\,\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{v}) & \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H} & \text{simmetria}\,, \\ \|\,\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}\,\| \le \|\,\mathbf{u}\,\| & \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H} & \text{contrazione}\,. \end{cases}$$

Per la dimostrazione si veda [17], teor. III.2. □

Per la proprietà di contrazione, un proiettore ortogonale è limitato e risulta

$$\|\,\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\,\| \le 1\,.$$

Il proiettore su un sottospazio lineare chiuso $\mathcal{K}$ è quindi continuo. Le seguenti proprietà caratterizzano un proiettore ortogonale.

Proposizione 3.4. Caratterizzazione del proiettore. *Un operatore lineare limitato $\mathbf{P} \in \mathrm{L}\{\mathcal{H},\mathcal{H}\}$ su uno spazio di* HILBERT *$\mathcal{H}$ è un proiettore ortogonale sul sottospazio lineare immagine* $\mathrm{Im}\,\mathbf{P}$ *se e solo se gode delle seguenti proprietà caratteristiche:*

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mathcal{K}} = \mathbf{P}_{\mathcal{K}}^2 & & \text{idempotenza}\,, \\ (\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\,,\,\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\mathbf{v}) & \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{H} & \text{simmetria}\,, \end{cases}$$

o, in alternativa,

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mathcal{K}} = \mathbf{P}_{\mathcal{K}}^2 & \text{idempotenza}\,, \\ \|\,\mathbf{P}_{\mathcal{K}}\,\| \le 1\,. \end{cases}$$

Per la dimostrazione si veda [17], teor. III.2 e III.3. □

Si noti che l'immagine di un proiettore ortogonale è un sottospazio lineare chiuso dello spazio di HILBERT $\mathcal{H}$.

Un esempio importante di spazio di HILBERT è lo spazio $\mathcal{L}^2(\Omega)$ costituito dai campi scalari tali che la norma dei valori puntuali abbia quadrato integrabile (secondo LEBESGUE [38]) nel dominio Ω. Ciò significa che deve essere

$$\int_{\Omega} |\,f(\mathbf{x})\,|^2 \,\mathrm{d}\mu < +\infty\,.$$

[38] HENRI LEBESGUE (1875-1941). Matematico francese allievo di EMILE BOREL (1871-1956) e fondatore della moderna teoria della misura e dell'integrazione.

Si denotano rispettivamente con i simboli $H(\Omega)$ e $\mathcal{H}(\Omega)$ gli spazi dei campi vettoriali $\mathbf{v} : \Omega \mapsto V$ o tensoriali $\mathbf{T} : \Omega \mapsto \mathrm{L}(V\,;V)$ di quadrato integrabile su Ω e cioè tali che

$$\int_{\Omega} \| \mathbf{v} \|^2 \, d\mu < +\infty \,, \qquad \int_{\Omega} \| \mathbf{T} \|^2 \, d\mu < +\infty \,,$$

essendo $\| \bullet \|$ la norma su V e $\| \mathbf{T} \| = [\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{T}^T\mathbf{T})]^{1/2}$ la norma in $\mathrm{L}(V\,;V)$.

- Lo spazio $H(\Omega)$ dei campi vettoriali di quadrato integrabile in Ω è dotato del prodotto interno e della norma definiti da

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{H(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mu \,, \qquad \| \mathbf{v} \|_{H(\Omega)} = \Big[\int_{\Omega} \| \mathbf{v} \|^2 \, d\mu \Big]^{1/2} .$$

Analoghe definizioni sussistono per i campi scalari e tensoriali.

Osservazione 3.1. Sia $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ un campo scalare che si annulla su un sottoinsieme $\mathcal{S}_f$ di Ω il cui complemento $\Omega \setminus \mathcal{S}_f$ ha misura nulla secondo LEBESGUE. Allora si ha che $\| f \|_{H(\Omega)} = 0$ anche se $f \neq 0$ contro la proprietà della norma di essere definita positiva.

E' pertanto necessario definire gli elementi dello spazio $\mathcal{L}^2(\Omega)$ quali classi di equivalenza di campi che sono *quasi ovunque* tra loro eguali e cioè campi che possono differire in un sottoinsieme di Ω avente misura nulla secondo LEBESGUE.

Pertanto le proprietà di un campo di quadrato integrabile vanno attribuite ad un rappresentante della classe di equivalenza. Ad esempio un campo di quadrato integrabile è continuo se esiste almeno un rappresentante continuo nella corrispondente classe di equivalenza e cioè se è possibile modificare un campo della classe su un insieme di misura nulla per renderlo continuo. ■

3.2. Duale di uno spazio di Hilbert

Una proprietà caratteristica di uno spazio di HILBERT è quella di poter essere identificato con il suo duale.

Ciò segue da fondamentali risultati essenzialmente dovuti a F. RIESZ [39] ([2], 1909) su cui è basata la teoria degli spazi di HILBERT, (vedi ad es. [17], [22]).

Proposizione 3.5. Teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet. *Si consideri un funzionale lineare limitato* $f \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H},\Re\right\}$ *su uno spazio di* HILBERT $\mathcal{H}$. *Esiste allora un unico vettore* $\mathbf{u}_f \in \mathcal{H}$ *tale che*

$$f(\mathbf{v}) = (\,\mathbf{u}_f\,,\,\mathbf{v}\,)_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H} \,, \quad \text{con} \quad \| f \|_{\mathcal{H}'} = \| \mathbf{u}_f \|_{\mathcal{H}} \,.$$

---

[39] FRIEDRICH RIESZ (1880-1956). Matematico ungherese cui sono dovuti fondamentali risultati di analisi funzionale.

Dim. L'unicità di $\mathbf{u}_f \in \mathcal{H}$ è evidente in quanto

$$\langle\, \mathbf{u}_f \,,\, \mathbf{v} \,\rangle = 0 \,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H} \;\Rightarrow\; \mathbf{u}_f = \mathbf{o} \,.$$

La continuità e la linearità di $f \in \mathcal{H}'$ assicurano che $\operatorname{Ker} f$ è un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{H}$. Se $\operatorname{Ker} f = \mathcal{H}$ e cioè $f = \mathbf{o} \in \mathcal{H}'$ basta prendere $\mathbf{u}_f = \mathbf{o} \in \mathcal{H}$. Si supponga quindi che $\operatorname{Ker} f \neq \mathcal{H}$ e si dimostri che esiste un $\mathbf{v}_f \in \mathcal{H}$ tale che

$$\mathbf{v}_f \notin \operatorname{Ker} f \,, \quad \|\, \mathbf{v}_f \,\|_{\mathcal{H}} = 1 \,, \quad (\, \mathbf{v}_f \,,\, \mathbf{v} \,)_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f \,.$$

A tal fine si consideri un $\mathbf{u} \in \mathcal{H} \setminus \operatorname{Ker} f$ e si ponga

$$\mathbf{v}_f = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{\Pi u}}{\|\, \mathbf{u} - \mathbf{\Pi u} \,\|_{\mathcal{H}}} \,,$$

con $\mathbf{\Pi}$ proiettore ortogonale su $\operatorname{Ker} f$. Il vettore $\mathbf{v}_f \in \mathcal{H}$ è dunque un versore ortogonale a $\operatorname{Ker} f$. Si dimostra ora che tale versore è unico e cioè che il complemento ortogonale di $\operatorname{Ker} f$ in $\mathcal{H}$ ha dimensione pari ad 1.

A tal fine basta mostrare che ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ ammette una decomposizione del tipo

$$\mathbf{v} = \lambda\, \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_o \quad \text{con } \mathbf{v}_o \in \operatorname{Ker} f \,.$$

Siccome $f(\mathbf{v}_o) = 0$ dovrà essere $f(\mathbf{v}) = \lambda\, f(\mathbf{v}_f)$ e quindi

$$\lambda = \frac{f(\mathbf{v})}{f(\mathbf{v}_f)} \quad \text{e } \mathbf{v}_o = \mathbf{v} - \lambda\, \mathbf{v}_f \,.$$

Risulta dunque

$$(\, \mathbf{v}_f \,,\, \mathbf{v} \,)_{\mathcal{H}} = \lambda \,\|\, \mathbf{v}_f \,\|_{\mathcal{H}}^2 + (\, \mathbf{v}_f \,,\, \mathbf{v}_o \,)_{\mathcal{H}} = \lambda = \frac{f(\mathbf{v})}{f(\mathbf{v}_f)} \,.$$

Basta allora porre $\mathbf{u}_f = f(\mathbf{v}_f)\, \mathbf{v}_f$.

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} \|\, f \,\|_{\mathcal{H}'} &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}} \big\{ f(\mathbf{v}) \;:\; \|\, \mathbf{v} \,\|_{\mathcal{H}} \leq 1 \big\} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}} \big\{ (\, \mathbf{v}_f \,,\, \mathbf{v} \,)_{\mathcal{H}} \;:\; \|\, \mathbf{v} \,\|_{\mathcal{H}} \leq 1 \big\} \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}} \big\{ \|\, \mathbf{v} \,\|_{\mathcal{H}} \,\|\, \mathbf{u}_f \,\|_{\mathcal{H}} \;:\; \|\, \mathbf{v} \,\|_{\mathcal{H}} \leq 1 \big\} = \|\, \mathbf{u}_f \,\|_{\mathcal{H}} \,, \end{aligned}$$

ed anche

$$\|\, f \,\|_{\mathcal{H}'} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}} \big\{ f(\mathbf{v}) \;:\; \|\, \mathbf{v} \,\|_{\mathcal{H}} \leq 1 \big\} \geq f\left(\frac{\mathbf{u}_f}{\|\, \mathbf{u}_f \,\|_{\mathcal{H}}} \right) = \frac{\|\, \mathbf{u}_f \,\|_{\mathcal{H}}^2}{\|\, \mathbf{u}_f \,\|_{\mathcal{H}}} = \|\, \mathbf{u}_f \,\|_{\mathcal{H}} \,,$$

da cui $\|\, f \,\|_{\mathcal{H}'} = \|\, \mathbf{u}_f \,\|_{\mathcal{H}}$. □

Ogni vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ definisce un funzionale lineare limitato $f_{\mathbf{u}} \in \mathcal{H}'$ tramite la relazione

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) := (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \quad \text{con} \quad \| f_{\mathbf{u}} \|_{\mathcal{H}'} = \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{H}}.$$

Il teorema di RIESZ-FRÉCHET stabilisce pertanto l'esistenza, tra lo spazio di HILBERT $\mathcal{H}$ ed il suo duale $\mathcal{H}'$, di una corrispondenza biunivoca lineare e continua con l'inversa.

Tale corrispondenza preserva la norma, ed è pertanto un *isomorfismo isometrico* $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}', \mathcal{H}\right\}$:

$$\boldsymbol{\mu} f = \mathbf{u}_f \quad \forall\, f \in \mathcal{H}', \quad \text{con} \quad \| \boldsymbol{\mu} f \|_{\mathcal{H}'} = \| f \|_{\mathcal{H}}.$$

Lo spazio duale $\mathcal{H}'$ viene dotato naturalmente di un prodotto interno indotto da quello di $\mathcal{H}$ e definito da

$$(f_1, f_2)_{\mathcal{H}'} := (\boldsymbol{\mu} f_1, \boldsymbol{\mu} f_2)_{\mathcal{H}} \quad \forall\, f_1, f_2 \in \mathcal{H}'.$$

La norma indotta in $\mathcal{H}'$ da tale prodotto interno coincide con quella $\| f \|_{\mathcal{H}'}$ precedentemente definita nella sezione 2.1 (p. 96).

L'esistenza di un isomorfismo isometrico tra $\mathcal{H}$ ed il suo duale $\mathcal{H}'$ implica che anche lo spazio duale $\mathcal{H}'$, è completo e dunque è uno spazio di HILBERT.

L'isomorfismo isometrico $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}', \mathcal{H}\right\}$ consente di estendere la diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ al prodotto di dualità tra spazi di HILBERT.

Si può anzi dire che la definizione di norma nello spazio duale introdotta nella sezione 2.1 (p. 96) è suggerita da tale estensione.

Proposizione 3.6. Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz tra spazi duali. *Siano $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ spazi di* HILBERT *in dualità. Allora risulta*

$$|\langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle| \le \| \mathbf{x}' \|_{\mathcal{H}'} \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{H}, \quad \forall\, \mathbf{x}' \in \mathcal{H}',$$

e l'eguaglianza vale se e solo se $\mathbf{x}$ e $\boldsymbol{\mu}\mathbf{x}'$ sono paralleli.

Dim. Basta porre $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\mu}\mathbf{y}$ con $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$. □

Un funzionale lineare $f \in \mathcal{H}'$ è nullo su $\mathcal{H}$ se si annulla su un sottospazio lineare denso in $\mathcal{H}$. Il teorema della proiezione e quello di rappresentazione, proposizioni 3.1 (p. 100) e 3.5, consentono di dimostrare che vale anche la proprietà inversa.

Proposizione 3.7. Caratterizzazione dei sottospazi lineari densi. *Se l'unico funzionale $f \in \mathcal{H}'$ che si annulla sul sottospazio lineare $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ è il funzionale nullo su $\mathcal{H}$, cioè se*

$$f(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; f(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H},$$

allora $\mathcal{S}$ è denso in $\mathcal{H}$.

Dim. Per ipotesi $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow \mathrm{Ker}\, f = \mathcal{H}$. Si deve mostrare che $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{H}$. Ragionando per assurdo si supponga che sia $\overline{\mathcal{S}} \neq \mathcal{H}$. Allora scelto un $\mathbf{u} \in \mathcal{H} \setminus \overline{\mathcal{S}}$, il vettore $\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\overline{\mathcal{S}}}\mathbf{u}$ sarebbe non nullo e quindi tale sarebbe anche il funzionale lineare $f = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\overline{\mathcal{S}}}\mathbf{u})$. Poichè per ipotesi

$$f(\mathbf{v}) = (\,\mathbf{u} - \mathbf{P}_{\overline{\mathcal{S}}}\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,) = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \overline{\mathcal{S}} \;\Rightarrow\; f(\mathbf{v}) = 0\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H}\,,$$

ciò è impossibile. □

Osservazione 3.2. Ponendo l'isomorfismo isometrico $\boldsymbol{\mu} \in L\{\mathcal{H}', \mathcal{H}\}$ pari all'identità, lo spazio $\mathcal{H}$ può essere identificato col suo duale $\mathcal{H}'$ ed è detto uno spazio di HILBERT *pivot*. Non è però lecito identificare ogni spazio di HILBERT col suo duale in quanto ciò conduce a conclusioni non accettabili. ■

3.3. Successioni ortonormali complete

Un insieme di vettori di uno spazio di HILBERT costituisce una *famiglia ortonormale* se tutti i vettori sono di norma unitaria ed a due a due ortogonali.

Una famiglia ortonormale può essere costruita a partire da una famiglia finita o contabile mediante il procedimento di ortogonalizzazione di GRAM-SCHMIDT.

■ Ortogonalizzazione

Sia $\{\mathbf{u}_n\}$ è una successione di elementi linearmente indipendenti di $\mathcal{H}$. Allora si definiscono induttivamente le successioni $\{\mathbf{w}_n\}$ e $\{\mathbf{z}_n\}$ ponendo

$$\begin{cases} \mathbf{w}_o = \mathbf{u}_o\,, & \mathbf{z}_o = \dfrac{\mathbf{w}_o}{\|\,\mathbf{w}_o\,\|}\,, \\ \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \sum\limits_{k \le n} (\,\mathbf{u}_{n+1}\,,\,\mathbf{z}_k\,)\,\mathbf{z}_k\,, & \mathbf{z}_{n+1} = \dfrac{\mathbf{w}_{n+1}}{\|\,\mathbf{w}_{n+1}\,\|}\,. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la successione $\{\mathbf{z}_n\}$ è ortonormale.

Una famiglia ortonormale è detta *completa* se non esiste alcuna altra famiglia ortonormale che la contiene.

Una famiglia ortonormale completa è detta anche una *base ortonormale* e la sua esistenza è assicurata dal lemma di ZORN.

Lo spazio di HILBERT $\mathcal{H}$ è detto *separabile* se esiste una successione di elementi di $\mathcal{H}$ che costituisce una base ortonormale.

Le successioni ortonormali complete consentono di effettuare lo sviluppo in serie di FOURIER [40] di un campo vettoriale $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$.

---

[40] JOSEPH FOURIER (1768-1830). Grande fisico matematico francese famoso per i suoi studi sulla propagazione del calore (pubblicò la *Théorie analytique de la chaleur*) e per il metodo di sviluppo in serie che prende il suo nome.

Proposizione 3.8. Sviluppo in serie di Fourier. *Sia* $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{H}$ *una successione ortonormale completa. Per ogni* $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ *sussiste allora lo sviluppo in serie*

$$\boxed{\mathbf{f} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n ,}$$

e vale la relazione di PARSEVAL

$$\boxed{\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)|^2 .}$$

Dim. Dalla relazione

$$\|\mathbf{f} - \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n \|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)^2 ,$$

si deduce la *diseguaglianza di* BESSEL [41]

$$\boxed{\sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)^2 \le \|\mathbf{f}\|^2 .}$$

Ne consegue che la successione $\Big\{ \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n \Big\}$ è di CAUCHY in quanto la norma della differenza

$$\| \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n - \sum_{n=1}^{h} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n \|^2 = \| \sum_{n=h}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n \|^2 = \sum_{n=h}^{k} |(\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)|^2 ,$$

con $k > h$, tende a zero per $h \to \infty$.

Infatti la successione $\Big\{ \sum_{n=1}^{h} |(\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)|^2 \Big\}$ è monotona non decrescente e limitata in virtù della diseguaglianza di BESSEL e pertanto converge ad un limite finito.

Si ponga allora $\mathbf{f}^* = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n$ e si mostri che $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}$.
Per la continuità del prodotto interno si ha infatti che per ogni $\mathbf{u}_j$ risulta

$$(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*, \mathbf{u}_j) = \lim_{k\to\infty} \Big(\Big[\mathbf{f} - \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n \Big], \mathbf{u}_j \Big) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_j) - (\mathbf{f}, \mathbf{u}_j) = 0 .$$

La completezza della successione ortonormale implica quindi che $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}$.

[41] FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784-1846). Matematico tedesco direttore dell'osservatorio astronomico di Königsberg.

Osservando infine che, per la continuità della norma, si ha

$$0 = \lim_{k\to\infty} \| \mathbf{f} - \sum_{n=1}^{k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{u}_n \|^2 = \| \mathbf{f} \|^2 - \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |(\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)|^2 =$$

$$= \| \mathbf{f} \|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |(\mathbf{f}, \mathbf{u}_n)|^2 ,$$

si perviene alla *relazione di* PARSEVAL [42] . □

3.4. Spazi di Hilbert quoziente

Sia $\mathcal{L}$ un sottospazio lineare chiuso di uno spazio diHILBERT $\mathcal{H}$.
Si denoti con $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ lo spazio quoziente costituito dalle varietà $\overline{\mathbf{u}} := \mathbf{u} + \mathcal{L}$ e dotato della norma

$$\| \overline{\mathbf{u}} \|_{\mathcal{H}/\mathcal{L}} := \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{L}} \| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|_{\mathcal{H}} .$$

- E' possibile dotare lo spazio $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ di una struttura Hilbertiana indotta da quella dello spazio $\mathcal{H}$.

Per dimostrarlo si premettono alcune semplici considerazioni.

Proposizione 3.9. Prodotto interno indotto da un operatore. *Siano $\mathcal{X}$ uno spazio lineare e $\mathcal{H}$ uno spazio di* HILBERT. *Sia $\boldsymbol{\theta} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{H}$ un operatore lineare iniettivo, cioè tale che* $\mathrm{Ker}\, \boldsymbol{\theta} = \{\mathbf{o}\}$. *Allora:*
a) Definendo il prodotto interno in $\mathcal{X}$ mediante l'identità

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_{\mathcal{X}} := (\boldsymbol{\theta}\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}\mathbf{x}_2)_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X} ,$$

*lo spazio $\mathcal{X}$ è uno spazio pre-*HILBERT.
b) Lo spazio $\mathcal{X}$ è uno spazio di HILBERT *se e solo se* $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{\theta}$ *è chiuso in $\mathcal{H}$.*

Dim. La prima affermazione è una semplice conseguenza della bilinearità del prodotto interno definito in $\mathcal{X}$ e del fatto che

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}} = \| \boldsymbol{\theta}\mathbf{x} \|_{\mathcal{H}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta}\mathbf{x} = \mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{o} .$$

Per dimostrare la *b*) basta osservare che il sottospazio lineare $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{\theta} \subset \mathcal{H}$ è uno spazio di HILBERT per la topologia indotta da $\mathcal{H}$ se e solo se è chiuso in $\mathcal{H}$. In tal caso e solo in tal caso la mappa lineare $\boldsymbol{\theta}$, che è iniettiva e suriettiva da $\mathcal{X}$ su $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{\theta}$, costituisce un isomorfismo isometrico tra lo spazio pre-HILBERT $\mathcal{X}$ e lo spazio di HILBERT $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{\theta}$. Dunque lo spazio $\mathcal{X}$ è completo. □

[42] MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÊNES (1755-1836).

Proposizione 3.10. Isomorfismo fondamentale di uno spazio quoziente. *Sia $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ un sottospazio lineare chiuso di uno spazio di* HILBERT $\mathcal{H}$. *Tra lo spazio quoziente $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ ed il complemento ortogonale $\mathcal{L}^{\oplus}$ di $\mathcal{L}$ in $\mathcal{H}$ esiste un isomorfismo* $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}/\mathcal{L}, \mathcal{L}^{\oplus}\right\}$.

Dim. Basta definire $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{H}/\mathcal{L}, \mathcal{L}^{\oplus}\right\}$ come l'operatore lineare che ad ogni varietà $\mathbf{u} + \mathcal{L}^{\oplus} \in \mathcal{H}/\mathcal{L}$ fa corrispondere la proiezione di un qualsiasi vettore della varietà su $\mathcal{L}^{\oplus}$. L'operatore inverso $\boldsymbol{\theta}^{-1} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{L}^{\oplus}, \mathcal{H}/\mathcal{L}\right\}$ mappa i vettori $\mathbf{u}_{\oplus} \in \mathcal{L}^{\oplus}$ in $\mathbf{u}_{\oplus} + \mathcal{L}^{\oplus} \in \mathcal{H}/\mathcal{L}$. □

Lo spazio quoziente $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ diviene pertanto uno spazio di HILBERT definendo il prodotto interno come quello indotto dall'isomorfismo fondamentale

$$(\mathbf{u}_1 + \mathcal{L}\,,\, \mathbf{u}_2 + \mathcal{L})_{\mathcal{H}/\mathcal{L}} := (\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_1 + \mathcal{L})\,,\, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_2 + \mathcal{L}))_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{H}\,.$$

La corrispondente norma è pari a

$$\|\, \mathbf{u} + \mathcal{L} \,\|_{\mathcal{H}/\mathcal{L}} := \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}} \|\, \mathbf{u} + \mathbf{v} \,\|_{\mathcal{H}} = \|\, \mathbf{u} - \boldsymbol{\Pi}\mathbf{u} \,\|_{\mathcal{H}} = \|\, \boldsymbol{\Pi}^C \mathbf{u} \,\|_{\mathcal{H}}\,,$$

dove $\boldsymbol{\Pi}$ è il proiettore ortogonale di $\mathcal{H}$ su $\mathcal{L}$ e $\boldsymbol{\Pi}^C = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}$ è il proiettore complementare che proietta $\mathcal{H}$ su $\mathcal{L}^{\oplus}$.

3.5. Spazi prodotto

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi di BANACH. Il prodotto cartesiano $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ è allora uno spazio di BANACH per la topologia indotta da una dalle norme

$$\|\, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \,\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} := \|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}} + \|\, \mathbf{y} \,\|_{\mathcal{Y}}\,,$$

$$\|\, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \,\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} := \sqrt{\|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}}^2 + \|\, \mathbf{y} \,\|_{\mathcal{Y}}^2}\,.$$

Tali norme sono equivalenti in quanto per ogni coppia $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ si ha

$$(\|\, \mathbf{x} \,\|^2 + \|\, \mathbf{y} \,\|^2)^{1/2} \leq \|\, \mathbf{x} \,\| + \|\, \mathbf{y} \,\| \leq \sqrt{2}\, (\|\, \mathbf{x} \,\|^2 + \|\, \mathbf{y} \,\|^2)^{1/2}$$

Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono spazi di HILBERT lo *spazio prodotto* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ è uno spazio di HILBERT con il prodotto interno prodotto, di spazi

$$(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}\,,\, \{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\})_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} := (\mathbf{x}\,,\, \overline{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} + (\mathbf{y}\,,\, \overline{\mathbf{y}})_{\mathcal{Y}}\,,$$

e la corrispondente norma

$$\|\, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \,\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} := \sqrt{\|\, \mathbf{x} \,\|_{\mathcal{X}}^2 + \|\, \mathbf{y} \,\|_{\mathcal{Y}}^2}\,.$$

3.6. Convergenza debole

La *convergenza debole* di una successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{X}$ ad un elemento $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{X}$ è definita da

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u}_\infty \iff \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty) = 0 \,, \quad \forall\, f \in \mathcal{X}' \,.$$

Sussiste il seguente notevole risultato (vedi ad es. [26]).

Proposizione 3.11. Completa continuità. *Siano* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *due spazi di* HILBERT *e sia* $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\right\}$ *un operatore lineare compatto. Allora*

$$\boxed{i) \quad \mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u}_\infty \ \Rightarrow\ \mathbf{A}\mathbf{u}_n \to \mathbf{A}\mathbf{u}_\infty \,,}$$

e cioè una successione debolmente convergente viene trasformata dall'operatore $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\right\}$ *in una fortemente convergente.* □

3.7. Teoremi di Banach

Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi di BANACH.

- Il *grafico* di un operatore $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ avente dominio $\mathrm{dom}\,\mathbf{A} \subseteq \mathcal{X}$ è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ definito da

$$\mathcal{G}(\mathbf{A}) := \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}\} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \,:\, \mathbf{x} \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A} \right\}.$$

- Un operatore lineare ha *grafico chiuso* $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ se il suo grafico è chiuso nello spazio di BANACH $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Un operatore con grafico chiuso può essere equivalentemente caratterizzato dalla seguente proprietà:

$$\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A} \,, \quad \left.\begin{array}{l} \|\,\mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty\,\|_{\mathcal{X}} \to 0 \\ \\ \|\,\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}_\infty\,\|_{\mathcal{Y}} \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \mathbf{x}_\infty \in \mathrm{dom}\,\mathbf{A} \,, \quad \mathbf{y}_\infty = \mathbf{A}\mathbf{x}_\infty \,,$$

  ovvero richiedendo che il sottospazio lineare $\mathrm{dom}\,\mathbf{A} \subseteq \mathcal{X}$ sia uno spazio di BANACH per la norma $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{X}} + \|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\,\|_{\mathcal{Y}}$.

Ogni operatore lineare continuo $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X}\,;\, \mathcal{Y}\right\}$ ha ovviamente grafico chiuso.

Sussistono allora i seguenti risultati.

Proposizione 3.12. Teorema dell'applicazione inversa. *Se un operatore lineare continuo* $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X}\,;\, \mathcal{Y}\right\}$ *è biunivoco da* $\mathcal{X}$ *su* $\mathcal{Y}$ *allora l'operatore inverso è lineare e continuo.* □

Proposizione 3.13. Teorema del grafico chiuso. *Siano* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *spazi di* BANACH. *Un operatore lineare con grafico chiuso* $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ *con* $\operatorname{dom} \mathbf{A} = \mathcal{X}$ *è continuo.* □

Proposizione 3.14. Teorema dell'immagine chiusa. *Siano* $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ *e* $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'$ *coppie di spazi di* HILBERT *duali. Allora per ogni coppia di operatori duali* $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{X} \,;\, \mathcal{Y}\right\}$ *e* $\mathbf{A}' \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{Y}' \,;\, \mathcal{X}'\right\}$ *le seguenti proprietà*

$i)$ $\quad \operatorname{Im} \mathbf{A} \quad \text{chiuso in } \mathcal{Y} \iff \operatorname{Im} \mathbf{A} = \operatorname{Ker} (\mathbf{A}')^{\perp}$,

$ii)$ $\quad \operatorname{Im} \mathbf{A}' \quad \text{chiuso in } \mathcal{X}' \iff \operatorname{Im} \mathbf{A}' = (\operatorname{Ker} \mathbf{A})^{\perp}$,

$iii)$ $\quad \| \mathbf{A}\mathbf{x} \|_{\mathcal{Y}'} \geq c \, \| \mathbf{x} \|_{\mathcal{X}/\operatorname{Ker} \mathbf{A}} , \qquad \forall \, \mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$iv)$ $\quad \| \mathbf{A}'\mathbf{y}' \|_{\mathcal{X}'} \geq c \, \| \mathbf{y}' \|_{\mathcal{Y}'/\operatorname{Ker} \mathbf{A}'} , \qquad \forall \, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'$.

sono tra loro equivalenti □

VII – DISTRIBUZIONI

1. FUNZIONI GENERALIZZATE

Il concetto di funzione generalizzata, introdotto da S. L. SOBOLEV [43] [3] nel 1938, è stato sistematicamente sviluppato da L. SCHWARTZ [44] [4] negli anni 1948-50. Una trattazione generale è fornita nel testo di Analisi funzionale di K. YOSIDA [17].

L'esigenza di introdurre le *funzioni generalizzate* o *distribuzioni* nasce dal fatto che la modellazione matematica porta ad analizzare funzioni e campi che, potendo essere discontinui, non sono in generale derivabili nel senso classico.

Le distribuzioni godono, come si vedrà, della magica proprietà di essere indefinitamente derivabili. Esse consentono una trattazione matematica unitaria dei problemi con discontinuità.

1.1. Notazione multi-indiciale

Sia Ω un dominio di uno spazio euclideo di dimensione d. Un multi-indice p è una lista $p = \{p_1, \ldots, p_d\}$ di ordine d le cui componenti sono numeri interi.

Si adotta l'usuale notazione abbreviata

$$|\,p\,| := \sum_{i=1}^{d} p_i \quad , \quad D^p := \frac{\partial^{|\,p\,|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_d^{p_d}} \,.$$

Ad esempio, nel caso di un dominio bidimensionale, si ha che $d = 2$ e ponendo rispettivamente $p = \{2,0\}$, $p = \{1,1\}$, $p = \{0,2\}$ risulta $|\,p\,| = p_1 + p_2 = 2$, e si ottengono gli operatori alle derivate parziali del secondo ordine

$$D^{\{2,0\}} := \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} \,, \quad D^{\{1,1\}} := \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2} \,, \quad D^{\{0,2\}} := \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} \,.$$

Si consideri ora un campo vettoriale $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^m(\overline{\Omega})$ di dimensione n con componenti $\{v^\alpha \,;\, \alpha = 1, \ldots, n\}$ sul dominio d-dimensionale Ω.

---

[43] SERGEI LVOVICH SOBOLEV (1908-1989). Matematico russo allievo di SMIRNOV e membro della Accademia Sovietica delle Scienze.

[44] LAURENT SCHWARTZ (1915-). Professore di matematica all'École Polythecnique.

Si definisca quindi il multi-indice vettoriale di dimensione n

$$\mathbf{p} = \{p^\alpha \ ; \ \alpha = 1, \ldots, n\} \quad \text{dove} \quad p^\alpha = \{p_1^\alpha, \ldots, p_d^\alpha\}.$$

Le relazioni $|\,\mathbf{p}\,| = m$ e $|\,\mathbf{p}\,| \le m$ vanno allora intese per componenti

$$|\,\mathbf{p}\,| = m \iff |\,p^\alpha\,| = m\,, \quad \{\alpha = 1, \ldots, n\}\,,$$

$$|\,\mathbf{p}\,| \le m \iff |\,p^\alpha\,| \le m\,, \quad \{\alpha = 1, \ldots, n\}\,.$$

Si definiscano infine nello spazio $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})^n$ le seguenti nozioni.

- La seminorma

$$|\,\mathbf{u}\,|_m^2 := \sum_{|\,\mathbf{p}\,|=m} \int_\Omega |\,D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x})\,|^2 \, \mathrm{d}\mu\,.$$

- La norma

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_m^2 := \sum_{|\,\mathbf{p}\,|\le m} \int_\Omega |\,D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x})\,|^2 \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{m} |\,\mathbf{u}\,|_k^2\,,$$

dove

$$|\,D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x})\,|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} |\,D^{p^\alpha} u^\alpha(\mathbf{x})\,|^2\,.$$

1.2. Funzioni di prova

La definizione di funzione generalizzata, o distribuzione, viene effettuata considerando i campi scalari $\phi \in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)$ indefinitamente derivabili in $\overline{\Omega}$, ciascuno dei quali è nullo al di fuori di un compatto $\overline{\mathcal{P}}_\phi$ contenuto in Ω.

I campi $\phi \in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)$ sono detti a *supporto compatto* nell'aperto Ω.

Il *supporto* di una funzione $f : \Omega \mapsto \Re$ è per definizione

- la chiusura dell'insieme $\{\mathbf{x} \in \Omega \ : \ f(\mathbf{x}) \neq 0\}$, ovvero
- il complemento del più grande aperto su cui f si annulla.

Per dare la definizione di distribuzione è necessario dotare lo spazio $\mathrm{C}_o^\infty(\Omega)$ di una topologia e cioè di una nozione di convergenza.

Si denota con $\mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni di $\mathrm{C}_o^\infty(\Omega)$ con supporto contenuto nel compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$.

La nozione di convergenza in $\mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ è definita come convergenza delle funzioni e di tutte le loro derivate in senso uniforme in $\mathcal{K}$.

Si dice quindi che una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni di $\mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ tende ad una funzione $\varphi \in \mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \iff \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{K}} |\, D^p\varphi_n(\mathbf{x}) - D^p\varphi(\mathbf{x})\,| \to 0 \quad \forall\,|\,p\,| < \infty.$$

Si denota inoltre con $\mathbb{D}(\Omega)$ lo spazio $\mathrm{C}_o^\infty(\Omega)$ dotato della seguente definizione di convergenza.

- Una successione $\{\varphi_h\}$ di funzioni di $\mathbb{D}(\Omega)$ tende a zero

  $$\lim_{h\to\infty} \varphi_h = 0$$

  se accade che
- il supporto delle funzioni $\{\varphi_h\}$ è definitivamente contenuto in un compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$,
- per ogni operatore differenziale D^p, la successione $\{\varphi_h\}$ converge a zero uniformemente in $\mathcal{K}$.

1.3. Distribuzioni

Si può quindi dare la definizione di distribuzione.

- Una *distribuzione* in Ω è un funzionale lineare $\mathbb{T}$ continuo sui campi, scalari, vettoriali o tensoriali di $\mathbb{D}(\Omega)$.

La condizione di continuità di una distribuzione su $\mathbb{D}(\Omega)$ consiste nel richiedere che

- per ogni compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$ esiste una costante c ed un intero k tali che

$$\boxed{|\,\langle\, \mathbb{T}\,,\, \varphi\,\rangle\,| \le c \sup_{|\,p\,|\le k,\mathbf{x}\in\mathcal{K}} |\, D^p\varphi(\mathbf{x})\,| \quad \forall\,\varphi \in \mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega).}$$

- L'insieme delle distribuzioni in Ω forma uno spazio vettoriale $\mathbb{D}'(\Omega)$.

Se $f \in \mathbb{D}(\Omega)$ e $\mathbb{T} \in \mathbb{D}'(\Omega)$ il *prodotto* $f\,\mathbb{T}$ è la distribuzione definita da

$$\boxed{\langle\, f\,\mathbb{T}\,,\,\phi\,\rangle := \langle\,\mathbb{T}\,,\,f\phi\,\rangle \quad \forall\,\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,.}$$

La convergenza di una successione di distribuzioni $\mathbb{T}_n \in \mathbb{D}'(\Omega)$ significa che

$$\mathbb{T}_n \to \mathbb{T} \quad \text{in} \quad \mathbb{D}'(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\,\mathbb{T}_n\,,\,\varphi\,\rangle \to \langle\,\mathbb{T}\,,\,\varphi\,\rangle \quad \forall\,\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,.$$

Si dimostra infatti che, se il limite di $\langle\,\mathbb{T}_n\,,\,\varphi\,\rangle$ esiste ed è finito per ogni $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$, tale limite è lineare e continuo in $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$ e pertanto è una distribuzione.

E' facile verificare che la convergenza di una successione in $\mathcal{L}^2(\Omega)$, in senso forte o debole, implica quella nel senso delle distribuzioni. Si ha infatti che

Proposizione 1.1. Convergenza distribuzionale. *La convergenza di una successione in $\mathcal{L}^2(\Omega)$, in senso forte o debole, implica quella nel senso delle distribuzioni.*

Dim. Sia $f_n \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ una successione debolmente convergente ad un elemento $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ e cioè tale che

$$\langle\, f_n\,,\,\mathbf{v}\,\rangle \to \langle\, f\,,\,\mathbf{v}\,\rangle \quad \forall\,\mathbf{v} \in \mathcal{L}^2(\Omega)\,.$$

Ponendo $\mathbf{v} = \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$ si ha allora

$$\langle\,\mathbb{T}_{f_n}\,,\,\varphi\,\rangle \to \langle\,\mathbb{T}_f\,,\,\varphi\,\rangle \quad \forall\,\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,,$$

che è la convergenza nel senso delle distribuzioni. La convergenza forte in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ implica quella debole in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ e quindi quella nel senso delle distribuzioni. □

Si ricordi che un campo scalare f su Ω è *localmente integrabile*, e si scrive $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$, se per ogni compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$ risulta

$$\int_{\mathcal{K}} |\,f(\mathbf{x})\,|\;\mathrm{d}\mu < \infty\,.$$

Ad ogni campo f localmente integrabile su Ω si associa una distribuzione $\mathbb{T}_f$ definita da

$$\boxed{\langle\,\mathbb{T}_f\,,\,\varphi\,\rangle := \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\;\mathrm{d}\mu \qquad \forall\,\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,.}$$

La continuità di $\mathbb{T}_f : \mathbb{D}(\Omega) \mapsto \Re$ è conseguenza della diseguaglianza

$$|\,\langle\,\mathbb{T}_f\,,\,\varphi\,\rangle\,| = \left|\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\;\mathrm{d}\mu\right| \le \int_{\Omega} |\,f(\mathbf{x})\,|\,|\,\varphi(\mathbf{x})\,|\;\mathrm{d}\mu \le$$

$$\le \int_{\mathcal{K}} |\,f(\mathbf{x})\,| \left(\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{K}} |\,\varphi(\mathbf{x})\,|\right) \mathrm{d}\mu \quad \forall\,\varphi \in \mathbb{D}_{\mathcal{K}}(\Omega).$$

- E' usuale identificare il campo f e la distribuzione $\mathbb{T}_f$.

Ciò è lecito in quanto per un campo $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ vale l'implicazione

$$\boxed{\mathbb{T}_f = 0 \;\Rightarrow\; f = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega\,.}$$

Una dimostrazione generale applicabile ad arbitrarie funzioni localmente integrabili può essere trovata in [17].

Una distribuzione è detta di *quadrato integrabile* su Ω se esiste un campo f di quadrato integrabile su Ω che la rappresenta, in accordo alla formula

$$\boxed{\langle\, \mathbb{T}_f \,,\, \varphi \,\rangle \;:=\int_\Omega f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\;\mathrm{d}\mu \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,.}$$

Si dà ora la definizione di restrizione di una distribuzione.

- La *restrizione* della distribuzione $\mathbb{T} \in \mathbb{D}'(\Omega)$ ad un dominio $\mathcal{P} \subseteq \Omega$ è la distribuzione $\mathbb{T}|_{\mathcal{P}} \in \mathbb{D}'(\mathcal{P})$ definita da

$$\boxed{\mathbb{T}|_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\varphi}) \;:= \mathbb{T}(\boldsymbol{\varphi})\,, \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{D}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{D}(\Omega)\,.}$$

2. DERIVATE GENERALIZZATE

Si vuole ora dare la definizione di derivata di una distribuzione. Tale definizione è quella che ha motivato l'introduzione stessa del concetto di distribuzione.

Si consideri dapprima una distribuzione $\mathbb{T}_f$ associata ad un campo scalare f localmente integrabile su Ω .

L'idea è quella di far ricorso alla formula di integrazione per parti per spostare l'operazione di derivazione dal campo scalare f sui campi scalari $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_o(\Omega)$ che sono indefinitamente derivabili.

Il carattere locale dell'operazione di derivazione si conserva in quanto i campi scalari $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_o(\Omega)$ hanno supporti compatti contenuti nell'aperto Ω .

Pertanto nella formula di integrazione per parti i valori al contorno del campo f su $\partial\Omega$ non compaiono.

La derivata $D^p\mathbb{T}_f$ della distribuzione $\mathbb{T}_f$ associata ad un campo f localmente integrabile su Ω, detta *derivata generalizzata* o *derivata distribuzionale* di f, viene quindi definita da

$$\boxed{\langle\, D^p\mathbb{T}_f\,,\,\varphi\,\rangle\ :=\ (-1)^{|p|}\int_{\mathcal{P}} f(\mathbf{x})\,D^p\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu\qquad\forall\,\varphi\in\mathbb{D}(\Omega)\,.}$$

E' importante ossservare che quando il campo f è di classe $\mathrm{C}^1(\Omega)$ si ha

$$\langle\, D^p\mathbb{T}_f\,,\,\varphi\,\rangle\ :=\ -\int_{\mathcal{P}} f(\mathbf{x})\,D^p\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{P}} D^p f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu\qquad\forall\,\varphi\in\mathbb{D}(\Omega)\,.$$

Risulta pertanto $\langle\, D^p\mathbb{T}_f\,,\,\varphi\,\rangle = \langle\, \mathbb{T}_{D^p f}\,,\,\varphi\,\rangle$ e, in virtù dell'identificazione tra f e $\mathbb{T}_f$, la derivata distribuzionale coincide con quella usuale.

In generale la derivata $D^p\mathbb{T}$ di un'arbitraria distribuzione $\mathbb{T}$ è definita dalla formula

$$\boxed{\langle\, D^p\mathbb{T}_f\,,\,\varphi\,\rangle\ :=\ (-1)^{|p|}\,\langle\,\mathbb{T}\,,\,D^p\varphi\,\rangle\qquad\forall\,\varphi\in\mathbb{D}(\Omega)\,.}$$

Se p_1 and p_2 sono due multi-indici e $p = p_1 + p_2$ si pone:

$$\langle\, D^p\mathbb{T}\,,\,\varphi\,\rangle\ := \langle\, D^{p_1}D^{p_2}\mathbb{T}\,,\,\varphi\,\rangle = \langle\, D^{p_2}D^{p_1}\mathbb{T}\,,\,\varphi\,\rangle\,.$$

Una distribuzione $\mathbb{T}$ su Ω è pertanto indefinitamente differenziabile nel senso delle distribuzioni.

La prossima proposizione mostra che il gradiente distribuzionale ha grafico chiuso nello spazio prodotto $\mathcal{L}^2(\Omega)\times\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Proposizione 2.1. Chiusura del grafico del gradiente distribuzionale. *Il gradiente distribuzionale* $\mathrm{grad}\,:\mathcal{L}^2(\Omega)\mapsto\mathcal{L}^2(\Omega)^d$ *con* $\mathrm{dom}\,\mathrm{grad}\,=H^1(\Omega)$ *è un operatore lineare con grafico chiuso.*

Dim. Si consideri una successione $\{\mathbf{u}_n\}\subset\mathcal{L}^2(\Omega)$ convergente a $\mathbf{u}\in\mathcal{L}^2(\Omega)$ e tale che i gradienti distribuzionali $\{\,\mathrm{grad}\,\mathbf{u}_n\}$ convergano ad un $\mathbf{g}\in\mathcal{L}^2(\Omega)^d$. Si ha dunque che

$$\|\,\mathbf{u}_n-\mathbf{u}\,\|_0\to 0\,,\quad \|\,\mathrm{grad}\,\mathbf{u}_n-\mathbf{g}\,\|_0\to 0\,.$$

Poichè $\mathbf{u}\in\mathrm{dom}\,\mathrm{grad}$ si tratta di dimostrare che $\mathbf{g}=\mathrm{grad}\,\mathbf{u}$.

La proposizione 1.1 assicura che la convergenza in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ implica quella nel senso delle distribuzioni. Si ha quindi che

$$\|\,\mathbf{u}_n-\mathbf{u}\,\|_0\to 0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\mathbb{T}_{\mathbf{u}_n}\to\mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\\[2ex] \mathrm{grad}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}_n}\to\ \mathrm{grad}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\end{cases}$$

$$\|\,\mathrm{grad}\,\mathbf{u}_n-\mathbf{g}\,\|_0\to 0\ \Rightarrow\ \mathrm{grad}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}_n}\to\mathbb{T}_{\mathbf{g}}\,.$$

L'unicità del limite in $\mathbb{D}'$ implica che $\mathbf{g}=\ \mathrm{grad}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}}=\ \mathrm{grad}\,\mathbf{u}$ e pertanto l'operatore grad ha grafico chiuso. $\square$

Il risultato della proposizione 2.1 si estende a qualsiasi operatore differenziale distribuzionale.

2.1. Impulsi e dipoli

Un fondamentale esempio di distribuzione è fornito dalla *delta* di DIRAC [45] introdotta dal fisico PAUL DIRAC intorno al 1930.

La funzione *delta* ha innumerevoli applicazioni in fisica matematica ed ha posto ai matematici il problema di una generalizzazione del concetto di funzione.

La distribuzione di DIRAC $\mathbb{T}_{\delta_{\mathbf{x}}}$, denotata anche semplicemente con $\delta_{\mathbf{x}}$, è definita come un campionatore che ad ogni campo scalare $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$ associa il valore che esso assume in un punto $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\delta_{\mathbf{x}}(\varphi) = \mathbb{T}_{\delta_{\mathbf{x}}}(\varphi) := \varphi(\mathbf{x}).$$

Se $\Re$ è l'asse reale, la distribuzione di DIRAC nel punto x si ottiene come derivata distribuzionale della funzione *gradino* unitario di HEAVISIDE [46] (1899)

$$H_x(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi \geq x\,, \\ 0, & \text{se } \xi < x\,. \end{cases}$$

Infatti risulta

$$(D^1 H_x)(\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H_x(\xi) D^1\varphi(\xi)\ \mathrm{d}\xi = -\int_{x}^{+\infty} D^1\varphi(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \varphi(x)$$

e cioè $\boxed{\delta_x = D^1 H_x\,.}$

[45] PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902-1984). Nato in Inghilterra da padre svizzero. Nel 1926 conseguì il Ph.D. a Cambridge con una tesi dal titolo *Quantum mechanics*. Ebbe quindi contatti con i maggiori fisici dell'epoca, a Copenhagen con NIELS BOHR, a Göttingen con ROBERT OPPENHEIMER, MAX BORN, JAMES FRANCK, IGOR TAMM, a Leiden con EHRENFEST. Fu eletto Fellow del St John's College di Cambridge nel 1927 e della Royal Society nel 1930. Nel 1933 ricevette il Premio Nobel per la Fisica insieme a SCHRÖDINGER. DIRAC ha ricevuto innumerevoli riconoscimenti per i suoi contributi alla meccanica quantistica ed a molti altri campi della fisica.

[46] OLIVER HEAVISIDE (1850-1925). Geniale scienziato che da giovane telegrafista fu affascinato dall'opera di MAXWELL sull'elettromagnetismo. Ad HEAVISIDE è dovuta la scrittura sintetica delle equazioni di MAXWELL sull'elettromagnetismo. Previde l'esistenza della zona conduttiva nell'atmosfera ora nota come fascia di HEAVISIDE. Insieme all'americano JOSIAH WILLARD GIBBS (1839-1903) sviluppò il calcolo vettoriale privilegiandolo a quello dei quaternioni. Ideò inoltre un originale *calcolo operazionale* per la soluzioni algebrica delle equazioni differenziali ordinarie.

La distribuzione di DIRAC è detta anche un *impulso unitario* concentrato nel punto $x \in \Re$. Derivando a sua volta la distribuzione di DIRAC si ottiene la distribuzione

$$(D^1\delta_x)(\varphi) = -\,\delta_x\,(D^1\varphi) = -D^1\varphi(x)$$

che è detta un *dipolo* unitario concentrato nel punto x. La distribuzione $D^1\delta_x$ associa ad ogni scalare $\varphi \in \mathbb{D}(\Re)$ la sua derivata nel punto $x \in \Re$.

Analogamente si definiscono i dipoli di ordine superiore.

Impusi e dipoli concentrati sono comunemente considerati in meccanica ad esempio quando su una struttura monodimensionale vengono applicate in punti discreti forze o coppie concentrate ovvero distorsioni angolari o di scorrimento relativo.

VIII – PROBLEMI AL CONTORNO

Gli spazi di SOBOLEV [47] costituiscono l'ambiente lineare idoneo a trattare le questioni di esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni dei problemi differenziali lineari. In vista delle applicazioni che saranno sviluppate, si tratteranno soltanto gli spazi di SOBOLEV in cui la norma è una media quadratica e che pertanto sono spazi di HILBERT.

1. SPAZI DI SOBOLEV

Nel seguito per *insieme aperto regolare* si intenderà un aperto la cui frontiera è una varietà differenziabile sufficientemente regolare per garantire la validità dei risultati.

1.1. Spazi di Beppo Levi e di Sobolev

Nello spazio $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})^n$ normato con $\|\cdot\|_m$ si consideri l'insieme delle successioni $\{\mathbf{u}_n\}$ che soddisfano il criterio di convergenza di CAUCHY e cioè tali che

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_k\|_m = 0\,.$$

Si effettui quindi un'operazione detta di *completamento dello spazio* che consiste nel costruire un nuovo spazio vettoriale $H^m(\Omega)$ i cui elementi sono classi di equivalenza di successioni di CAUCHY definite dalla relazione

$$\{\mathbf{u}_n\} \equiv \{\mathbf{v}_n\} \iff \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n\|_m = 0\,.$$

In una successione di CAUCHY la norma degli elementi è convergente in quanto

$$\Big|\, \|\mathbf{u}_n\|_m - \|\mathbf{u}_k\|_m \,\Big| \le \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_k\|_m .$$

Ciò consente di definire nello spazio $H^m(\Omega)$ la norma

$$\|\{\mathbf{u}_n\}\|_m = \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{u}_n\|_m\,.$$

[47] SERGEI LVOVICH SOBOLEV (1908-1989). Matematico russo nativo di San Pietroburgo, allievo di SMIRNOV e membro dell'Accademia Sovietica delle Scienze. SOBOLEV ha portato contributi importanti alla soluzione di difficili problemi retti da equazioni alle derivate parziali. Fu eletto membro della Académie des Sciences de France e della Accademia Nazionale dei Lincei.

Le operazioni lineari e la norma non dipendono dal rappresentante della classe di equivalenza.

Le successioni di CAUCHY convergenti ad elementi di $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})^n$ vengono identificate con essi.

Nello spazio normato $H^m(\Omega)$ le classi di equivalenza di successioni di CAUCHY risultano convergenti e pertanto lo spazio $H^m(\Omega)$ è di BANACH (vedi [17] sezione I.10).

In effetti $H^m(\Omega)$ è uno spazio di HILBERT in quanto la norma è indotta dal prodotto interno

$$(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v})_m := \sum_{|\mathbf{p}|\le m} \int_\Omega D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot D^{\mathbf{p}}\mathbf{v}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mu\,.$$

- Gli spazi di HILBERT $H^m(\Omega)$ sono detti *spazi di* BEPPO LEVI.

Analogamente i completamenti di $\mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n$ e di $\mathrm{C}^m(\Omega)^n$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_m$ definiscono gli spazi di HILBERT

- $H_o^m(\Omega)$ completamento di $\left\{\mathbf{u} \in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n \;:\; \|\mathbf{u}\|_m < +\infty\right\}$,
- $H^m(\Omega)$ completamento di $\left\{\mathbf{u} \in \mathrm{C}^m(\Omega)^n \;:\; \|\mathbf{u}\|_m < +\infty\right\}$.

E' possibile introdurre gli spazi $H^m(\Omega)$ con una definizione alternativa fondata sulla teoria delle distribuzioni.

Tale definizione riveste particolare importanza nelle applicazioni ed è dovuta a S. L. SOBOLEV [3] che l'ha formulata nel 1938.

Nel caso di domini regolari, essa coincide con la definizione fondata sul completamento.

Si osservi preliminarmente che ogni funzione $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ di quadrato integrabile secondo LEBESGUE in un dominio Ω, e cioè tale che

$$\int_\Omega |\, f(\mathbf{x})\,|^2\, \mathrm{d}\mu < +\infty\,,$$

risulta integrabile in Ω e quindi *a fortiori* localmente integrabile in Ω.

Infatti se $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ la diseguaglianza di SCHWARTZ fornisce

$$\int_\Omega |\, f(\mathbf{x})\,|\, \mathrm{d}\mu \le (\mathrm{meas}\,\Omega)^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |\, f(\mathbf{x})\,|^2\, \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty\,,$$

dove $\mathrm{meas}\,\Omega$ è la misura del dominio Ω.

Quindi per ogni $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ il funzionale

$$\mathbb{T}_f(\varphi) := \int_\Omega f(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, d\mu \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,,$$

è una distribuzione.

La distribuzione $\mathbb{T}_f$ individua univocamente la funzione $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ in quanto se $\mathbb{T}_f$ è nulla allora $f = 0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ e quindi f è nulla q.o. in Ω.

Ciò consente di identificare la distribuzione $\mathbb{T}_f$ e la funzione $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

La p-derivata di una funzione di quadrato integrabile $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ viene quindi definita come segue.

- La p-derivata di $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ è la p-derivata distribuzionale $D^p\mathbb{T}_f$ della distribuzione $\mathbb{T}_f$ associata a f.

Se la distribuzione $D^p\mathbb{T}_f$ può essere identificata con una funzione di quadrato integrabile $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, e cioè se

$$\langle\, D^p\mathbb{T}_f\,,\, \varphi\,\rangle = \langle\, \mathbb{T}_g\,,\, \varphi\,\rangle := \int_\Omega g(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x}) \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)\,,$$

si scrive che

$$D^p f = D^p\mathbb{T}_f = g\,,$$

e si dice che la p-derivata $D^p f$ di f è di quadrato integrabile in Ω. La funzione $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ se esiste è unica.

Si dà ora la definizione di spazio di SOBOLEV.

- Un campo di n-vettori su Ω appartiene allo *spazio di* SOBOLEV $W^m(\Omega)^n$ se è di quadrato integrabile su Ω insieme alle sue $\mathbf{p}$-derivate distribuzionali di ordine $|\,\mathbf{p}\,| \le m$.

Lo spazio di SOBOLEV $W^m(\Omega)^n$ è dotato del prodotto interno

$$(\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\,)_m := \sum_{|\,\mathbf{p}\,|\le m} \int_\Omega D^{\mathbf{p}}\mathbb{T}_{\mathbf{u}} \cdot D^{\mathbf{p}}\mathbb{T}_{\mathbf{v}}\, d\mu\,, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}\,,$$

e quindi della corrispondente norma

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_m := \sqrt{(\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{u}\,)_m} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{H}\,.$$

La completezza dello spazio $\mathcal{L}^2(\Omega)$ implica che lo spazio $W^m(\Omega)^n$ è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma $\| \cdot \|_m$ e dunque che $W^m(\Omega)^n$ è uno spazio di HILBERT.

Le derivate distribuzionali delle funzioni di $\mathrm{C}^m(\Omega)$ coincidono con quelle classiche e pertanto il sottospazio

$$S := \left\{ \mathbf{u} \in \mathrm{C}^m(\Omega) \; : \; \| \mathbf{u} \|_m < +\infty \right\},$$

appartiene a $W^m(\Omega)^n$.

Poichè $W^m(\Omega)^n$ è completo esiste un isomorfismo isometrico tra $H^m(\Omega)^n$, che è il completamento di S, e la chiusura di S in $W^m(\Omega)^n$. Identificando $H^m(\Omega)^n$ con tale chiusura si può concludere che

$$H^m(\Omega)^n \subseteq W^m(\Omega)^n .$$

Un teorema di N. MEYERS e J. SERRIN [8] mostra che tale inclusione è una eguaglianza e cioè per ogni dominio Ω si ha che

$$H^m(\Omega)^n = W^m(\Omega)^n .$$

La dimostrazione è riportata in [18] teorema 3.16.

La proprietà di continuità dei campi vettoriali di uno spazio di SOBOLEV $H^m(\Omega)^n$ possono essere dedotte dal seguente classico risultato.

Proposizione 1.1. Lemma di Sobolev. *Si consideri un dominio Ω regolare e limitato nello spazio euclideo d-dimensionale $\mathcal{E}^d$ con $m > d/2$. Vale allora la diseguaglianza*

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} | \mathbf{u}(\mathbf{x}) | \leq \; c \, \| \mathbf{u} \|_m , \quad \forall \, \mathbf{u} \in \mathrm{C}^m(\overline{\Omega}) .$$

I campi vettoriali di $H^m(\Omega)$ sono pertanto continui su $\overline{\Omega}$ con tutte le derivate fino all'ordine k-esimo, cioè

$$H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) ,$$

purchè sia soddisfatta la diseguaglianza stretta

$$k < m - \frac{d}{2} ,$$

dove

- *k è l'ordine massimo delle derivate continue,*
- *m è l'esponente dello spazio di* SOBOLEV *$H^m(\Omega)$,*
- *d è la dimensione dello spazio euclideo $\mathcal{E}^d$.*

Dim. Una sintetica dimostrazione della diseguaglianza è riportata nell'articolo di FICHERA [14].

In virtù di tale diseguaglianza ogni successione in $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ che è di CAUCHY nella norma di $H^m(\Omega)$ è anche di CAUCHY nella norma uniforme

$$\|\mathbf{u}\|_\infty := \sup_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|.$$

La successione convergerà pertanto puntualmente ed uniformemente ad un campo vettoriale continuo che è il limite della successione nella norma di $H^m(\Omega)$. □

Il seguente principio, dovuto a F. RELLICH [48], fornisce un fondamentale risultato di compattezza nella teoria gli spazi di SOBOLEV.

Proposizione 1.2. Principio di selezione di Rellich. *Sia Ω un dominio regolare e limitato nello spazio euclideo d-dimensionale $\mathcal{E}^d$. L'immersione di $H^m(\Omega)$ in $H^{m-1}(\Omega)$ è compatta. Da ogni successione limitata in $H^m(\Omega)$ se ne può estrarre quindi una convergente in $H^{m-1}(\Omega)$.* □

1.2. Operatori ellittici e soluzioni deboli

Si presenta ora un risultato fondamentale concernente le soluzioni deboli di un sistema di equazioni differenziali.

A tal fine si premettono le seguenti definizioni.

Sia $\mathbf{L}$ un operatore differenziale lineare di ordine ν operante su campi vettoriali a valori in uno spazio di dimensione n definito da

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{p}|\le\nu} \mathbf{A}_\mathbf{p}(\mathbf{x})\, D^\mathbf{p}\mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

dove $\mathbf{A}_\mathbf{p}(\mathbf{x})$ sono campi regolari di matrici $n\times n$ in Ω.

- La *parte principale* $\mathbf{L}_o$ di $\mathbf{L}$ è quella che coinvolge le sole derivate di ordine massimo
$$\mathbf{L}_o\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{p}|=\nu} \mathbf{A}_\mathbf{p}(\mathbf{x})\, D^\mathbf{p}\mathbf{u}(\mathbf{x}).$$
- L'operatore differenziale **L** è detto *ellittico* se
$$\det \sum_{|\mathbf{p}|=\nu} \mathbf{A}_\mathbf{p}(\mathbf{x})\, \boldsymbol{\xi}^\mathbf{p} \neq 0,$$
per ogni d-vettore $\boldsymbol{\xi}$ e in ogni punto $\mathbf{x}\in\Omega$.

[48] FRANZ RELLICH (1906-1955). Matematico nato nel Sudtirolo, allievo di COURANT e professore di matematica all'Università di Göttingen.

- L'operatore *aggiunto formale* $\mathbf{L}^*$ di $\mathbf{L}$, definito da

$$\mathbf{L}^*\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{p}|\leq\nu} (-1)^{|\mathbf{p}|} D^{\mathbf{p}}\big(\mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\,\mathbf{u}(\mathbf{x})\big)\,,$$

soddisfa l'identità

$$\int_\Omega \mathbf{L}\,\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{L}^*\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\,,\quad \forall\,\boldsymbol{\phi}\in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n\,.$$

Si noti che se le matrici dei coefficienti $\mathbf{A}_{\mathbf{p}}$ sono costanti le parti principali degli operatori $\mathbf{L}$ e del suo aggiunto formale $\mathbf{L}^*$ sono le stesse. Ne segue che $\mathbf{L}$ risulta ellittico solo se lo è $\mathbf{L}^*$.

L'operatore aggiunto consente di definire l'operatore differenziale distribuzionale associato ad $\mathbf{L}$

$$(\mathbf{L}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}})(\boldsymbol{\phi}) := \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{L}^*\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\,,\quad \forall\,\boldsymbol{\phi}\in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n\,.$$

Un campo vettoriale $\mathbf{u}\in L^2(\Omega)^n$ costituisce una *soluzione debole* del sistema differenziale

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\,,$$

con $\mathbf{f}\in L^2(\Omega)^n$ se risulta

$$(\mathbf{L}\,\mathbb{T}_{\mathbf{u}}) = \mathbb{T}_{\mathbf{f}}\,,$$

e cioè

$$\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{L}^*\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\,,\quad \forall\,\boldsymbol{\phi}\in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n\,.$$

Sussiste la seguente fondamentale proprietà.

Proposizione 1.3. Sistemi differenziali ellittici. *Sia* $\mathbf{u}$ *una soluzione debole del sistema differenziale ellittico* $\mathbf{Lu}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *di ordine* ν. *Allora se* $\mathbf{f}\in H^m(\Omega)^n$ *si ha che* $\mathbf{u}\in H^{m+\nu}(\Omega)^n$ *in quanto risulta*

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_{m+\nu} \leq c_E\,\|\,\mathbf{f}\,\|_m.$$

Tale risultato può essere enunciato dicendo che la soluzione debole è ν *volte più regolare dei dati.* □

Grazie alle proposizioni 1.1 e 1.3 si perviene al seguente risultato concernente le proprietà di continuità della soluzione di un sistema ellittico.

Proposizione 1.4. Regolarità della soluzione. *Sia* $\mathbf{u}$ *una soluzione debole del sistema ellittico* $\mathbf{Lu}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *di ordine* ν. *Allora se* $\mathbf{f}\in H^m(\Omega)^n$ *con* $m > d/2$ *si ha che* $\mathbf{u}\in \mathcal{C}^\nu(\overline{\Omega})^n$ *e dunque* $\mathbf{u}$ *è una soluzione in senso classico. In particolare se* $\mathbf{f}\in C^\infty(\overline{\Omega})^n$ *allora* $\mathbf{u}\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^n$.

Dim. In virtù della proposizione 1.3 si ha che $\mathbf{u} \in H^{m+\nu}(\Omega)^n$. La proposizione 1.1 assicura che $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^n$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\nu(\overline{\Omega})^n$. Pertanto, invocando l'identità di GAUSS-GREEN risulta

$$\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L}^* \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{L}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \,,$$

per ogni $\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{C}_o^\infty(\Omega)^n$. Per la continuità di $\mathbf{Lu}$ e di $\mathbf{f}$ il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni stabilisce che $\mathbf{Lu} = \mathbf{f}$. □

Ecco una conseguenza della proposizione 1.4.

Proposizione 1.5. Nucleo del gradiente. *Sia Ω un aperto regolare e limitato in $\mathcal{E}^d$ ed $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Allora la distribuzione $\mathbb{T}_f \in \mathbb{D}'(\Omega)$ ha gradiente nullo se e solo se f è eguale ad una costante in ogni componente connessa di Ω.*

Dim. Per definizione si ha che

$$\langle \operatorname{grad} \mathbb{T}_f \,, \mathbf{v} \rangle := -\langle \mathbb{T}_f \,, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle = -\int_\Omega f \operatorname{div} \mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{D}(\Omega)^d \,,$$

e quindi, ponendo $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$, la condizione $\operatorname{grad} \mathbb{T}_f = \mathbf{o}$ implica che

$$\langle \operatorname{grad} \mathbb{T}_f \,, \operatorname{grad} \varphi \rangle = -\int_\Omega f \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Omega) \,.$$

L'operatore differenziale $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ è ellittico e quindi l'equazione differenziale $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0$ ha soluzione debole $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Dunque $\operatorname{grad} f = \mathbf{o}$ vale in senso classico e pertanto f è costante in ogni componente connessa di Ω. □

In modo analogo si dimostra il seguente importante risultato.

Proposizione 1.6. Nucleo della parte simmetrica del gradiente. *Sia Ω un aperto regolare e limitato in $\mathcal{E}^d$ ed $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)^3$.*
Allora la distribuzione vettoriale $\mathbb{T}_\mathbf{u} \in [\mathbb{D}(\Omega)']^3$ ha parte simmetrica del gradiente nulla se e solo se $\mathbf{u}$ è un polinomio di primo grado in ogni componente connessa di Ω. Ciò equivale a richiedere che il gradiente sia un tensore antisimmetrico e costante in ogni componente connessa di Ω.

$$\boxed{\operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{u} = \mathbf{O} \iff \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{\Omega}\,[\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \,, \quad \mathbf{\Omega}^T = -\mathbf{\Omega} \,.}$$

Dim. La dimostrazione segue dall'osservare che

$$\langle\ \mathrm{div\ sym\ grad}\, \mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\ \mathbf{w}\ \rangle = -\langle\ \mathrm{sym\ grad}\, \mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\ \mathrm{grad}\, \mathbf{w}\ \rangle =$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot\ \mathrm{div\ grad}\, \mathbf{w} = 0\,, \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathbb{D}(\Omega)^3\,.$$

In virtu della proposizione 1.4 l'ellitticità dell'operatore differenziale div grad implica che la soluzione debole $\mathbf{u}$ è di classe $\mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$.

Allora un risultato classico mostra che

$$\mathrm{sym\ grad}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{O} \ \Rightarrow\ \mathrm{grad\ grad}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{O} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega\,,$$

(vedi [21] cap. III.7 oppure [28] cap. I, prop. 5.2).

Dunque $\mathrm{grad}\, \mathbf{u}$ è costante in ogni componente connessa di Ω e quindi $\mathbf{u}$ è un polinomio di primo grado.

La condizione $\mathrm{sym\ grad}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{O}$ implica infine che $\mathbf{\Omega} = \mathrm{grad}\, \mathbf{u}$ è un tensore antisimmetrico costante in ogni componente connessa di Ω. □

2. VALORI AL CONTORNO

I *problemi di valori al contorno* sono basati sulla definizione dei valori al contorno dei campi vettoriali $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)$.

Poichè i campi $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)$ non sono necessariamente continui in $\overline{\Omega}$ è essenziale dare un significato ai loro valori al contorno.

Tale problematica è l'oggetto d'indagine della *teoria delle tracce*. Si forniranno qui le idee principali rinviando a testi specifici per eventuali approfondimenti [9], [19].

2.1. Operatore di traccia

Si consideri un problema posto in $\Re^2$ e si denotino le coordinate con $\{x, y\}$.

Il dominio Ω sia costituito dal semispazio delle x non negative

$$\Omega = \Re^2_+ = \big\{ \{x, y\} \mid y \geq 0 \big\} \subset \Re^2\,.$$

La frontiera $\partial\Omega$ di $\Omega = \Re^2_+$ è l'asse delle x.

Sussiste il seguente risultato (vedi ad es. [22]).

Proposizione 2.1. Valori al contorno. *Sia* $\mathbf{u} \in \mathrm{C}^1_o(\Re^2)$, *una funzione continua con la derivata prima ed a supporto compatto in* $\Re^2$. *Allora vale la diseguaglianza*

$$\left[\ \int_{\Re} \mathbf{u}\,(x, 0)^2\ \mathrm{d}x\ \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \left[\ \int_{\Omega} \big[\mathbf{u}^2 + (\mathbf{u}_{,x})^2 + (\mathbf{u}_{,y})^2\,\big]\,(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \right]^{\frac{1}{2}}.$$

La virgola indica la derivata parziale e $C > 0$ *è una costante. Ponendo* $\mathbf{\Gamma u} = \mathbf{u}(x,0)$ *la diseguaglianza può riscriversi*

$$\| \mathbf{\Gamma u} \|_0 \le C \| \mathbf{u} \|_1 , \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathrm{C}^1_o(\Re^2) .$$

Dim. Posto $f(t) = t^2$ si ha

$$[\, \mathbf{u}(x,0)\,]^2 = f(\mathbf{u}(x,0)) =$$

$$= - \int_0^{+\infty} f_{,y}\,(\mathbf{u}\,(x,y))\, \mathrm{d}y = - \int_0^{+\infty} f_{,u}\,(\mathbf{u}\,(x,y))\,(\mathbf{u}_{,y}\,(x,y))\, \mathrm{d}y .$$

Essendo $f_{,u}\,(\mathbf{u}\,(x,y)) = 2\,\mathbf{u}\,(x,y)$, dalla diseguaglianza $2\,|\,a\,|\,|\,b\,| \le (a^2 + b^2)$, risulta

$$[\, \mathbf{u}(x,0)\,]^2 \le 2 \int_0^{+\infty} |\, \mathbf{u}\,(x,y)\,|\,|\, \mathbf{u}_{,y}\,(x,y)\,|\, \mathrm{d}y \le$$

$$\le \left[\int_0^{+\infty} [\, \mathbf{u}\,(x,y)\,]^2 \; \mathrm{d}y + \int_0^{+\infty} [\, \mathbf{u}_{,y}\,(x,y)\,]^2 \; \mathrm{d}y \right] .$$

La conclusione si ottiene integrando rispetto ad $x \in \Re$. $\square$

Dalla proposizione 2.1 si trae che

Proposizione 2.2. Operatore dei valori al contorno. *L'operatore lineare* $\mathbf{\Gamma} : \mathrm{C}^1_o(\Re^2) \mapsto \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$*, che associa ad ogni* $\mathbf{u}\,(x,y) \in \mathrm{C}^1_o(\Re^2)$ *il corrispondente valore al contorno* $\mathbf{u}\,(x,0) \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$*, può essere esteso per densità ad un operatore lineare limitato*

$$\mathbf{\Gamma} \in \mathrm{L}\left\{ H^1(\Omega)\,;\, \mathcal{L}^2(\partial\Omega) \right\} .$$

Dim. Sia $\mathcal{W}(\Omega)$ lo spazio delle restrizioni delle funzioni di $\mathrm{C}^1_o(\Re^2)$ a Ω.

La densità di $\mathcal{W}(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$ assicura che per ogni $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ esiste una successione $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{W}(\Omega)$ tale che $\| \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \|_1 \to 0$. Allora dalla diseguaglianza stabilita nella proposizione 2.1 si deduce che

$$C \| \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_k \|_1 \ge \| \mathbf{\Gamma u}_n - \mathbf{\Gamma u}_k \|_0 .$$

Poichè $\{\mathbf{\Gamma u}_n\} \subset \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$, la completezza di $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$ assicura che esiste un unico $\mathbf{u}_{\mathbf{\Gamma}} \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$ tale che

$$\| \mathbf{\Gamma u}_n - \mathbf{u}_{\mathbf{\Gamma}} \|_0 \to 0 .$$

Per ogni $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ si ponga allora $\mathbf{\Gamma u} = \mathbf{u}_{\mathbf{\Gamma}}$.

Ciò significa assumere quale valore al contorno di un campo $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ il limite in $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$ dei valori al contorno di una qualsiasi successione di campi $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{W}(\Omega)$ che converga in $H^1(\Omega)$ a $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$.

In virtù del principio di estensione delle eguaglianze (vedi sezione I.3.2 (p. 7)) si può concludere che

$$\| \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}_n \|_0 \leq C \| \mathbf{u}_n \|_1 , \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathrm{C}^1_o(\Omega) \;\Rightarrow\; \| \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u} \|_0 \leq C \| \mathbf{u} \|_1 , \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^1(\Omega) .$$

e quindi che l'operatore lineare $\boldsymbol{\Gamma} : H^1(\Omega) \mapsto \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$ è limitato. □

Mediante carte locali, si può estendere il risultato considerando al posto di $\Re^2_+$ un qualsiasi dominio regolare bidimensionale Ω ed al posto di $\Re$ il contorno di tale dominio. Per dimensioni maggiori di due la dimostrazione è perfettamente analoga.

In generale per uno spazio di SOBOLEV $H^m(\Omega)$ si perviene alla diseguaglianza

$$\Big(\sum_{|\,\mathbf{p}\,| \leq m-1} \int_{\partial\Omega} |\, D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \,|^2 \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/2} = \| \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u} \|_{H^{m-1}(\partial\Omega)} \leq \alpha \, \| \mathbf{u} \|_{H^m(\Omega)} .$$

L'operatore $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathrm{L}\big\{ H^m(\Omega) \,;\, H^{m-1}(\partial\Omega) \big\}$ è dunque limitato ed i campi

$$\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u} \in H^{m-1}(\partial\Omega) ,$$

sono detti *valori al contorno* dei campi $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)$.

In modo analogo si possono definire i valori al contorno per le derivate normali a $\partial\Omega$ di ordine maggiore o eguale ad uno.

- Alla derivata normale $\dfrac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial n^k}$ di ordine k, con $m > k$, si associa l'operatore lineare limitato

$$\boldsymbol{\Gamma}_k \in \mathrm{L}\big\{ H^m(\Omega), H^{m-k-1}(\partial\Omega) \big\} .$$

Sotto opportune ipotesi di regolarità del dominio Ω (vedi ad es. [16]), si può mostrare che valgono le seguenti proprietà

- $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{\Gamma}_k$ contiene lo spazio $H^{m-k}(\partial\Omega)$ per cui risulta

$$\boxed{H^{m-k}(\partial\Omega) \subset \mathrm{Im}\, \boldsymbol{\Gamma}_k \subset H^{m-k-1}(\partial\Omega) .}$$

- $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{\Gamma}_k$ può essere dotato di una topologia intermedia tra quelle di $H^{m-k}(\partial\Omega)$ e $H^{m-k-1}(\partial\Omega)$ che rende lo spazio immagine uno spazio di HILBERT denotato con $H^{m-k-1/2}(\partial\Omega)$.

L'operatore lineare limitato

$$\boldsymbol{\Gamma}_k \in \mathrm{L}\left\{ H^m(\Omega), H^{m-k-1/2}(\partial\Omega) \right\},$$

è dunque suriettivo. Risulta inoltre

$$\begin{aligned} H^1_o(\Omega) &= \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \ : \ \boldsymbol{\Gamma}_0 \mathbf{u} = \mathbf{o} \right\}, \\ H^2_o(\Omega) &= \left\{ \mathbf{u} \in H^2(\Omega) \ : \ \boldsymbol{\Gamma}_0 \mathbf{u} = \mathbf{o}\,,\ \boldsymbol{\Gamma}_1 \mathbf{u} = \mathbf{o} \right\}, \\ H^m_o(\Omega) &= \left\{ \mathbf{u} \in H^m(\Omega) \ : \ \boldsymbol{\Gamma}_0 \mathbf{u} = \mathbf{o}\,, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_{m-1} \mathbf{u} = \mathbf{o} \right\}. \end{aligned}$$

L'operatore prodotto $\boldsymbol{\Gamma} = \left\{ \boldsymbol{\Gamma}_0, \boldsymbol{\Gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_k, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_{m-1} \right\}$ è detto *operatore dei valori al contorno* o *operatore di traccia*.

Definendo lo spazio prodotto

$$\partial H^m(\Omega) := \prod_{k=0}^{m-1} H^{m-k-1/2}(\partial\Omega),$$

risulta $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathrm{L}\left\{ H^m(\Omega)\,;\, \partial H^m(\Omega) \right\}$. E' fondamentale la proprietà

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, \boldsymbol{\Gamma} = H^m_o(\Omega)\,.}$$

dove $H^m_o(\Omega)$ è il completamento dello spazio $\mathrm{C}^m_o(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$.
E' pertanto giustificato il nome di *operatore dei valori al contorno* dato a $\boldsymbol{\Gamma}$.

Come conseguenza si evince che

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, \boldsymbol{\Gamma} \quad \text{è denso in} \quad \mathcal{L}^2(\Omega)\,,}$$

in quanto tale è il sottospazio $\mathbb{D}(\Omega) \subset H^m_o(\Omega)$ (vedi ad esempio [22] teor. IX.2).

Proposizione 2.3. Spazio dei valori al contorno. *Lo spazio di* HILBERT *dei valori al contorno* $\partial H^m(\Omega)$ *è equivalente allo spazio di* HILBERT $H^m(\Omega)/\,\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\Gamma}$. *Sussiste quindi l'equivalenza*

$$\boxed{\| \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u} \|_{\partial H^m(\Omega)} \equiv \inf \left\{ \| \mathbf{v} \|_{H^m(\Omega)} \mid \mathbf{v} \in H^m(\Omega) \ : \ \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u} \right\}.}$$

Dim. L'operatore $\tilde{\mathbf{\Gamma}} \in \mathrm{L}\left\{H^m(\Omega)/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}\,;\,\partial H^m(\Omega)\right\}$ definito da

$$\boxed{\tilde{\mathbf{\Gamma}}\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}\,, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}\,,}$$

è iniettivo e suriettivo. Il teorema di BANACH, proposizione VI.3.12 (p. 108) assicura che anche l'operatore inverso $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} \in \mathrm{L}\left\{\partial H^m(\Omega)\,;\,H^m(\Omega)/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}\right\}$ è continuo e quindi che la norma nello spazio di HILBERT $\partial H^m(\Omega)$ è equivalente alla norma dello spazio di HILBERT $H^m(\Omega)/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}$. Dunque

$$C\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{H^m(\Omega)/\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}} \geq \|\,\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}\,\|_{\partial H^m(\Omega)} \geq c\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{H^m(\Omega)/\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}}\,.$$

Si conclude osservando che la norma nello spazio di HILBERT quoziente

$$H^m(\Omega)/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}$$

è definita da

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_{H^m(\Omega)/\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}} := \inf\left\{\|\,\mathbf{u}-\mathbf{v}\,\|_{H^m(\Omega)} \mid \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}\right\},$$

e cioè dalla distanza dall'origine della varietà parallela al sottospazio $\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}$ passante per $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)$. □

2.2. Formula di Green

Per semplicità la trattazione è svolta con esplicito riferimento all'operatore differenziale

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathrm{grad} : \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^3 \mapsto \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})^9\,.}$$

Se $\mathbf{u} \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^3$ è un campo vettoriale e $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^9$ è un campo tensoriale vale la classica *formula di* GREEN

$$\boxed{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}\mathbf{u}\;\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} \mathbf{B}_o^{'}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}\;\mathrm{d}\mu + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\cdot(\mathbf{\Gamma}\mathbf{u})\;\mathrm{d}\sigma\,,}$$

dove $\boxed{\mathbf{B}_o^{'} = -\,\mathrm{div}}$ è *operatore aggiunto formale* di $\mathbf{B} = \mathrm{grad}$.

Per $\mathbf{u} \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^3$ e $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^9$, si ponga

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) := \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{Bu}\, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}\mu\,.}$$

La diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ mostra che

$$\begin{aligned} \left| \,\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})\, \right| \;\le\; & \left| \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{Bu}\, \mathrm{d}\mu \right| + \left| \int_\Omega \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}\mu \right| \le \\ \le\; & \left(\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}\mu \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \mathbf{Bu} \cdot \mathbf{Bu}\, \mathrm{d}\mu \right)^{1/2} + \\ +\; & \left(\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}\mu \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}\mu \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

ovvero in forma sintetica

$$\left| \,\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})\, \right| \;\le\; \|\, \boldsymbol{\sigma} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \|\, \mathbf{Bu} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\, \mathbf{u} \,\|_{H(\Omega)} \|\, \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} \,\|_{H(\Omega)}\,.$$

Si ha poi che

$$\begin{aligned} & \Big(\|\, \mathbf{u} \,\|_{H(\Omega)} + \|\, \mathbf{Bu} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \Big) \Big(\|\, \boldsymbol{\sigma} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\, \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} \,\|_{H(\Omega)} \Big) = \\ & = \|\, \mathbf{u} \,\|_{H(\Omega)} \|\, \boldsymbol{\sigma} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\, \mathbf{Bu} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \|\, \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} \,\|_{H(\Omega)} + \\ & + \|\, \boldsymbol{\sigma} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \|\, \mathbf{Bu} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\, \mathbf{u} \,\|_{H(\Omega)} \|\, \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} \,\|_{H(\Omega)} \ge \\ & \ge \|\, \boldsymbol{\sigma} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \|\, \mathbf{Bu} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\, \mathbf{u} \,\|_{H(\Omega)} \|\, \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} \,\|_{H(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Dalle diseguaglianze

$$\begin{aligned} & \|\, \mathbf{u} \,\|_{H(\Omega)} + \|\, \mathbf{Bu} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \le \sqrt{2} \Big(\|\, \mathbf{u} \,\|^2_{H(\Omega)} + \|\, \mathbf{Bu} \,\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} \Big)^{1/2}, \\ & \|\, \boldsymbol{\sigma} \,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\, \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} \,\|_{H(\Omega)} \le \sqrt{2} \Big(\|\, \boldsymbol{\sigma} \,\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\, \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} \,\|^2_{H(\Omega)} \Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

si deduce pertanto che

$$\left| \,\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})\, \right| \;\le\; 2 \Big(\|\, \mathbf{u} \,\|^2_{H(\Omega)} + \|\, \mathbf{Bu} \,\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} \Big)^{1/2} \Big(\|\, \boldsymbol{\sigma} \,\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\, \mathbf{B}_o^{'} \boldsymbol{\sigma} \,\|^2_{H(\Omega)} \Big)^{1/2}.$$

Ne consegue che la forma bilineare $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ è continua se si dotano gli spazi $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^3$ e $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^9$ rispettivamente delle norme definite da

$$\| \mathbf{u} \|_{H_{\mathbf{B}}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}) \, d\mu \right)^{1/2} = \left(\| \mathbf{u} \|^2_{H(\Omega)} + \| \mathbf{B}\mathbf{u} \|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} \right)^{1/2},$$

$$\| \boldsymbol{\sigma} \|_{\mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{B}_o'\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}_o'\boldsymbol{\sigma}) \, d\mu \right)^{1/2} = \left(\| \boldsymbol{\sigma} \|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \| \mathbf{B}_o'\boldsymbol{\sigma} \|^2_{H(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Si considerino quindi gli spazi di Beppo Levi

- $H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ completamento di $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^3$ rispetto alla norma $\| \cdot \|_{H_{\mathbf{B}}(\Omega)}$,
- $\mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)$ completamento di $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^9$ rispetto alla norma $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)}$.

Gli spazi $H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ e $\mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)$ sono spazi di Hilbert con i prodotti interni

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_{\mathbf{B}}(\Omega)} := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mu + \int_{\Omega} \mathbf{B}\mathbf{u} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, d\mu,$$

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)} := \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \, d\mu + \int_{\Omega} \mathbf{B}_o'\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_o'\boldsymbol{\tau} \, d\mu.$$

■ La forma bilineare $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ che su $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^9 \times \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^3$, definita da

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) := \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}) \, d\sigma,$$

si estende dunque per continuità ad una forma bilineare sullo spazio prodotto $\mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega) \times H_{\mathbf{B}}(\Omega)$.

La forma bilineare estesa è ancora denotata con $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ e, valendo la diseguaglianza

$$|\, \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \,| \leq 2 \, \| \mathbf{u} \|_{H_{\mathbf{B}}(\Omega)} \| \boldsymbol{\sigma} \|_{\mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)}, \quad \forall \, \mathbf{u} \in H_{\mathbf{B}}(\Omega) \quad \forall \, \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega),$$

è limitata con norma ≤ 2.

Per $\mathbf{u} \in H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ e $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)$, vale dunque la formula di Green:

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) := \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}\mathbf{u} \, d\mu - \int_{\Omega} \mathbf{B}_o'\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \, d\mu.}$$

Osservazione 2.1. Se $\mathbf{B} =$ grad e $\mathbf{B}'_o = -$div gli spazi $H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ e $\mathcal{H}_{\mathbf{B}'_o}(\Omega)$ vengono rispettivamente denotati con i simboli $H_{\text{grad}}(\Omega)$ e $H_{\text{div}}(\Omega)$.

- Se il dominio ha una frontiera $\partial\Omega$ opportunamente regolare, lo spazio di BEPPO LEVI $H_{\text{grad}}(\Omega)$ coincide con lo spazio di SOBOLEV $H^1(\Omega)^3$.
- Lo spazio di $H_{\text{div}}(\Omega)$ è in generale un sottospazio proprio dello spazio di SOBOLEV $H^1(\Omega)^9$.

Se l'operatore differenziale è $\mathbf{B} =$ sym grad si procede analogamente considerando campi tensoriali simmetrici $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^6$.

Se l'operatore $\mathbf{B}$ è un operatore differenziale lineare di ordine m la forma bilineare $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ viene definita sugli spazi $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})^3$ e $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})^9$. ■

Come si è visto nela sezione precedente, la teoria delle tracce consente di dare un significato ai valori al contorno dei campi $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)$.

Per estendere la nozione di traccia allo spazio $H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ è necessario che l'operatore soddisfi una diseguaglianza caratteristica che è illustrata nel seguito.

2.3. Diseguaglianza di Korn

Sia $H^m(\Omega)$ lo *spazio di* SOBOLEV dei campi vettoriali che hanno derivate distribuzionali di ordine $\le m$ di quadrato sommabile secondo LEBESGUE in Ω. Sussiste allora l'inclusione $H^m(\mathcal{P}) \subseteq H_{\mathbf{B}}(\Omega)$. Infatti $\mathbf{B}$ è un operatore differenziale di ordine m del tipo

$$(\mathbf{B}\,\mathbf{u})(\mathbf{x}) := \sum_{|\,\mathbf{p}\,|\le m} \mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\, D^{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x} \in \Omega\,,$$

e la regolarità dei coefficienti $\mathbf{A}_{\mathbf{p}}$ assicura che vale la diseguaglianza

$$\|\,\mathbf{u}\,\|_{H^m(\Omega)} \ge C \left[\|\,\mathbf{B}\mathbf{u}\,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\,\mathbf{u}\,\|_{H(\Omega)} \right] \ge C\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{H_{\mathbf{B}}(\Omega)} \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,,$$

dove i simboli $H(\Omega)$ e $\mathcal{H}(\Omega)$ denotano gli spazi dei campi vettoriali $\mathbf{v} : \Omega \mapsto V$ o tensoriali $\mathbf{T} : \Omega \mapsto \mathrm{L}(V\,;\,V)$ di quadrato integrabile su Ω.

Ne risulta in particolare che l'operatore $\mathbf{B} \in \mathrm{L}\left\{H^m(\Omega)\,;\,\mathcal{H}(\Omega)\right\}$ è continuo.

L'inclusione inversa $H^m(\Omega) \supseteq H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ sussiste se e solo se vale la diseguaglianza

$$a) \quad \|\,\mathbf{u}\,\|_{H_{\mathbf{B}}(\Omega)} \ge \alpha\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{H^m(\Omega)} \quad \forall\, \mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,.$$

In tal caso sussiste l'eguaglianza algebrica

$$H^m(\Omega) = H_{\mathbf{B}}(\Omega)\,,$$

e la trasformazione identica tra gli spazi $H^m(\Omega)$ e $H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ è un *omeomorfismo lineare*. Gli spazi normati $H^m(\Omega)$ e $H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ risultano pertanto *equivalenti*.

Si osservi ora che dalle diseguaglianze elementari

$$\sqrt{2}\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{H_{\mathbf{B}}(\Omega)} \geq \|\,\mathbf{Bu}\,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\,\mathbf{u}\,\|_{H(\Omega)} \geq \|\,\mathbf{u}\,\|_{H_{\mathbf{B}}(\Omega)} \quad \forall\,\mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,,$$

si deduce che la diseguaglianza $a)$ equivale alla

- *diseguaglianza di* KORN per l'operatore differenziale $\mathbf{B} \in \mathrm{L}\left\{H^m(\Omega)\,;\,\mathcal{H}(\Omega)\right\}$:

$$\boxed{b) \quad \|\,\mathbf{Bu}\,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\,\mathbf{u}\,\|_{H(\Omega)} \geq \alpha\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{H^m(\Omega)} \quad \forall\,\mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,.}$$

In generale sussiste il seguente risultato [26].

Proposizione 2.4. Diseguaglianze equivalenti. *Siano H uno spazio di* HILBERT, *E, F spazi lineari normati e $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{H\,;\,E\right\}$ un operatore lineare limitato. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

$$\mathbb{P}_1) \quad \boxed{\begin{cases} \dim \operatorname{Ker} \mathbf{A} < +\infty\,, \\ \|\,\mathbf{Au}\,\|_E \geq c_{\mathbf{A}}\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{H/\operatorname{Ker}\mathbf{A}}\,, \quad \forall\,\mathbf{u} \in H\,. \end{cases}}$$

$$\mathbb{P}_2) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Esiste un operatore compatto } \mathbf{A}_o \in \mathrm{L}\left\{H\,;\,E_o\right\} \\ \text{tale che } \operatorname{Ker}\mathbf{A} \cap \operatorname{Ker}\mathbf{A}_o = \{\mathbf{o}\} \text{ e} \\ \|\,\mathbf{Au}\,\|_E + \|\,\mathbf{A}_o\mathbf{u}\,\|_{E_o} \geq \alpha\,\|\,\mathbf{u}\,\|_H\,, \quad \forall\,\mathbf{u} \in H\,. \end{array}}$$

$$\mathbb{P}_3) \quad \boxed{\begin{array}{l} \dim \operatorname{Ker} \mathbf{A} < +\infty\,, \\ \|\,\mathbf{Au}\,\|_E + \|\,\mathbf{Lu}\,\|_F \geq \alpha_{\mathbf{L}}\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{H/(\operatorname{Ker}\mathbf{A}\cap\operatorname{Ker}\mathbf{L})}\,, \quad \forall\,\mathbf{u} \in H\,, \\ \text{per ogni } \mathbf{L} \in \mathrm{L}\left\{H\,;\,F\right\}. \end{array}}$$

□

Si noti che in forza del principio di selezione di RELLICH, proposizione VIII.1.2 (p. 125), l'immersione canonica di $H(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$ è un operatore lineare compatto.

La proposizione 2.4 assicura allora che la diseguaglianza di KORN equivale alle condizioni

$$\boxed{\begin{cases} i) \quad \dim \operatorname{Ker}\mathbf{B} < +\infty\,, \\ ii) \quad \|\,\mathbf{Bu}\,\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \geq c\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{H^m(\Omega)/\operatorname{Ker}\mathbf{B}} \quad \forall\,\mathbf{u} \in H^m(\Omega)\,, \end{cases}}$$

e cioè che l'operatore $\mathbf{B} \in \mathrm{L}\left\{H^m(\Omega)\,;\,\mathcal{H}(\Omega)\right\}$ ha nucleo di dimensione finita ed immagine chiusa.

Un operatore $\mathbf{B} \in \mathrm{L}\left\{H^m(\Omega)\,;\,\mathcal{H}(\Omega)\right\}$ che soddisfa una diseguaglianza del tipo di KORN è detto un *operatore di* KORN.

Si può quindi definire

- lo spazio di HILBERT $\partial H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ dei campi su $\partial\Omega$ costituiti dai valori al contorno dei campi di $H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ ponendo

$$\boxed{\partial H_{\mathbf{B}}(\Omega) := \mathrm{Im}\,\mathbf{\Gamma}\,,}$$

con $\mathbf{\Gamma} \in \mathrm{L}\left\{H_{\mathbf{B}}(\Omega)\,;\,\partial H_{\mathbf{B}}(\Omega)\right\}$.

Si noti inoltre che la forma bilineare $\boldsymbol{\gamma} \in \mathrm{Bil}\,\{\mathcal{H}_{\mathbf{B}'_o}(\Omega), H_{\mathbf{B}}(\Omega); \Re\}$ gode della proprietà

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma}\,(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0\,, \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma} \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_{\mathbf{B}'_o}(\Omega)\,.}$$

Infatti la forma bilineare $\boldsymbol{\gamma} \in \mathrm{Bil}\,\{\mathcal{H}_{\mathbf{B}'_o}(\Omega), H_{\mathbf{B}}(\Omega); \Re\}$ è continua e per ogni $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_{\mathbf{B}'_o}(\Omega)$ si annulla sul sottospazio lineare $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})^3 \cap \mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}$ denso in $\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Gamma}$.

Osservazione 2.2. Si considerino gli operatori lineari

$$\mathbb{B} : H(\Omega) \mapsto \mathbb{D}'(\Omega)\,, \quad \mathbb{B}'_o : \mathcal{H}(\Omega) \mapsto \mathbb{D}'(\Omega)\,,$$

le cui definizioni distribuzionali sono

$$\boxed{\begin{aligned} \langle\, \mathbb{B}\mathbf{u}\,,\, \mathbf{\Phi}\,\rangle &:= \langle\, \mathbb{T}_{\mathbf{u}}\,,\, \mathbf{B}'_o\mathbf{\Phi}\,\rangle = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{B}'_o\mathbf{\Phi}\;\mathrm{d}\mu\,, \quad \forall\,\mathbf{\Phi} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega)\,, \quad \mathbf{u} \in H(\Omega)\,,\\ \langle\, \mathbb{B}'_o\boldsymbol{\sigma}\,,\, \boldsymbol{\varphi}\,\rangle &:= \langle\, \mathbb{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\,,\, \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}\,\rangle = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}\;\mathrm{d}\mu\,, \quad \forall\,\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{D}_{H}(\Omega)\,, \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega)\,. \end{aligned}}$$

Agli operatori $\mathbb{B}$ e $\mathbb{B}'_o$ si associano gli spazi lineari $H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ e $\mathcal{H}_{\mathbf{B}'_o}(\Omega)$ così definiti.

- Lo spazio $H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ è definito come il sottospazio lineare di $H(\Omega)$ costituito dai campi $\mathbf{u} \in H(\Omega)$ tali che la distribuzione $\mathbb{B}\mathbf{u}$ sia rappresentabile da un campo di quadrato integrabile su Ω:

$$\boxed{H_{\mathbf{B}}(\Omega) := \left\{\mathbf{u} \in H(\Omega)\;:\;\mathbb{B}\mathbf{u} \in \mathcal{H}(\Omega)\right\}.}$$

- Lo spazio $\mathcal{H}_{\mathbf{B}'_o}(\Omega)$ è definito come il sottospazio lineare di $\mathcal{H}(\Omega)$ costituito dai campi $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega)$ tali che la corrispondente distribuzione $\mathbb{B}'_o\boldsymbol{\sigma}$ sia rappresentabile da un campo di quadrato integrabile su Ω:

$$\boxed{\mathcal{H}_{\mathbf{B}'_o}(\Omega) := \left\{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega) \;:\; \mathbb{B}'_o\boldsymbol{\sigma} \in H(\Omega)\right\}.}$$

Dalla completezza degli spazi $H(\Omega)$ e $\mathcal{H}(\Omega)$ e dal fatto che ogni operatore lineare che è un operatore differenziale distribuzionale da $\mathcal{H}(\Omega)$ in $H(\Omega)$ (o da $H(\Omega)$ in $\mathcal{H}(\Omega)$) ha grafico chiuso, vedi proposizione VII.2.1 (p. 118), si deduce che

- gli spazi $H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ e $\mathcal{H}_{\mathbf{B}'_o}(\Omega)$ sono spazi di HILBERT.

Se il dominio ha una frontiera $\partial\Omega$ regolare tali spazi coincidono con quelli omonimi definiti in precedenza mediante un'operazione di completamento. ■

2.4. Formula di rappresentazione

Si illustra ora un risultato astratto che consente di fornire una rappresentazione esplicita della forma bilineare $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ in temini dei valori al contorno.

La dimostrazione è dovuta all'autore ed è basata su un adattamento della trattazione svolta da J.P. AUBIN in [16], teor. 6.2.1. con riferimento a forme bilineari del tipo energia elastica.

Proposizione 2.5. Formula di rappresentazione. *Siano V e $\partial\mathcal{V}$ spazi di* HILBERT *e $\mathcal{F}$ e $\partial\mathcal{F}$ i rispettivi duali. Se $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathrm{L}\left\{V\,;\,\partial\mathcal{V}\right\}$ è un operatore suriettivo e $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ è una forma bilineare continua sullo spazio di* HILBERT *$\mathcal{S} \times V$ tale che*

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{u} \in \operatorname{Ker}\boldsymbol{\Gamma} \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}\,,}$$

allora vale la formula di rappresentazione

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \langle\!\langle\, \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\,,\, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}\,\rangle\!\rangle \quad \forall\, \mathbf{u} \in V \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}\,,}$$

dove $\langle\!\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\!\rangle$ è il prodotto di dualità tra $\partial\mathcal{F}$ e $\partial\mathcal{V}$ e $\mathbf{N} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{S}\,;\,\partial\mathcal{F}\right\}$.

Dim. Poichè la forma $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ è continua su $\mathcal{S} \times V$, si può considerare l'operatore lineare continuo $\mathbf{A} \in \mathrm{L}\left\{\mathcal{S}\,;\,\mathcal{F}\right\}$ associato a $\boldsymbol{\gamma}$ e definito da

$$\langle\, \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\,,\, \mathbf{u}\,\rangle := \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})\,, \qquad \forall\, \mathbf{u} \in V \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}\,,$$

dove $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ è il prodotto di dualità tra $\mathcal{F}$ e V.

Essendo $\gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0$, $\forall\, \mathbf{u} \in \operatorname{Ker}\boldsymbol{\Gamma}$, $\forall\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$, ne segue che l'immagine di $\mathbf{A}$ è contenuta in $(\operatorname{Ker}\boldsymbol{\Gamma})^{\perp} \subset \mathcal{F}$. In virtù del teorema dell'immagine chiusa di BANACH, proposizione VI.3.14 (p. 109), detto $\boldsymbol{\Gamma}' \in \mathrm{L}\{\partial\mathcal{F}\,;\,\mathcal{F}\}$ l'operatore duale di $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathrm{L}\{V\,;\,\partial\mathcal{V}\}$, si ha che

$$\operatorname{Ker}\boldsymbol{\Gamma}' = (\operatorname{Im}\boldsymbol{\Gamma})^{\perp} = \{\mathbf{o}\} \subset \partial\mathcal{F}\,, \qquad \operatorname{Im}\boldsymbol{\Gamma}' = (\operatorname{Ker}\boldsymbol{\Gamma})^{\perp}.$$

L'operatore $\boldsymbol{\Gamma}' \in \mathrm{L}\{\partial\mathcal{F}\,;\,(\operatorname{Ker}\boldsymbol{\Gamma})^{\perp}\}$ è pertanto continuo e biunivoco. Per il teorema dell'applicazione inversa di BANACH, l'operatore

$$\mathbf{M} := \boldsymbol{\Gamma}'^{-1} \in \mathrm{L}\{(\operatorname{Ker}\boldsymbol{\Gamma})^{\perp}\,;\,\partial\mathcal{F}\}\,,$$

è lineare e continuo. Risulta inoltre

$$\operatorname{Ker}\mathbf{M} = \{\mathbf{o}\} \subset \mathcal{F}\,, \qquad \operatorname{Im}\mathbf{M} = \partial\mathcal{F}\,.$$

Poichè $\operatorname{Im}\mathbf{A} = (\operatorname{Ker}\boldsymbol{\Gamma})^{\perp} = \operatorname{dom}\mathbf{M}$ si può definire l'operatore composto

$$\mathbf{N} := \mathbf{M}\,\mathbf{A} \in \mathrm{L}\{\mathcal{S}\,;\,\partial\mathcal{F}\}\,,$$

e si ha che

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Gamma}'\,\mathbf{M}\,\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Gamma}'\,\mathbf{N}\,\boldsymbol{\sigma}\,, \qquad \forall\,\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}\,.$$

Pertanto

$$\gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \langle\, \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\,,\, \mathbf{u}\,\rangle = \langle\, \boldsymbol{\Gamma}'\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\,,\, \mathbf{u}\,\rangle = \langle\!\langle\, \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\,,\, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}\,\rangle\!\rangle\,, \qquad \forall\,\mathbf{u} \in V \quad \forall\,\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}\,,$$

ed il risultato è dimostrato. □

L'operatore $\mathbf{N} \in \mathrm{L}\{\mathcal{S}\,;\,\partial\mathcal{F}\}$ è detto *operatore del flusso al contorno*.

Lo spazio $\partial\mathcal{F}$ è per definizione lo spazio duale dello spazio $\partial\mathcal{V}$ con la norma

$$\|\,\mathbf{t}\,\|_{\partial\mathcal{F}} := \sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{\langle\!\langle\, \mathbf{t}\,,\, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}\,\rangle\!\rangle}{\|\,\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}\,\|_{\partial\mathcal{V}}}\,.$$

Sussiste il seguente risultato.

Proposizione 2.6. Una norma equivalente. *Se l'operatore del flusso al contorno* $\mathbf{N} \in \mathrm{L}\{\mathcal{S}\,;\,\partial\mathcal{F}\}$ *è suriettivo, cioè se* $\operatorname{Im}\mathbf{N} = \partial\mathcal{F}$, *allora la norma in* $\partial\mathcal{F}$ *è equivalente alla norma dello spazio quoziente* $\mathcal{S}/\operatorname{Ker}\mathbf{N}$ *e sussiste l'equivalenza*

$$\boxed{\|\,\mathbf{t}\,\|_{\partial\mathcal{F}} \equiv \inf\{\|\,\boldsymbol{\sigma}\,\|_{\mathcal{S}} \mid \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} \,:\, \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}\}\,.}$$

Dim. La continuità dell'operatore $\mathbf{N} \in \mathrm{L}\{\mathcal{S}\,;\,\partial\mathcal{F}\}$ ed il teorema dell'immagine chiusa forniscono le diseguaglianze

$$C\,\|\,\boldsymbol{\sigma}\,\|_{\mathcal{S}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{N}} \geq \|\,\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\,\|_{\partial\mathcal{F}} \geq c\,\|\,\boldsymbol{\sigma}\,\|_{\mathcal{S}/\mathrm{Ker}\,\mathbf{N}} \quad \forall\,\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}\,.$$

La norma nello spazio quoziente $\mathcal{S}/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{N}$ è definita da

$$\|\,\boldsymbol{\sigma}\,\|_{\mathcal{S}/\,\mathrm{Ker}\,\mathbf{N}} := \inf\big\{\|\,\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\tau}\,\|_{\mathcal{S}} \mid \boldsymbol{\tau} \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{N}\big\}\,.$$

La suriettività di $\mathbf{N} \in \mathrm{L}\{\mathcal{S}\,;\,\partial\mathcal{F}\}$ assicura infine che per ogni $\mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$ esiste un $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}} \in \mathcal{H}$ tale che $\mathbf{t} = \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}}$ e da ciò segue il risultato. □

Ponendo

$$V = H_{\mathbf{B}}(\Omega)\,, \quad \mathcal{S} = \mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)\,, \quad \partial\mathcal{V} = \partial H_{\mathbf{B}}\,, \quad \partial\mathcal{F} = \partial H_{\mathbf{B}}(\Omega)'\,,$$

la formula di rappresentazione fornita dalla proposizione 2.5 consente di riscrivere la *formula di* GREEN nella forma

$$\boxed{\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}\mathbf{u}\;d\mu = \int_\Omega \mathbf{B}_o'\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}\;d\mu + \boldsymbol{\gamma}\,(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) = \int_\Omega \mathbf{B}_o'\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}\;d\mu + \langle\!\langle\,\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\,,\,\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}\,\rangle\!\rangle\,,}$$

per ogni coppia di campi $\mathbf{u} \in H_{\mathbf{B}}(\Omega)$ e $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)$.

Si noti che $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathrm{L}\{H_{\mathbf{B}}(\Omega)\,;\,\partial H_{\mathbf{B}}(\Omega)\}$ e $\mathbf{N} \in \mathrm{L}\{\mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)\,;\,\partial H_{\mathbf{B}}(\Omega)'\}$.

In [28] sezione II.13.11 (p. 249) è dimostrato che l'operatore del flusso al contorno

$$\mathbf{N} \in \mathrm{L}\{\mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)\,;\,\partial H_{\mathbf{B}}(\Omega)'\}$$

è suriettivo. Dalla proposizione 2.6 si deduce allora che vale la formula

$$\boxed{\|\,\mathbf{t}\,\|_{\partial H_{\mathbf{B}}(\Omega)'} \equiv \inf\big\{\|\,\boldsymbol{\sigma}\,\|_{\mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)} \mid \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_{\mathbf{B}_o'}(\Omega)\ :\ \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}\big\}\,.}$$

IX – ELEMENTI DI TEORIA DEL POTENZIALE

Si riportano alcuni fondamentali risultati di teoria del potenziale, che trovano applicazione in meccanica dei continui. La trattatazione fa ricorso alla teoria delle distribuzioni ed illustra prima il caso tridimensionale e quindi quello bidimensionale.

1. TEORIA DEL POTENZIALE NEWTONIANO

La teoria del potenziale di NEWTON [49] è basata sul seguente risultato.

Proposizione 1.1. Proprietà fondamentale. *Applicando l'operatore differenziale di* LAPLACE $\nabla^2 =$ div grad *alla funzione scalare*

$$f(\mathbf{x}) := \|\,\mathbf{x}\,\|^{-1}\,, \quad \mathbf{x} \in \Re^3$$

si ottiene un impulso di DIRAC *di intensità* $-4\,\pi$ *nell'origine. Formalmente si scrive che*

$$\boxed{\nabla^2 f(\mathbf{x}) = -4\,\pi\,\delta(\mathbf{x})\,.}$$

---

[49] ISAAC NEWTON (1643-1727). Orfano di padre ebbe un'infanzia difficile. Nel 1661 entrò al Trinity College di Cambridge, dove dominava la filosofia di ARISTOTELE. Dopo il terzo anno potette studiare più liberamente e si dedicò alla filosofia di DESCARTES, GASSENDI, HOBBES ed in particolare di BOYLE. Fu inoltre attratto dall'astronomia copernicana di GALILEO GALILEI (1564-1642) e studiò l'Ottica di JOHANNES KEPLER (1571-1630), l'opera del 1660 di VAN SCHOOTEN dal titolo *Geometria a Renato Des Cartes* e l'*Algebra* di WALLIS. Nel 1663 BARROW prese la cattedra Lucasiana a Cambridge. Nel 1665 la peste fece chiudere il Trinity College e NEWTON tornò a casa per due anni durante i quali inizio le sue rivoluzionarie scoperte in Matematica, Ottica, Fisica ed Astronomia quando non aveva ancora 25 anni. Nel 1669 BARROW lasciò la cattedra per dedicarsi alla religione e raccomandò che NEWTON prendesse il suo posto. Nella sua prima lezione NEWTON mostrò come la luce bianca fossa composta da uno spettro di colori, contraddicendo quanto tutti avevani creduto sin dai tempi di ARISTOTELE. Nel 1671 NEWTON pose le basi del calcolo integrale e differenziale col lavoro *De Methodis Serierum et Fluxionum*. Nel 1672 fu eletto membro della Royal Society e pubblicò il suo primo lavoro sulla teoria corpuscolare della luce e sui colori nei *Philosophical Transactions of the Royal Society*. La teoria ondulatoria era sostenuta invece da ROBERT HOOKE (1635-1703) e da CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695). Nel 1675 HOOKE accusò NEWTON di aver rubato alcuni suoi risultati di Ottica. La controversia fu segnata dal carattere di NEWTON che era timoroso ed iracondo per natura e soffriva di depressione. I due si riappacificarono per lettera ma NEWTON pubblicò la sua *Opticks* solo nel 1704 dopo la morte di HOOKE. Nel 1667 furono pubblicati i *Philosophiae naturalis principia mathematica*, noti come *Principia*, in cui NEWTON formulò la legge di gravitazione universale mediante la quale, assumendo una azione a distanza inversamente proporzione al quadrato della distanza, riuscì a spiegare molti fenomeni ancora non compresi, quali l'orbita eccentrica delle comete, le

Dim. Per formulare la proprietà in modo rigoroso si osservi preliminarmente che la funzione $f : \Re^3 \to \Re$ è localmente integrabile, come si evince dalla diseguaglianza

$$\Big| \int_{B(1)} f \, \mathrm{d}\mu \Big| \le \int_{B(1)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_{S(\rho)} \rho^{-1} \, \mathrm{d}\sigma \le 4\,\pi \int_0^1 \rho \, \mathrm{d}\rho = 2\,\pi \,,$$

dove $B(1)$ è la palla di raggio unitario e $S(\rho)$ è la sfera di raggio ρ.

E' possibile allora considerare la distribuzione $\mathbb{T}_f \in \mathbb{D}'(\Re^3)$ associata alla funzione $f : \Re^3 \to \Re$ e definita da

$$\mathbb{T}_f(\varphi) := \int_{\Re^3} f(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mu(\mathbf{x}) \,, \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Re^3) \,.$$

Il laplaciano della distribuzione $\mathbb{T}_f \in \mathbb{D}'(\Re^3)$ è definito da

$$(\nabla^2\, \mathbb{T}_f)(\varphi) := \int_{\Re^3} f(\mathbf{x}) \; (\nabla^2\, \varphi)(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mu(\mathbf{x}) \,, \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Re^3) \,.$$

Per definizione la distribuzione di DIRAC è tale che

$$\delta(\varphi) := \varphi(\mathbf{o}) \,, \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Re^3) \,.$$

La proprietà fondamentale del potenziale di NEWTON va scritta quindi a rigore in termini di distribuzioni nella forma

$$\boxed{\nabla^2\, \mathbb{T}_f = -4\,\pi\,\delta \quad \text{ovvero} \quad (\nabla^2\, \mathbb{T}_f)(\varphi) = -4\,\pi\,\varphi(\mathbf{o}) \,, \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Re^3) \,,}$$

ed esplicitamente

$$\boxed{\int_{\Re^3} f(\mathbf{x}) \; (\nabla^2\, \varphi)(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mu(\mathbf{x}) = -4\,\pi\,\varphi(\mathbf{o}) \,, \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{D}(\Re^3) \,.}$$

---

maree e le loro variazioni, la precessione dell'asse terrestre, ed il moto della Luna influenzato dall'attrazione solare. JAMES II re cattolico della Gran Britannia dal 1685 al 1688 fu fortemente contestato da NEWTON che era un fervente protestante. Dopo la caduta di JAMES II ad opera di WILLIAM D'ORANGE, NEWTON divenne governatore della Zecca Reale e visse ricco e rispettato a Londra. Fu nominato SIR dalla regina ANNE nel 1705. L'ultima parte della sua vita fu segnata dalla controversia con GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716) su chi avesse inventato il calcolo infinitesimale.

Per dimostrare la proprietà fondamentale bisogna valutare l'integrale a primo membro. A tal fine si consideri una palla $B(\rho)$ con centro nell'origine a raggio ρ e si decomponga l'integrale nella somma di due termini

$$\int_{\Re^3} f\ (\nabla^2 \varphi)\ \mathrm{d}\mu = \int_{\Re^3 \setminus B(\rho)} f\ (\nabla^2 \varphi)\ \mathrm{d}\mu + \int_{B(\rho)} f\ (\nabla^2 \varphi)\ \mathrm{d}\mu\,.$$

Detta $S(\rho)$ la frontiera sferica di $B(\rho)$, $\mathbf{n}$ il versore della normale uscente da $B(\rho)$ e ∇ e denotato col simbolo *nabla di* HAMILTON [50] l'operatore derivata, la formula di GREEN consente di scrivere

$$\int_{\Re^3 \setminus B(\rho)} f\ (\nabla^2 \varphi)\ \mathrm{d}\mu = -\int_{\Re^3 \setminus B(\rho)} \nabla f \cdot \nabla \varphi\ \mathrm{d}\mu - \int_{S(\rho)} f\, \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}\sigma\,,$$

$$\int_{B(\rho)} f\ (\nabla^2 \varphi)\ \mathrm{d}\mu = -\int_{B(\rho)} \nabla f \cdot \nabla \varphi\ \mathrm{d}\mu + \int_{S(\rho)} f\, \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}\sigma\,.$$

Sommando si ha che

$$\int_{\Re^3} f\ (\nabla^2 \varphi)\ \mathrm{d}\mu = -\int_{\Re^3 \setminus B(\rho)} \nabla f \cdot \nabla \varphi\ \mathrm{d}\mu - \int_{B(\rho)} \nabla f \cdot \nabla \varphi\ \mathrm{d}\mu\,.$$

Si calcoli quindi in $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$:

- il gradiente della funzione f

$$\nabla f(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\|\,\mathbf{x}\,\|^3}\,,$$

- il gradiente del gradiente di f

$$\nabla\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{3\,(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})}{\|\,\mathbf{x}\,\|^5} - \frac{\mathbf{I}}{\|\,\mathbf{x}\,\|^3}\,.$$

Adottando la terminologia di MAXWELL [51] si chiamerà Δ *l'operatore di* LAPLACE. Risulta $\Delta = \operatorname{div}\,\operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla = \operatorname{tr} \nabla\nabla$ e quindi si ha che

$$\Delta\, f(\mathbf{x}) = \operatorname{div}\,\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = \operatorname{tr} \nabla\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{3}{\|\,\mathbf{x}\,\|^3} - \frac{3}{\|\,\mathbf{x}\,\|^3} = 0\,.$$

---

[50] WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) chiamò nabla il simbolo ∇ in quanto reminiscente della forma di un antico strumento musicale ebraico che porta quel nome.

[51] JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879). Fisico matematico scozzese, allievo con l'amico TAIT del Trinity college di Cambridge dove poi fu professore di fisica e progettò l'HENRY CAVENDISH laboratory. Straordinari furono i suoi contributi alla teoria dell'elettromagnetismo (*Electricity and Magnetism*, 1873), all'ottica, alla teoria dell'elasticità ed alla teoria cinetica dei gas (teoria di MAXWELL-BOLTZMANN).

Ne segue che la funzione f è armonica in $\Re^3 \setminus B(\rho)$.

Dalla *formula di* GREEN:

$$\int_{\Re^3\setminus B(\rho)} (\Delta f)\,\varphi\,\mathrm{d}\mu = -\int_{\Re^3\setminus B(\rho)} \nabla f \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}\mu - \int_{S(\rho)} \nabla f \cdot \mathbf{n}\,\varphi\,\mathrm{d}\sigma\,,$$

si deduce allora che

$$-\int_{\Re^3\setminus B(\rho)} \nabla f \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_{S(\rho)} \nabla f \cdot \mathbf{n}\,\varphi\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

In definitiva si perviene all'espressione

$$\boxed{(\Delta\,\mathbb{T}_f)(\varphi) = \int_{\Re^3} f\,(\Delta\,\varphi)\,\mathrm{d}\mu = \int_{S(\rho)} \nabla f \cdot \mathbf{n}\,\varphi\,\mathrm{d}\sigma - \int_{B(\rho)} \nabla f \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}\mu\,.}$$

Tale eguaglianza sussiste per ogni valore del raggio ρ e pertanto l'integrale a primo membro è eguale al limite del secondo membro per ρ tendente a zero.

Si mostri dapprima che

$$\boxed{\lim_{\rho\to 0} \int_{B(\rho)} \nabla f \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}\mu = 0\,.}$$

Detto n l'estremo superiore di $\|\nabla\varphi\|$ sul supporto compatto di $\varphi \in \mathbb{D}(\Re^3)$, essendo $\|\nabla f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|^3$, ciò discende dalla diseguaglianza

$$\left|\int_{B(\rho)} \nabla f \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_{B(\rho)} m\,\|\nabla f\|\,\mathrm{d}\mu = m\int_0^\rho \mathrm{d}\xi \int_{S(\xi)} \xi^{-2}\,\mathrm{d}\sigma = m\,4\,\pi\,\rho\,.$$

Si mostri poi che

$$\boxed{\lim_{\rho\to 0} \int_{S(\rho)} \nabla f \cdot \mathbf{n}\,\varphi\,\mathrm{d}\sigma = -4\,\pi\,\varphi(\mathbf{o})\,.}$$

Infatti per $\rho \neq 0$ si ha che $\mathbf{n} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ e quindi su $S(\rho)$ risulta

$$\nabla f \cdot \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} = -\frac{1}{\rho^2}\,.$$

La continuità di φ assicura che

$$\boxed{\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{4\,\pi\,\rho^2} \int_{S(\rho)} \varphi\,\mathrm{d}\sigma = \varphi(\mathbf{o})\,,}$$

da cui segue il risultato. □

Posto $g = (1/4\pi)\, f$ si ha che

$$\boxed{\Delta\, \mathbb{T}_g = \delta\,,}$$

e pertanto la funzione

$$g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\,\pi}\, \|\,\mathbf{x}\,\|^{-1}\,, \quad \mathbf{x} \in \Re^3\,,$$

fornisce la *soluzione fondamentale* del problema di POISSON [52] tridimensionale.

1.1. Prodotto di convoluzione e potenziale Newtoniano

Si voglia ora determinare una soluzione del *problema di* POISSON

$$\boxed{\Delta\, \phi(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x} \in \Re^3\,,}$$

dove $\alpha \in \mathrm{C}^0_0(\Re^3)$ è un campo scalare continuo a supporto compatto $\overline{\Omega}$ in $\Re^3$.

Una soluzione del problema con il termine noto $\alpha(\mathbf{x})$ può essere dedotta dalla soluzione fondamentale $g(\mathbf{x})$ effettuando il *prodotto di convoluzione*

$$(g * \alpha)(\mathbf{x}) := \int_{\Re} g(\mathbf{y})\, \alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mu(\mathbf{y}) = \int_{\Re} g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \alpha(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mu(\mathbf{y}) = (\alpha * g)(\mathbf{x})\,,$$

e ponendo

$$\boxed{\phi(\mathbf{x}) := (g * \alpha)(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x} \in \Re^3\,.}$$

Infatti, in virtù della linearità del problema, il prodotto di convoluzione fornisce la somma delle risposte ad impulsi di ampiezza $\alpha(\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mu(\mathbf{y})$ concentrati nei punti $\mathbf{y}$. Formalmente si può scrivere che

$$\Delta\, \phi(\mathbf{x}) = \int_{\Re} \Delta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \alpha(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mu(\mathbf{y}) = \int_{\Re} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \alpha(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mu(\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x})\,.$$

La funzione ϕ è detta *potenziale di* NEWTON del campo scalare α, definito dalla convoluzione

$$\boxed{\phi(\mathbf{x}) := -\frac{1}{4\,\pi} \int_{\Omega} \frac{\alpha(\mathbf{y})}{\|\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,\|}\, \mathrm{d}\mu(\mathbf{y})}$$

[52] SIMÉON-DENIS POISSON (1781-1840). Uno dei maggiori analisti dell'Ottocento e grande fisico matematico. Fu uno dei fondatori della teoria matematica dell'elasticità, si occupò di teoria della propagazione del calore e diede contributi decisivi alla teoria del potenziale ed alle sue applicazioni all'elettricità ed al magnetismo.

In termini rigorosi si può pervenire alla dimostrazione che il prodotto di convoluzione $g * \alpha$ è soluzione del problema di POISSON procedendo come segue.

- Il *prodotto di convoluzione* tra una distribuzione $\mathbb{T} \in \mathbb{D}'(\Omega)$ ed una funzione di prova $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$ è definito ponendo

$$\boxed{(\mathbb{T} * \varphi)(\mathbf{x}) := \mathbb{T}_{[\mathbf{y}]}(\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}))\,,}$$

  dove la notazione $\mathbb{T}_{[\mathbf{y}]}$ indica che la distribuzione agisce sulla funzione di prova vista come funzione della variabile $\mathbf{y}$.

Il prodotto di convoluzione $(\mathbb{T} * \varphi)(\mathbf{x})$ così definito è una funzione di $\mathbf{x}$ continua con tutte le derivate, risulta cioè

$$\boxed{(\mathbb{T} * \varphi) \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega)\,.}$$

Sussite il seguente risultato [17].

Proposizione 1.2. *Per ogni operatore differenziale $D^{\mathbf{p}}$ si ha che*

$$\boxed{D^{\mathbf{p}}(\mathbb{T} * \varphi) = \mathbb{T} * (D^{\mathbf{p}}\varphi) = (D^{\mathbf{p}}\mathbb{T}) * \varphi\,.}$$

Dim. Sia $D_{\mathbf{xh}}$ la derivata rispetto alla variabile $\mathbf{x}$ in direzione $\mathbf{h}$. Allora

$$D_{\mathbf{xh}}(\mathbb{T} * \varphi)(\mathbf{x}) = \mathbb{T}_{[\mathbf{y}]}(D_{\mathbf{xh}}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})) = (\mathbb{T} * D_{\mathbf{xh}}\varphi)(\mathbf{x})\,,$$

e inoltre

$$(D_{\mathbf{yh}}\mathbb{T} * \varphi)(\mathbf{x}) = -\mathbb{T}_{[\mathbf{y}]}(D_{\mathbf{yh}}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})) = \mathbb{T}_{[\mathbf{y}]}(D_{\mathbf{xh}}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})) = (\mathbb{T} * D_{\mathbf{xh}}\varphi)(\mathbf{x})\,,$$

il che prova l'asserto. $\square$

Entrambe le distribuzioni $\mathbb{T}_g$ e $\Delta\,\mathbb{T}_g = \delta$ sono prolungabili per continuità su $\mathrm{C}^0_0(\Re^3)$ (sono cioè *misure* su $\Re^3$).

E' pertanto possibile effettuare il prodotto di convoluzione tra le distribuzioni $\mathbb{T}_g$ e $\Delta\,\mathbb{T}_g = \delta$ ed il campo scalare $\alpha \in \mathrm{C}^0_0(\Re^3)$. Risulta dunque

$$\Delta\,\phi = \Delta\,(g * \alpha) = \Delta\,(\mathbb{T}_g * \alpha) = (\,\Delta\,\mathbb{T}_g) * \alpha = \delta * \alpha\,.$$

Per definizione poi $\delta * \alpha = \alpha$ in quanto

$$(\delta * \alpha)(\mathbf{x}) = \delta_{[\mathbf{y}]}(\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})) = \alpha(\mathbf{x})\,.$$

In definitiva si ritrova in modo rigoroso la proprietà

$$\boxed{\Delta\,\mathbb{T}_g = \delta \;\Rightarrow\; \Delta\,(g * \alpha) = \alpha\,,}$$

la quale stabilisce che la convoluzione tra la soluzione fondamentale ed il termine noto fornisce una soluzione dell'equazione di POISSON.

1.2. Potenziali scalare e vettore. Teorema di Helmholtz

L'esistenza del potenziale di NEWTON è alla base di un classico risultato di teoria del potenziale dovuto a HELMHOLTZ. [53] Esso consente di dedurre un campo continuo in un dominio Ω come somma del gradiente di un potenziale scalare e del rotore di un potenziale vettore di tipo solenoidale.

Proposizione 1.3. Teorema di HELMHOLTZ**.** *Sia* $\mathbf{u}$ *un campo vettoriale continuo in* $\overline{\Omega}$*. Esistono allora un campo scalare* φ *ed un campo vettoriale* $\mathbf{w}$ *entrambi di classe* $\mathrm{C}^1(\Omega)$ *e tali che*

$$\mathbf{u} = -\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{w}$$

con $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$.

Dim. Sia $\mathbf{v}$ il potenziale vettoriale di NEWTON del campo vettoriale $\mathbf{u}$ definito dalla formula

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{x}) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \, d\mu(\mathbf{y})}$$

così che $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{u}$. Dall'identità

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} \,,$$

di deduce quindi che

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} \,,$$

e ponendo

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{v} \,, \quad \mathbf{w} = -\operatorname{rot} \mathbf{v} \,,$$

si ottiene il risultato osservando che $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. □

- Il campo scalare φ è il *potenziale scalare* di $\mathbf{u}$
- il campo vettoriale $\mathbf{w}$ è il *potenziale vettore* di $\mathbf{u}$.

Il potenziale vettore $\mathbf{w}$ è solenoidale e cioè a divergenza nulla.

Se il campo vettoriale $\mathbf{u}$ è di classe C^1 in tutto lo spazio $\Re^3$, i potenziali scalare e vettore possono essere espressi in termini della divergenza e del rotore del campo $\mathbf{u}$.

A tal fine si osservi che il potenziale di NEWTON $\mathbf{v}$ è definito dalla formula

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{x}) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\Re} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \, d\mu(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Re} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} \, d\mu(\mathbf{y})}$$

[53] HERMANN LUDWIG FERDINAND VON HELMHOLTZ (1821-1894). Grande fisico matematico tedesco. Laureato in Medicina a Berlino nel 1843, divenne professore di Anatomia e Fisiologia a Bonn nel 1858 e poi professore di Fisica a Berlino nel 1871.

e pertanto i potenziali, scalare φ e vettore $\mathbf{w}$, sono espressi da

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= -\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Re} \frac{\operatorname{div}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|}\, d\mu(\mathbf{y}) = \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\Re} \frac{\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\, d\mu(\mathbf{y}), \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= -\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Re} \frac{\operatorname{rot}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|}\, d\mu(\mathbf{y}) = \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\Re} \frac{\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\, d\mu(\mathbf{y}). \end{aligned}}$$

Le ultime espressioni si ottengono ponendo $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ così che $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$. Dunque $d\mu(\mathbf{y}) = -\, d\mu(\boldsymbol{\xi})$.

Ponendo poi $\mathbf{y}$ al posto di $\boldsymbol{\xi}$ si perviene al risultato.

Si noti che se il dominio non fosse l'intero spazio ma una regione finita Ω il risultato non sussiste. Infatti da $\mathbf{y} \in \Omega$ si deduce che $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \in \Omega$ e quindi che $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{x} - \Omega$. Dunque risulta $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ se e solo se Ω è l'intero spazio.

Si può allora concludere con la seguente affermazione.

- Un campo vettoriale $\mathbf{u}$ definito e di classe C^1 su tutto $\Re$ è univocamente determinato dal valore della sua divergenza e del suo rotore.

Se il campo è definito e di classe C^1 in una regione limitata il risultato non sussiste e va modificato come segue.

Proposizione 1.4. Unicità. *Un campo vettoriale* $\mathbf{u}$ *definito e di classe* C^1 *sul dominio semplicemente connesso* Ω *è univocamente determinato dal valore della divergenza, del rotore e del flusso attraverso il contorno.*

Dim. Basta ovviamente dimostrare che

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{o} \quad & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad & \text{su } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Ora, essendo $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$, la semplice connessione del dominio Ω, assicura che esiste un potenziale scalare φ tale che $\mathbf{u} = \nabla\varphi$.

La condizione $\operatorname{div}\mathbf{u} = \mathbf{o}$ impone allora che $\Delta\varphi = 0$ e cioè che il potenziale φ è armonico in Ω.

Essendo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0$, il *problema di* NEUMANN [54]

$$\begin{cases} \Delta\,\varphi = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

ammette come insieme delle soluzioni il sottospazio dei campi scalari φ costanti su Ω.

Infatti dalla *formula di* GREEN

$$\int_{\Omega} (\,\Delta\ f)\ \varphi\ \mathrm{d}\mu = -\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla\varphi\ \mathrm{d}\mu\ -\int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{n}\ \varphi\ \mathrm{d}\sigma\,,$$

ponendo $f = \varphi$ si ottiene che

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi\ \mathrm{d}\mu = 0\,,$$

e dunque che $\mathbf{u} = \nabla\varphi = \mathbf{o}$. □

Si noti che, se il dominio Ω non è semplicemente connesso, il risultato di unicità enunciato nella proposizione 1.4 non sussiste.

2. POTENZIALE LOGARITMICO

Nel caso bidimensionale il ruolo della funzione scalare

$$f(\mathbf{x})\ := \|\,\mathbf{x}\,\|^{-1}\,, \quad \mathbf{x} \in \Re^3\,,$$

è giocato invece dalla funzione scalare

$$f(\mathbf{x})\ := \ln \|\,\mathbf{x}\,\|^{-1}\,, \quad \mathbf{x} \in \Re^2\,.$$

Si calcoli infatti in $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$:

- il gradiente della funzione f

$$\nabla f(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\|\,\mathbf{x}\,\|^2}\,,$$

- il gradiente del gradiente di f

$$\nabla\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{2\,(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})}{\|\,\mathbf{x}\,\|^4} - \frac{\mathbf{I}}{\|\,\mathbf{x}\,\|^2}\,.$$

[54] CARL GOTTFRIED NEUMANN (1832-1925). Matematico tedesco figlio di FRANZ NEUMANN e professore a Lipsia.

Poichè l'operatore di LAPLACE è $\Delta = \text{div grad} = \nabla \cdot \nabla = \text{tr}\, \nabla\nabla$ risulta

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \text{div grad} f(\mathbf{x}) = \text{tr}\, \nabla\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{2}{\|\,\mathbf{x}\,\|^2} - \frac{2}{\|\,\mathbf{x}\,\|^2} = 0$$

e quindi la funzione f è armonica in $\Re^2 \setminus B(\rho)$.

Si mostra infine che

$$\boxed{\lim_{\rho \to 0} \int_{S(\rho)} \nabla f \cdot \mathbf{n}\, \varphi \, \mathrm{d}\sigma \; = \; -2\,\pi\, \varphi(\mathbf{o})\,.}$$

Infatti per $\rho \neq 0$ si ha che $\mathbf{n} = \mathbf{x}/\|\,\mathbf{x}\,\|$ e quindi sulla circonferenza $S(\rho)$ risulta

$$\nabla f \cdot \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{x}}{\|\,\mathbf{x}\,\|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\,\mathbf{x}\,\|} = -\frac{1}{\|\,\mathbf{x}\,\|} = -\frac{1}{\rho}\,.$$

Il risultato segue notando che la continuità di φ assicura che

$$\boxed{\lim_{\rho \to 0} \quad \frac{1}{2\,\pi\,\rho} \int_{S(\rho)} \varphi \, \mathrm{d}\sigma \; = \; \varphi(\mathbf{o})\,.}$$

Posto quindi $g = (1/2\pi)\, f$ si ha che

$$\boxed{\Delta\, \mathbb{T}_g = \delta\,,}$$

e pertanto la funzione

$$g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\,\pi} \ln \|\,\mathbf{x}\,\|^{-1}\,, \quad \mathbf{x} \in \Re^3\,,$$

fornisce la *soluzione fondamentale* del problema di POISSON bidimensionale.

Il *potenziale logaritmico*, dedotto per convoluzione tra la soluzione fondamentale ed il termine noto, ha l'espressione

$$\boxed{\phi(\mathbf{x}) \; := -\frac{1}{2\,\pi} \int_{\Omega} \alpha(\mathbf{y}) \ln \|\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,\|^{-1} \, \mathrm{d}\mu(\mathbf{y})\,.}$$

RIFERIMENTI

1. V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de ligne*, Gauthier Villars, Paris, (1913).
2. F. Riesz, Zur Theorie des Hilbertschen Räumes, Acta Sci. Math., Szeged **7**, 34-38 (1934).
3. S. L. Sobolev, Sur un théorème d'analyse fonctionelle., *Math. Sbornik*, **45**, 471-496 (1938).
4. L. Schwartz, Théorie des Distributions, vol. I et II, Hermann (1950, 1951).
5. C. Truesdell, R. Toupin, The Classical Field Theories, *Encyclopaedia of Physics*, vol. III/1, 226-793 Springer-Verlag, Berlin (1960).
6. J.L. Ericksen, Tensor Fields, *Encyclopaedia of Physics*, vol. III/1, Appendix 794-858 Springer-Verlag, Berlin (1960).
7. P. Halmos, *Finite dimensional vector spaces*, Princeton, D. van Nostrand Co. (1963).
8. N. Meyers, J. Serrin, $H = W$, Proc. Nat. Ac. Sci. **51**, 1055-1056 (1964).
9. J. Nečas, Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques, Masson, Paris (1967).
10. W. H. Greub, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York (1967).
11. W. H. Greub, *Multilinear Algebra*, Springer-Verlag, New York (1967).
12. Y. Choquet-Bruhat, Géométrie Différentielle et Système Extérieurs, Dunod, Paris (1968).
13. J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York (1969).
14. G. Fichera, Existence Theorems in Elasticity, *Encyclopaedia of Physics*, vol. VIa/2, 348-389, Springer-Verlag, New York (1972).
15. M. E. Gurtin, The Linear Theory of Elasticity, *Encyclopaedia of Physics*, vol. VIa/2, 1-290 Springer-Verlag, New York (1972).
16. J. P. Aubin, Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems, Wiley, New York (1972).
17. K. Yosida, *Functional Analysis*, 4^{th} Ed. Springer-Verlag, New York (1974).
18. R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).
19. J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux Limites Non Homogènes (3 vol.), Dunod, Paris (1978).
20. M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol.I-V, Publish or Perish, Inc., Berkeley (1979).
21. M. E. Gurtin, An introduction to continuum Mechanics, Academic Press, San Diego (1981).
22. H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson Editeur, Paris (1983).
23. R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, second edition, Springer Verlag, New York (1988).
24. E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino (1994).
25. M. Kline, Storia del Pensiero Matematico, vol I-II Einaudi (1996).
26. G. Romano Theory of structural models, Part I, Elements of Linear Analysis, Univ. Napoli Fed. II, (2000).

27. G. Romano Theory of structural models, Part II, Structural Models, Univ. Napoli Fed. II, (2000).
28. G. Romano, Scienza delle Costruzioni, Tomo I, Hevelius, Benevento, 2001.
29. G. Romano, Scienza delle Costruzioni, Tomo II, Hevelius, Benevento, 2001.

INDICE ANALITICO

k-forma, 37
k-forma differenziale, 54
k-forma esterna, 54
AUBIN J. P., 136
BANACH, spazio di, 94
BANACH, teorema di, 129, 136
BEPPO LEVI, spazi di, 120
BESSEL, diseguaglianza di, 105
BOLZANO-WEIERSTRASS, teorema di, 6
CAUCHY, criterio di, 93
CAUCHY, successione di, 93
CAUCHY-SCHWARZ, diseguaglianza di, 18, 96, 103
CAYLEY-HAMILTON, teorema di, 39
DIRAC, delta di, 117
EINSTEIN, convenzione di, 12
FOURIER, serie di, 104
FRÉCHET, derivata di, 77
GATEAUX, derivata di, 77
GAUSS-GREEN, lemma di, 80
GIBBS, prodotto di, 60
GRAM, matrice di, 33
GREEN, formula di, 130, 138, 141, 147
HAAR, matrice di, 33, 42
HAUSDORFF, assioma di, 6
HEAVISIDE, funzione di, 117
HELMHOLTZ, teorema di, 145
HILBERT, spazio di, 97, 128, 132, 136
HILBERT, spazio quaziente di, 129
HODGE, operatore stella di, 58
JACOBI, matrice di, 79
KELVIN, trasformazione di, 85
KORN, diseguaglianza di, 133
KRONECKER, delta di, 13
LAPLACE, operatore di, 141
MEYERS-SERRIN, teorema di, 122
NEWTON, potenziale di, 143
PARSEVAL, relazione di, 105
POISSON, problema di, 143
RELLICH, principio di selezione di, 122
RICCI, alternatore di, 13
RIESZ-FRÉCHET, teorema di, 101
RUSSELL, BERTRAND paradosso di, 2
SCHWARTZ, teoria delle distribuzioni di, 111
SOBOLEV, spazi di, 121
STOKES, teorema di, 85
VOLTERRA, teorema di, 88
NEUMANN, problema di, 146

aderenza di un insieme, 5
aggiunto formale, 123
aggiunto, operatore, 19
alternatore di RICCI, 13
alternazione, operatore di, 54
ampliamento complesso, 27
aperto regolare, insieme, 119
aperto, insieme, 4
applicazione, 3
applicazione continua, 7
applicazione differenziabile, 67
applicazione iniettiva, 4
applicazione inversa, teorema della, 108
applicazione limitata, 94
applicazione lineare limitata, 94
applicazione lineare, nucleo di, 95
applicazione suriettiva, 4
applicazione, limite di una, 8
applicazioni lineari, 8
assioma di HAUSDORFF, 6
atlante, 66
atlante massimale, 66
autovalore, 25
autovettore, 25

base, 12
base della topologia, 5
base dello spazio cotangente, 74
base dello spazio tangente, 72
base duale, 41
base ortonormale, 104
base, cambiamento di, 21

cambiamento di base, 21
campo controvariante, 74
campo covariante, 74
campo covettoriale, 74
campo potenziale, 89

campo tensoriale, 75
campo vettoriale, 74
carta, 66
chiuso, insieme, 5
chiusura di un insieme, 5
codominio, 3
compatto sequenzialmente, spazio, 7
compatto, operatore lineare, 10
compatto, spazio, 7
complemento, 1
complemento ortogonale, 19, 99
complesso coniugato, 28
completo, spazio metrico, 93
componenti, vettore delle, 12
continua, applicazione, 7
continuo, operatore, 7
contrazione, operazione di, 51, 52
controimmagine, 3
controvariante, 41
convenzione di EINSTEIN, 12
convergenza debole, 107
convergenza forte, 94
convesso, 89
convesso insieme, 97
convoluzione, prodotto di, 143
corrispondenza biunivoca, 4
covariante, 41
covettori, 73
criterio di convergenza di CAUCHY, 93
curva regolare, 70

debole convergenza, 107
delta di DIRAC, 117
delta di KRONECKER, 13
denso, insieme, 5
derivata, 77
derivata del determinante, 90
derivata dell'inversa, 92
derivata di FRÉCHET, 77
derivata di GATEAUX, 77
derivata direzionale, 77
derivata distribuzionale, 115
derivata generalizzata, 115
derivazione puntuale, 69, 71
determinante, 24
determinante di una matrice, 40
determinante, derivata del, 90
diffeomorfe, varietà, 67
diffeomorfismo, 67
differenziale, 70, 73
differenziale, forma, 54
dimensione, 12
dimensione di una varietà, 66
dimensione finita, 12
dipolo unitario, 117
diseguaglianza di BESSEL, 105
diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ, 96, 103
diseguaglianza di KORN, 133
diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ, 18
diseguaglianza triangolare, 19
diseguaglianze equivalenti, 134
distanza, 93
distribuzione, di quadrato integrabile, 115
distribuzione, restrizione di, 115
distribuzioni, 111
divergenza, 82
divergenza, teorema della, 82
domini, invarianza dei, 65
dominio, 3, 88

elemento di volume, 37
ellittico, operatore, 123
equazione caratteristica, 26
equivalenti, diseguaglianze, 134
estensione delle diseguaglianze, 9
estensione delle eguaglianze, 9
estensione, principi di, 9
esterna, forma, 54

famiglia ortonormale, 104
famiglia ortonormale completa, 104
fibra cotangente, 73
fibra tangente, 70
finitamente generabile, 12
forma, 37
forma k-lineare, 37

forma bilineare, 9
forma di volume, 46, 58
forma differenziale, 54
forma esterna, 54
forma lineare, 9
forma multilineare, 9, 37
forma multilineare alternante, 37
forma quadratica, 9
formula di GREEN, 130, 138, 141, 147
frontiera di un insieme, 5
frontiera, varietà con, 66
funzionale, 4
funzionale bilineare, 9
funzionale lineare, 9
funzionale quadratico, 9
funzione, 3
funzione determinante, 37
funzione determinante normalizzata, 45
funzione di HEAVISIDE, 117
funzioni determinante duali, 42
funzioni generalizzate, 111

generatore finito, 11
gradiente, 80
grafico chiuso, 108
grafico chiuso, operatore, 108
grafico chiuso, teorema del, 108
grafico di un mappa, 108
grafico di una relazione, 3
grafico funzionale, 3
gruppo delle permutazioni, 37

identità di JACOBI, 91
immagine, 3
immagine chiusa, teorema della, 108
immagine di un operatore lineare, 17
immagine inversa, 3
immersione, 69
impulso unitario, 117
inclusione differenziabile, 70
iniettiva, applicazione, 4
insieme aperto regolare, 119
insieme convesso, 97
insieme denso, 5
insieme di aderenza, 5
insieme diretto, 3
insieme limitato, 6
insieme, frontiera di un, 5
insiemi aperti, 4
insiemi chiusi, 5
integrabilità locale, 114
interno di un insieme, 5
intorno, 5
intorno aperto, 5
invariante lineare, 23
invarianti di un operatore, 26
invarianza dei domini, 65
inversa, derivata della, 92
isolato, punto, 5
isometria, 25
isomorfismo, 9, 11, 22
isomorfismo isometrico, 102

l'operatore di LAPLACE, 141
lemma di GAUSS-GREEN, 80
limitata, applicazione lineare, 94
limite di un'applicazione, 8
lineare, spazio, 11
lineari, operazioni, 11
localmente compatto, spazio, 7
logaritmico, potenziale, 148
lunghezza, 18

mappa, 3
mappa differenziabile, rango di, 68
matrice di un operatore, 15
matrice di un operatore lineare, 14
matrice di GRAM, 33
matrice di HAAR, 33, 42
matrice di JACOBI, 79
matrice Jacobiana, 68
matrice trasposta, 19
matrici di trasferimento, 22
metrica, 93
minima norma, proprietà di, 98

modellate su $\Re^n$, varietà, 65
morfismo, 67

nabla di HAMILTON, 140
nabla, operatore, 140
norma, 18, 94, 95
nucleo di un operatore lineare, 16
nucleo di un'applicazione lineare, 95
nullità di un operatore, 17

omeomorfismo, 8, 65
omeomorfismo lineare, 133
operatore, 3
operatore aggiunto, 19, 46
operatore aggiunto formale, 130
operatore continuo, 7
operatore dei valori al contorno, 129
operatore del flusso al contorno, 137
operatore di alternazione, 54
operatore di traccia, 129
operatore di KORN, 134
operatore ellittico, 123
operatore Jacobiano, 68
operatore lineare compatto, 10
operatore lineare, immagine di, 17
operatore lineare, matrice di, 14
operatore lineare, nucleo di, 16
operatore nabla di HAMILTON, 140
operatore normale, 27
operatore stella di HODGE, 58
operatore, spettro di, 25
operazione di contrazione, 51, 52
operazione di contrazione completa, 53
operazioni lineari, 11
orientamenti di uno spazio vettoriale, 38

paradosso di BERTRAND RUSSELL, 2
parallelogramma, regola del, 95, 96
parte principale, 123
permutazioni pari e dispari, 37
permutazioni, gruppo delle, 37
pivot, spazio di HILBERT, 104
potenziale, 89
potenziale di NEWTON, 143
potenziale logaritmico, 148
potenziale scalare, 145
potenziale vettore, 145
pre-HILBERT, spazio, 95
principi di estensione, 9
principio di selezione di RELLICH, 122
problema di POISSON, 143
problema di NEUMANN, 146
problemi di valori al contorno, 126
prodotto cartesiano, 3
prodotto di convoluzione, 143
prodotto di GIBBS, 60
prodotto esterno, 55
prodotto esterno di forme esterne, 55
prodotto esterno di forme multilineari, 55
prodotto interno, 18, 95
prodotto interno tra tensori, 54
prodotto scalare, 73
prodotto tensoriale, 32, 47–49
prodotto tensoriale di spazi vettoriali, 48
prodotto vettoriale, 34, 62
prodotto, di spazi, 107
proiettore ortogonale, 98
proiezione ortogonale, 98
proiezione ortogonale, teorema della, 97
proprietà di contrazione, 98, 100
proprietà di minima norma, 98
proprietà topologica, 6
punti critici, 68
punto di accumulazione, 5
punto isolato, 5
punto limite, 5

quasi ovunque, 101
quoziente, spazio di HILBERT, 106

rango di un operatore, 17
rango di una mappa differenziabile, 68
rappresentazione spettrale, 32
rappresentazione, teorema di, 43

regola del parallelogramma, 95, 96
relativa, topologia, 6
relazione di PARSEVAL, 105
restrizione di una distribuzione, 115
ricoprimento, 7
ricoprimento aperto, 7
ricoprimento finito, 7
rotore di un campo tensoriale, 87
rotore di un campo vettoriale, 84

separabile, spazio di HILBERT, 104
separante, topologia, 6
sequenzialmente compatto, spazio, 7
serie di FOURIER, 104
sezione della varietà tangente, 74
sistema di coordinate, 66
sistema fondamentale di intorni, 5
soluzione fondamentale, 143, 148
sottospazio invariante, 27
sottospazio lineare, 11
sottospazio lineare chiuso, 97
sottospazio topologico, 6
sottospazio vettoriale, 11
spazi di BEPPO LEVI, 120
spazi di SOBOLEV, 121
spazi topologici omeomorfi, 8
spazio cotangente, 73
spazio cotangente, base dello, 74
spazio di BANACH, 94
spazio di HILBERT, 97, 128, 132, 136
spazio di HILBERT pivot, 104
spazio di HILBERT quoziente, 106
spazio di HILBERT separabile, 104
spazio di SOBOLEV, 133
spazio duale, 41
spazio lineare, 11
spazio localmente compatto, 7
spazio metrico, 93
spazio metrico completo, 93
spazio normato, 93
spazio normato duale, 95
spazio pre-HILBERT, 95
spazio prodotto, 107
spazio prodotto tensoriale, 48
spazio quaziente di HILBERT, 129
spazio quoziente, di HILBERT, 106
spazio tangente, 70, 71
spazio tangente, base dello, 72
spazio topologico, 4
spazio topologico lineare, 6, 94
spazio vettoriale, 11
spettro di un operatore, 25
stella di HODGE, 58
struttura differenziale, 66
successione di CAUCHY, 93
successione ortonormale completa, 104
supporto, 112
supporto compatto, 112
suriettiva, applicazione, 4

tensore, 11, 43, 75
tensore doppio, 42
tensore metrico, 43
tensore metrico contravariante, 44
tensore metrico covariante, 44
tensore misto, 43
tensori metrici, 49
tensori, prodotto interno tra, 54
tensoriale, prodotto, 47
teorema del grafico chiuso, 108
teorema dell'applicazione inversa, 108
teorema dell'immagine chiusa, 108
teorema della divergenza, 82
teorema della proiezione ortogonale, 97
teorema di rappresentazione, 43
teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS, 6
teorema di CAYLEY-HAMILTON, 39
teorema di HELMHOLTZ, 145
teorema di MEYERS-SERRIN, 122
teorema di RIESZ-FRÉCHET, 101
teorema di STOKES, 85
teorema di VOLTERRA, 88
teoria delle tracce, 126
topologia, 5
topologia relativa, 6
topologia separante, 6

topologica, proprietà, 6
traccia, 23, 45, 52
traccia di una matrice, 40
traccia, operatore di, 129
trasferimento, matrici di, 22
trasformazione, 3
trasformazione di KELVIN, 85
trasformazioni continue, 9
trasposta, matrice, 19

valori al contorno, 128
valori al contorno, operatore dei, 129
varietà con frontiera, 66
varietà cotangente, 73
varietà diffeomorfe, 67
varietà differenziabile, 66
varietà modellate su $\Re^n$, 65
varietà tangente, 70
varietà tangente, sezione della, 74
varietà, dimensione di, 66
vettore, 11
vettore assiale, 34
vettore delle componenti, 12
vettore tangente, 70
vettoriale, spazio, 11

INDICE DELLE NOTE BIOGRAFICHE

Alexandrov, Pavel, 7
Ampère, André, 84
Banach, Stefan, 94
Bessel, Friedrich, 105
Bolzano, Bernard, 6
Borel, Emile, 7
Bunyakovskii, Viktor, 96
Cauchy, Augustin, 93
Cayley, Arthur, 39
De Morgan, Augustus, 2
Dirac, Paul, 117
Einstein, Albert, 12
Fourier, Joseph, 104
Fréchet, Maurice, 6
Gauss, Johann, 80
Gibbs, Josiah, 60
Gram, Jorgen, 33
Green, George, 80
Haar, Alfréd, 33
Hamilton, William, 39
Hankel, Hermann, 85
Hausdorff, Felix, 6
Heaviside, Oliver, 117
Helmholtz, Hermann, 145
Hilbert, David, 97
Hodge, William, 58
Jacobi, Karl, 79
Kronecker, Leopold, 13
Lebesgue, Henri, 100
Maxwell, James, 141
Neumann, Carl, 146
Neumann, John, 96
Newton, Isaac, 139
Ostrogradski, Mikhail, 80
Parseval, Marc-Antoine, 105
Poisson, Siméon-Denis, 143
Rellich, Franz, 122
Ricci-Curbastro, Gregorio, 13
Riemann, George, 3
Riesz, Friedrich, 101
Russell, Bertrand, 2
Schwartz, Laurent, 111
Schwarz, Hermann, 88
Sobolev, Sergei, 111, 119
Stokes, George, 84
Sylvester, James, 38
Thomson, William, 84
Urysohn, Pavel, 7
Volterra, Vito, 88
Weierstrass, Karl, 6