Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Romano, Manfredi Romano

Sulla soluzione di problemi strutturali in presenza di legami costitutivi unilaterali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.1-2, p. 104–113.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_1-2_104_0>

Meccanica. — *Sulla soluzione di problemi strutturali in presenza di legami costitutivi unilaterali* (*). Nota (**) di GIOVANNI ROMANO (***) e MANFREDI ROMANO (***), presentata dal Corrisp. E. GIANGRECO.

SUMMARY. — A general model for the analysis of a class of structural problems with unilateral constitutive relations is formulated and its consistency is proved. Two iterative methods for the numerical solution of this class of problems are considered and their convergence properties are analyzed. Applications to problems of relevant interest in structural engineering are briefly discussed.

1. PREMESSA

Nel campo dell'ingegneria strutturale è di grande rilievo il problema del calcolo di strutture costituite da materiali il cui comportamento è descritto con soddisfacente approssimazione da un modello di tipo unilaterale.

In tale classe di problemi rientra ad esempio il calcolo di strutture in conglomerato (armato o meno) quando la fessurazione a trazione del materiale gioca un ruolo rilevante nella determinazione dello stato tensionale.

Di grande interesse tecnico è inoltre l'analisi delle sollecitazioni e dei conseguenti quadri fessurativi nelle strutture in muratura (archi, volte).

Un'altra vasta problematica che conduce a formulare modelli strutturali con comportamento costitutivo di tipo unilaterale è quella relativa alla risposta incrementale di strutture in campo elastico – perfettamente plastico.

L'analisi di tale classe di problemi viene affrontata in questa Nota formulando un modello generale che consente di includere in una trattazione unitaria una varietà di problemi applicativi. Con riferimento a tale modello si fornisce una dimostrazione dei risultati concernenti l'esistenza e l'unicità della soluzione.

Si mostra che l'esistenza di una soluzione è legata al rispetto di una condizione di compatibilità sui carichi, espressa in termini di lavoro virtuale.

L'analisi di tale questione con riferimento al problema generale del minimo di un funzionale quadratico su di un convesso è stata affrontata per la prima volta da G. Fichera che ha fornito i risultati fondamentali di esistenza e di unicità [1].

Nel presente contesto si è seguita una via dimostrativa diretta, considerando il problema di minimo del funzionale non lineare dell'energia potenziale del sistema. È da rilevare che si fa riferimento a modelli strutturali

(*) Lavoro finanziato con contributo del C.N.R. nell' ambito del gruppo di ricerca Problemi Avanzati di Ingegneria Strutturale.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1979.

(***) Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Napoli.

discretizzati per i quali lo spazio delle configurazioni ammissibili è di dimensione finita. L'estensione dei risultati di esistenza ed unicità al caso del continuo è un problema tutt'ora aperto.

Per il calcolo numerico della soluzione di problemi strutturali con legame costitutivo di tipo unilaterale si può applicare un metodo di rilassamento di tipo classico, consistente nell'imporre alternativamente il rispetto della condizione di equilibrio e del legame costitutivo.

Applicazioni di tale metodo sono state proposte da M. Capurso [2] per i problemi elasto-plastici incrementali e dagli autori [3] nel caso della pressoflessione nei materiali non resistenti a trazione.

In questa Nota si presenta la formulazione del metodo con riferimento al modello generale considerato e se ne fornisce la dimostrazione della convergenza.

È da osservare che la rapidità di convergenza risulta però in molti casi insoddisfacente. Tale inconveniente è in generale tanto più accentuato quanto più rilevante è il comportamento unilaterale del sistema.

Si propone quindi un nuovo metodo iterativo, detto di rilassamento geometrico, e si dimostra che ogni successione convergente generata dall'algoritmo tende alla soluzione del problema unilaterale.

Tale metodo, pur non avendo un campo di applicabilità che comprende tutti i problemi unilaterali descritti dal modello generale, costituisce un valido strumento di calcolo numerico. Esso può infatti essere applicato con successo ad una vasta classe di problemi strutturali, mostrando in ogni caso una grande rapidità di convergenza.

A conclusione della Nota si discutono brevemente due esempi di applicazione a problemi di particolare interesse nell'ingegneria strutturale.

2. FORMULAZIONE DEL MODELLO

Sia V lo spazio lineare degli spostamenti ammissibili della struttura, che assumeremo di dimensione finita, e V′ lo spazio duale dei carichi agenti su di essa. Con W e W′ si denotano lo spazio di Hilbert delle deformazioni e quello duale degli stati tensionali. Indicando con

$$\mathrm{def} : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$$

l'operatore lineare che associa ad ogni spostamento $u \in \mathrm{V}$ la deformazione corrispondente $\mathrm{def}\, u \in \mathrm{W}$, il legame costitutivo è definito dalle relazioni:

$$(1) \qquad \sigma = \mathrm{S}\,(\mathrm{def}\, u - \varepsilon) \qquad u \in \mathrm{V} \qquad \sigma \in \mathrm{W}' \qquad \varepsilon \in \mathrm{K}$$

$$(\sigma\,,\,\eta - \varepsilon) \leq 0 \qquad \forall \eta \in \mathrm{K}$$

dove K è un cono chiuso e convesso di W, $\mathrm{S} : \mathrm{W} \rightarrow \mathrm{W}'$ è un operatore costitutivo del tipo elastico (cioè simmetrico e coercivo) e $(\,,\,)$ denota il prodotto scalare in W.

La legge costitutiva (1) è equivalente al problema di minima distanza:

$$\min_{\varepsilon \in K} \| \operatorname{def} u - \varepsilon \|_S = \| \operatorname{def} u - \Pi \operatorname{def} u \|_S$$

dove $\| \cdot \|_S$ denota la norma indotta da S in W, che si dirà la norma in energia, e Π è il proiettore ortogonale in energia di W su K.

La condizione di equilibrio è espressa in termini di lavoro virtuale da

$$(\sigma , \operatorname{def} v) = l(v) \qquad \forall v \in V \qquad l \in V' \tag{2}$$

dove $l(v)$ è il lavoro virtuale dei carichi.

La relazione costitutiva (1) e la condizione di equilibrio (2) costituiscono la formulazione variazionale del problema di minimo

$$\min \{ \Phi (u , \varepsilon) / u \in V, \varepsilon \in K \} \tag{P1}$$

dove

$$\Phi (u , \varepsilon) = \tfrac{1}{2} \| \operatorname{def} u - \varepsilon \|_S^2 - l(u) .$$

Considerando il funzionale non lineare

$$\Psi (u) = \tfrac{1}{2} \| \operatorname{def} u - \Pi \operatorname{def} u \|_S^2 - l(u)$$

che rappresenta l'energia potenziale del sistema, si può mostrare che il problema P1 è equivalente al seguente problema di minimo non condizionato

$$\min \{ \Psi (u) / u \in V \} . \tag{P2}$$

A tal fine si noti che se (u_0 , ε_0) è soluzione del problema P1 deve aversi $\varepsilon_0 = \Pi \operatorname{def} u_0$ e quindi $\Psi(u_0) = \Phi(u_0 , \varepsilon_0)$. Se esistesse un $\bar{u} \in V$ tale che $\Psi(\bar{u}) < \Psi(u_0)$, ponendo $\bar{\varepsilon} = \Pi \operatorname{def} \bar{u}$, si avrebbe $\Phi(\bar{u} , \bar{\varepsilon}) = \Psi(\bar{u}) < \Psi(u_0) = \Phi(u_0 , \varepsilon_0)$ contro l'ipotesi, e quindi u_0 è soluzione di P2.

Viceversa sia $\bar{u}$ soluzione del problema P2. Se esistesse (u_0 , ε_0) tale che $\Phi(u_0 , \varepsilon_0) < \Phi(\bar{u} , \bar{\varepsilon})$ risulterebbe $\Psi(u_0) = \Phi(u_0 , \varepsilon_0) < \Phi(\bar{u} , \bar{\varepsilon}) = \Psi(\bar{u})$ contro l'ipotesi, e quindi $(\bar{u} , \bar{\varepsilon})$ è soluzione di P1.

Dimostriamo ora il seguente:

TEOREMA DI ESISTENZA. Detto $V_k = \{ u \in V : \operatorname{def} u \in K \}$ *il cono chiuso e convesso degli spostamenti ammissibili cui corrisponde uno stato tensionale nullo, il problema* P2 *ammette soluzione se il carico verifica la condizione di compatibilità*:

$$l(u) \leq 0 \qquad \forall u \in V_k \tag{C1}$$

$$l(u) = 0 \iff u \in R$$

ove $R = \{ u \in V_k : \operatorname{def} u = 0 \}$ *è il sottospazio degli spostamenti rigidi ammissibili.*

Si premette un risultato tecnico:

LEMMA. *Detto* $\tilde{P}$ *il proiettore ortogonale su* R *e* $\tilde{Q} = I - \tilde{P}$ *il proiettore complementare, si ha*

$$\| \tilde{Q} u_n \| \to + \infty \Rightarrow \max \lim \Psi (u_n) = + \infty$$

Dimostrazione. Si consideri una successione di versori $w_n = \| \tilde{Q}u_n \|^{-1} \tilde{Q}u_n$ convergente al limite w_0. Si distinguono due casi:

i) $w_0 \in V_k$.

Essendo $\tilde{P}w_0 = \lim \tilde{P}w_n = 0$ si ha $w_0 \in R$ e quindi $l(w_0) < 0$. Ne segue che:

$$\lim \Psi(\tilde{Q}u_n) \geq -\lim \| \tilde{Q}u_n \| \, l(w_0) = +\infty$$

ii) $w_0 \bar{\in} V_k$.

In tal caso si ha ancora

$$\lim \Psi(\tilde{Q}u_n) = \lim \| \tilde{Q}u_n \|^2 \{\tfrac{1}{2} \| \operatorname{def} w_0 - \Pi \operatorname{def} w_0 \|_S^2 - \| \tilde{Q}u_n \|^{-1} l(w_n)\} = +\infty$$

in quanto $\lim (\operatorname{def} w_n - \Pi \operatorname{def} w_n) = \operatorname{def} w_0 - \Pi \operatorname{def} w_0 \neq 0$.

Osservando infine che $\Psi(u) = \Psi(\tilde{Q}u) \ \forall u \in V$, si ottiene il risultato voluto.

Per conseguire la dimostrazione del teorema di esistenza si consideri una successione $\{u_n\}$ minimizzante per $\Psi(u)$, cioè tale che

$$\lim \Psi(u_n) = \inf \{\Psi(u) / u \in V\}.$$

In virtù del Lemma precedente la successione $\{\tilde{Q}u_n\}$ è limitata. Se ne può dunque estrarre una convergente $\{\tilde{Q}u_{n_k}\} \to u_0$. Per la continuità di Ψ si ha:

$$\lim \Psi(u_{n_k}) = \lim \Psi(\tilde{Q}u_{n_k}) = \Psi(u_0) = \inf \{\Psi(u) / u \in V\}$$

e quindi u_0 è soluzione del problema P2.

È peraltro facile verificare che per l'esistenza di una soluzione del problema P2 è necessario che:

$$l(u) \leq 0 \qquad \forall u \in V_k.$$

Infatti se esistesse un $u^* \in V_k$ tale che $l(u^*) > 0$, si avrebbe:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \Psi(\alpha u^*) = -\infty$$

Per quanto concerne l'unicità della soluzione sussiste il seguente

TEOREMA DI UNICITÀ. *Il problema* P2 *ammette un'unica soluzione in termini di stato tensionale.*

Si osservi infatti che, denotando con z la coppia $(u, \varepsilon) \in V \times W$, il funzionale $\Phi(u, \varepsilon)$ può scriversi nella forma $\frac{1}{2} b(z, z) - l(u)$, dove $b(z, z) = \| \operatorname{def} u - \varepsilon \|_S^2$.

Se $z_0 = (u_0, \varepsilon_0)$ e $z_0' = (u_0', \varepsilon_0')$ sono soluzioni del problema P2, si ha:

$$b(z_0, z - z_0) \geq l(u - u_0)$$

$$b(z_0', z - z_0') \geq l(u - u_0')$$

da cui $b(z_0 - z_0', z_0 - z_0') = 0$ e quindi essendo $\varepsilon_0 = \Pi \operatorname{def} u_0$ ed $\varepsilon_0' = \Pi \operatorname{def} u_0'$ dalla definizione della forma quadratica b segue che:

$$\operatorname{def} u_0 - \Pi \operatorname{def} u_0 = \operatorname{def} u_0' - \Pi \operatorname{def} u_0' .$$

Denotando con $\sigma(u) = S(\operatorname{def} u - \Psi \operatorname{def} u)$ lo stato tensionale associato al campo di spostamenti u, si ha infine

$$\sigma(u_0) = \sigma(u_0')$$

3. Metodi di calcolo

Nel formulare metodi di calcolo si assume, senza ledere la generalità, che non vi siano spostamenti rigidi ammissibili.

Il problema unilaterale si scrive allora nella forma:

$$\text{(P)} \qquad \min \{\Phi(u, \varepsilon)/u \in V, \varepsilon \in K\} = \min \{\Psi(u)/u \in V\}$$

con la condizione di compatibilità

$$\text{(C)} \qquad l(u) < 0 \qquad \forall u \in V_k, \quad u \neq 0 .$$

La soluzione del problema P può essere ottenuta con un metodo di rilassamento di tipo classico, consistente nell'imporre alternativamente la condizione di equilibrio ed il rispetto del legame costitutivo, secondo lo schema iterativo:

$$\min_{u \in V} \Phi(u, \varepsilon_n) = \Phi(u_{n+1}, \varepsilon_n)$$

$$\min_{\varepsilon \in K} \Phi(u_{n+1}, \varepsilon) = \Phi(u_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) = \Psi(u_{n+1}) .$$

Poiché $\varepsilon_n = \Pi \operatorname{def} u_n$, l'algoritmo A tale che $u_{n+1} = Au_n$ è definito dal problema di minimo:

$$(3) \qquad \min_{u \in V} \Phi(u, \Pi \operatorname{def} u_n) = \Phi(u_{n+1}, \Pi \operatorname{def} u_n) .$$

Si vuole ora mostrare che ogni punto di compattezza della successione $\{u_n\}$ generata dall'algoritmo A è soluzione del problema P. A tal fine si osservi che sussistono le diseguaglianze:

$$(4) \qquad \Psi(u) = \Phi(u, \Pi \operatorname{def} u) \geq \Phi(Au, \Pi \operatorname{def} u) \geq$$
$$\geq \Phi(Au, \Pi \operatorname{def} Au) = \Psi(Au) .$$

La successione $\{\Psi(u_n)\}$ è dunque non crescente e poiché, in virtù del lemma del par. 2, $\|u_n\| \to +\infty \Rightarrow \lim \Psi(u_n) = +\infty$, ne segue che la successione $\{u_n\}$ è limitata.

L'algoritmo A è inoltre di discesa stretta per il funzionale Ψ in quanto

$$\Psi(\mathrm{A}u) = \Psi(u) \quad \Rightarrow \quad u = \mathrm{A}u = u_0$$

dove u_0 è soluzione del problema P.

Infatti, se $\Psi(\mathrm{A}u) = \Psi(u)$, dalla (4) segue che

$$\Phi(\mathrm{A}u\,,\,\Pi\,\mathrm{def}\,u) = \Phi(u\,,\,\Pi\,\mathrm{def}\,u)\,. \tag{5}$$

Osservando che, per la definizione dell'algoritmo A,

$$\min_{v \in \mathrm{V}} \Phi(v\,,\,\Pi\,\mathrm{def}\,u) = \Phi(\mathrm{A}u\,,\,\Pi\,\mathrm{def}\,u)\,. \tag{6}$$

e che tale problema di minimo ammette un'unica soluzione, dalle (5) e (6) si deduce che $\mathrm{A}u = u$ e

$$\min_{v \in \mathrm{V}} \Phi(\mathrm{V},\,\Pi\,\mathrm{def}\,u) = \Phi(u\,,\,\Pi\,\mathrm{def}\,u)\,. \tag{7}$$

La (7) è equivalente alla condizione variazionale di equilibrio

$$(\mathrm{S}\,(\mathrm{def}\,u - \Pi\,\mathrm{def}\,u)\,,\,\mathrm{def}\,v) = l(v) \qquad \forall v \in \mathrm{V}.$$

Essendo inoltre soddisfatto il legame costitutivo con $\varepsilon = \Pi\,\mathrm{def}\,u$ ne segue che $u = \mathrm{A}u = u_0$.

Dalla monotonia della $\{\Psi(u_n)\}$, per ogni estratta $\{u_{n_k}\}$, si ha inoltre

$$\inf \Psi(u_{n_k}) = \lim \Psi(u_{n_k}) \leq \lim \Psi(u_k) = \inf \Psi(u_k) \leq \inf \Psi(u_{n_k})$$

e dunque

$$\lim \Psi(u_{n_k}) = \lim \Psi(u_n)\,. \tag{8}$$

Se $\{u_{n_k}\} \to \bar{u}$, per la continuità di A, $\{\mathrm{A}u_{n_k}\} \to \mathrm{A}\bar{u}$ e quindi dalla (8):

$$\lim \Psi(u_{n_k}) = \Psi(\bar{u}) = \lim \Psi(\mathrm{A}u_{n_k}) = \Psi(\mathrm{A}\bar{u})\,.$$

Pertanto $\bar{u}$ è soluzione del problema P. Si può concludere che ogni successione convergente estratta dalla $\{u_n\}$ tende ad una soluzione del problema P. In particolare, se tale problema ammette un'unica soluzione u_0, la successione $\{u_n\}$ converge ad u_0.

Un pregio del metodo di calcolo descritto è quello di essere applicabile a qualsiasi problema che rientri nel modello generale. Purtroppo però la sua rapidità di convergenza risulta tanto più insoddisfacente quanto più accentuato è il comportamento unilaterale. A causa di ciò, proprio in molti casi di grande interesse in ingegneria strutturale, esso richiede un notevole tempo di calcolo e talvolta risulta praticamente inapplicabile.

Si espone ora un nuovo metodo iterativo, detto di rilassamento geometrico, che, pur non essendo generale come il precedente, può essere applicato con successo ad una vasta classe di problemi strutturali. In tali casi esso è sempre caratterizzato da una grande rapidità di convergenza.

Con riferimento al problema P, per ogni $u \in \mathrm{V}$ sia definito un proiettore ortogonale in energia $\mathrm{P}(u)$ di W su un sottospazio $\mathrm{W}(u)$, e tale che

$$\mathrm{P}(u) \operatorname{def} u = \Pi \operatorname{def} u \qquad \forall u \in \mathrm{V} .$$

Si consideri quindi il problema di minimo

$$\min_{u \in \mathrm{V}} \tfrac{1}{2} \| \operatorname{def} u - \mathrm{P}(u_n) \operatorname{def} u \|_{\mathrm{S}}^2 - l(u) \tag{9}$$

e si definisca il sottospazio

$$\mathrm{V}_n = \{u \in \mathrm{V} : \operatorname{def} u = \mathrm{P}(u_n) \operatorname{def} u\} .$$

Il problema (9) ammette un'unica soluzione u_{n+1} se e solo se $\mathrm{V}_n = \{0\}$.
Si osservi che $\mathrm{V}_n = \{0\} \Rightarrow \mathrm{P}(u_n) \neq \mathrm{I}$, dove I è l'identità su W.
Mostriamo ora che

$$\mathrm{P}(u_n) \neq \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{P}(u_{n+1}) \neq \mathrm{I} . \tag{10}$$

Infatti, essendo u_{n+1} soluzione del problema (9), se $\mathrm{P}(u_n) \neq \mathrm{I}$, si ha

$$l(u_{n+1}) = \| \operatorname{def} u_{n+1} - \mathrm{P}(u_n) \operatorname{def} u_{n+1} \|_{\mathrm{S}}^2 > 0 . \tag{11}$$

Se fosse $\mathrm{P}(u_{n+1}) = \mathrm{I}$, risulterebbe

$$\operatorname{def} u_{n+1} = \mathrm{P}(u_{n+1}) \operatorname{def} u_{n+1} = \Pi \operatorname{def} u_{n+1} ,$$

cioè $u_{n+1} \in \mathrm{V}_k - \{0\}$.

Per la condizione di compatibilità C si avrebbe allora $l(u_{n+1}) < 0$, il che contraddice la (11).

Si supponga ora che

$$\mathrm{P}(u_n) \neq \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{V}_n = \{0\} \qquad \forall n . \tag{12}$$

Dalla (10) e dalla (12) segue che, scelto u_1 tale che $\mathrm{P}(u_1) \neq \mathrm{I}$, risulta

$$\mathrm{V}_n = \{0\} \qquad \forall n .$$

Se è verificata l'ipotesi (12) il problema (9) definisce quindi l'algoritmo

$$u_{n+1} = \mathrm{A} u_n .$$

Si vuole ora dimostrare che, se la successione $\{u_n\}$ generata dall'algoritmo A converge, il suo limite $\bar{u}$ è soluzione del problema P. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathrm{V}} \tfrac{1}{2} \| \operatorname{def} u - \mathrm{P}(u_n) \operatorname{def} u \|_{\mathrm{S}}^2 - l(u) = \\ = \tfrac{1}{2} \| \operatorname{def} u_{n+1} - \mathrm{P}(u_n) \operatorname{def} u_{n+1} \|_{\mathrm{S}}^2 - l(u_{n+1}) \end{aligned}$$

e, passando al limite,

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathrm{V}} \tfrac{1}{2} \| \operatorname{def} u - \mathrm{P}(\bar{u}) \operatorname{def} u \|_{\mathrm{S}}^2 - l(u) = \\ = \tfrac{1}{2} \| \operatorname{def} \bar{u} - \mathrm{P}(\bar{u}) \operatorname{def} \bar{u} \|_{\mathrm{S}}^2 - l(\bar{u}) . \end{aligned} \tag{13}$$

Poiché $P(\bar{u}) \operatorname{def} \bar{u} = \Pi \operatorname{def} \bar{u}$, la (13) è equivalente alla condizione variazionale di equilibrio

$$S(\operatorname{def} \bar{u} - \Pi \operatorname{def} \bar{u}), \operatorname{def} v) = l(v) \qquad \forall v \in V$$

ed essendo verificato il legame costitutivo con $\varepsilon = \Pi \operatorname{def} \bar{u}$, ne segue che $\bar{u}$ è soluzione del problema P.

4. ANALISI DI STRUTTURE COSTITUITE DA MATERIALI NON RESISTENTI A TRAZIONE

Si considera, a titolo d'esempio il problema del calcolo di strutture monodimensionali piane soggette a flessione composta e costituite da materiale elastico lineare a compressione e non resistente a trazione.

Il legame costitutivo è pertanto definito, in ogni punto x della generica sezione trasversale, delle relazioni

$$\sigma(x) = E \operatorname{def} u(x) \qquad \text{per} \quad \operatorname{def} u(x) \leq 0$$

$$\sigma(x) = 0 \qquad \text{per} \quad \operatorname{def} u(x) \geq 0$$

dove σ è la tensione normale, E il modulo di elasticità in compressione, u un campo di spostamenti ammissibili e $\operatorname{def} u$ la corrispondente dilatazione nella direzione dell'asse della struttura.

Nell'ambito della teoria tecnica della trave, si considera valido il principio di conservazione delle sezioni piane.

Identificando gli spazi W e W′ delle deformazioni e delle tensioni con lo spazio $L^2(\Omega)$ delle funzioni di quadrato sommabile nel dominio Ω della struttura, il legame costitutivo è espresso in termini globali dalle relazioni:

$$\sigma = E(\operatorname{def} u - \delta) \qquad u \in V \qquad \delta \in K$$

$$(\sigma, \varepsilon - \delta) < 0 \qquad \forall \varepsilon \in K$$

dove V è lo spazio di dimensione finita degli spostamenti ammissibili e K è il cono chiuso e convesso delle dilatazioni positive.

Simulando la fessurazione a trazione del materiale col campo di dilatazioni anelastiche $\delta \in K$, si riconosce quindi che il modello strutturale in esame costituisce un caso particolare di quello generale formulato in questa Nota.

Ad esso possono dunque applicarsi i metodi di calcolo considerati. Per quanto concerne il metodo di rilassamento geometrico si osservi che $P(u)$ è in questo caso definito come il proiettore ortogonale sul sottospazio $W(u)$ costituito dai campi di dilatazione il cui supporto coincide con quello della parte positiva di $\operatorname{def} u$.

L'algoritmo iterativo corrispondente a tale definizione del proiettore consiste nel considerare, ad ogni passo, il problema dell'equilibrio elastico di una struttura a «geometria variata» coincidente con quella parte della struttura data che risulta compressa al passo precedente.

Esempi di applicazione numerica al problema della pressoflessione [4] ed al calcolo delle sollecitazioni in strutture ad arco [5], nel caso di materiale non resistente a trazione, mostrano una rapida convergenza dell'algoritmo di rilassamento geometrico. In effetti una soluzione sufficientemente approssimata si ottiene in $4 \sim 6$ passi di iterazione. È da rilevare che il calcolo della soluzione degli stessi problemi strutturali, affrontato con il metodo di rilassamento classico, richiede in genere un numero di passi di iterazione da 10 a 20 volte superiore.

5. Analisi incrementale di strutture elastoplastiche

La risposta incrementale di una struttura in campo elastico–perfettamente plastico è descritta dalle relazioni costitutive

$$\dot{\sigma} = S(\operatorname{def}\dot{u} - \dot{\varepsilon}_p) \qquad \dot{u} \in V,\ \dot{\varepsilon}_p \in K$$

$$(\sigma, \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p) \leq \sigma \qquad \forall \dot{\varepsilon} \in K$$

e dalla condizione di equilibrio

$$(\dot{\sigma}, \operatorname{def}\dot{v}) = l(\dot{v}) \qquad \forall \dot{v} \in V$$

dove S è la rigidezza elastica e K è il cono chiuso e convesso definito localmente dalle seguenti proprietà. Sia $D(x)$ il dominio elastico (chiuso e convesso nello spazio degli stati tensionali) nel punto x della struttura e $\partial D(x)$ la sua frontiera. Allora:

$K(x) = \{0\}$ se $\sigma(x)$ è interno a $D(x)$,

$K(x)$ è il cono delle normali esterne a $D(x)$ nel punto $\sigma(x)$ se $\sigma(x) \in \partial D(x)$.

Si riconosce pertanto che il problema dell'analisi incrementale di una struttura con comportamento elastico–perfettamente plastico rientra nel modello generale considerato in questa Nota e può formularsi come problema di minimo

$$\min \{\tfrac{1}{2} \| \operatorname{def}\dot{u} - \Pi \operatorname{def}\dot{u} \|_S^2 - l(\dot{u}) / \dot{u} \in V\} .$$

Per applicare a questo problema l'algoritmo solutivo fornito dal metodo di rilassamento geometrico si considera il proiettore $P(\dot{u})$ di W sul sottospazio $W(\dot{u})$ generato da $\Pi \operatorname{def}\dot{u}$, definito dal problema di minima distanza

$$\min_{\alpha} \| \operatorname{def}\dot{v} - \alpha \Pi \operatorname{def}\dot{u} \|_S = \| \operatorname{def}\dot{v} - P(\dot{u}) \operatorname{def}\dot{u} \|_S$$

con α reale.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. FICHERA (1972) – *Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints*. Handbuch der Physik band VI a/2 Springer.

[2] M. CAPURSO (1969) – *A general method for the incremental solution of elastic-plastic problems*. Meccanica n° 4, vol. IV.

[3] G. ROMANO e M. ROMANO (1978) – *La pressoflessione nei materiali non resistenti a trazione*. Atti Ist. Scienza delle Costr. Univ. Napoli, n° 279.

[4] G. ROMANO e M. ROMANO (1978) – *The numerical performance of a new iterative method for unilateral problems of structural mechanics*. Atti Ist. Scienza delle Costr. Univ. Napoli, n° 281.

[5] G. ROMANO e M. ROMANO (1979) – *Sul calcolo delle strutture ad arco non resistenti a trazione*. Atti Ist. Scienza delle Costr. Univ. Napoli, n° 308.