

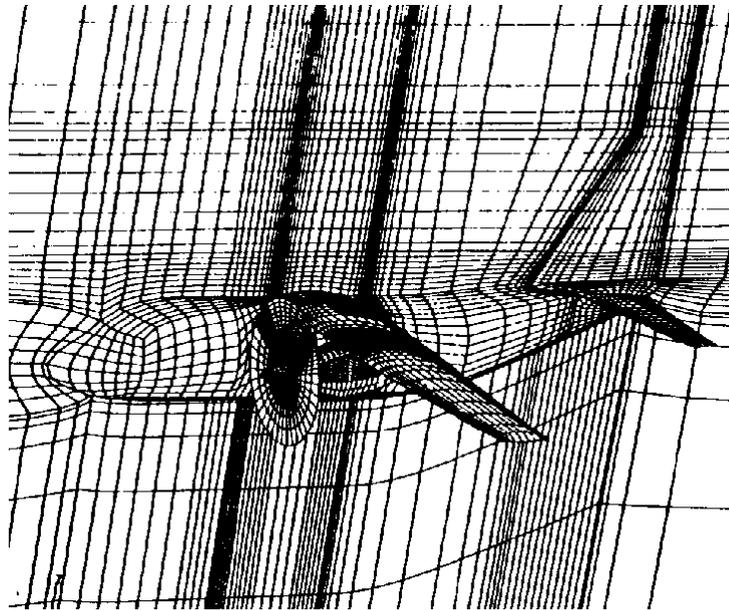
Università degli Studi di Napoli Federico II  
Polo delle Scienze e delle Tecnologie  
Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale



Renato Tognaccini

Lezioni di  
**AERODINAMICA  
DELL'ALA ROTANTE**

Eliche, rotori ed aeromotori



a.a. 2008-2009

*In copertina:  
griglia computazionale per analisi comprimibile, non viscosa, di un velivolo  
da trasporto. L'influenza dell'elica è simulata mediante un modello di disco  
attuatore (da Kassies & Tognaccini, AIAA Paper 90-1590, 1990).*

Parte I

**AERODINAMICA  
DELL'ELICA**



# Capitolo 1

## Teorie impulsive

### 1.1 Il modello di disco attuatore

L'analisi aerodinamica delle eliche comporta difficoltà non indifferenti; per uno studio completo occorrerebbe infatti considerare un campo di moto viscoso, instazionario e comprimibile (anche per velocità asintotiche basse la rotazione della pala comporta velocità relative molto alte alle estremità) intorno a geometrie di forma complessa.

È però possibile semplificare notevolmente il problema, in maniera perfettamente analoga alla teoria della linea portante per l'ala finita, se si rinuncia a conoscere il dettaglio del campo in prossimità dell'elica stessa. Una rigorosa giustificazione matematica di tale modello, non discussa in queste pagine, è possibile, così come per l'ala finita, mediante una teoria di perturbazioni asintotiche (Brouwer, 1992).

Trascurare il campo di moto in prossimità dell'elica significa considerare, nella nostra scala di lunghezze, l'elica di spessore infinitesimo con variazioni repentine delle grandezze fluidodinamiche attraverso di essa: l'elica viene cioè modellata come una superficie di discontinuità per il campo.

Consideriamo un flusso stazionario, non viscoso, incomprimibile e di velocità asintotica  $V_\infty$  che investe normalmente una superficie circolare di spessore infinitesimo e diametro  $D$ . Il flusso è governato dalle equazioni di Eulero; sappiamo inoltre dalla aerodinamica che il flusso di massa per unità di superficie normale al disco deve essere continuo mentre sono ammissibili discontinuità di pressione: abbiamo così ottenuto il modello di disco attuatore per l'elica. Inoltre, essendo il livello energetico della corrente a valle del disco diverso da quello del flusso esterno, è possibile che a valle si formi una discontinuità di contatto: la scia dell'elica. La variazione di energia che subisce il fluido attraverso il disco, per la conservazione dell'energia, deve essere necessariamente conseguente ed uguale ad una potenza spesa  $P$ .

Indichiamo con  $p'$  e  $p' + \Delta p$  rispettivamente le pressioni medie a monte ed a valle del disco ed applichiamo il bilancio di quantità di moto integrale al volume racchiuso tra la superficie  $S_\infty$  ed  $A$ , dove  $A$  è il disco attuatore e  $S_\infty$  la superficie all'infinito che racchiude l'intero campo di moto:

$$\int_{S_\infty} (p \underline{\underline{I}} + \rho \underline{\underline{V}} \underline{\underline{V}}) \cdot \underline{\underline{n}} dS - \Delta p A \underline{\underline{k}} = 0 , \quad (1.1)$$

con  $\underline{n}$  il versore normale uscente dalla superficie  $S_\infty$  ed  $\underline{k}$  il versore dell'asse  $z$  allineato con  $V_\infty$ .

La spinta che agisce sul disco è quindi data da

$$T = \Delta p A = \underline{k} \cdot \int_{S_\infty} (p \underline{I} + \rho \underline{V} \underline{V}) \cdot \underline{n} \, dS . \quad (1.2)$$

Se consideriamo il tubo di flusso di portata  $\dot{m}$  che attraversa il disco di superficie  $A$  possiamo esprimere la conservazione della massa attraverso il tubo di flusso con le relazioni

$$\dot{m} = \rho V_\infty A_c = \rho V_j A_j , \quad (1.3)$$

dove il pedice  $j$  specifica quantità medie nella scia del disco all'infinito a valle,  $A_c$  è la sezione del tubo all'infinito a monte (area di cattura)  $A_j$  la sezione all'infinito a valle della scia. Decomponendo  $S_\infty$  come  $S_\infty = S_{\infty ext} \cup A_c \cup A_j$  si ottiene

$$T = \underline{k} \cdot \int_{S_{\infty ext}} [(p - p_\infty) \underline{n} + \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n}] \, dS + \dot{m} (V_j - V_\infty) + (p_j - p_\infty) A_j . \quad (1.4)$$

È possibile verificare che l'integrale nella (1.4) è nullo in quanto, senza ledere la generalità, si può considerare come superficie laterale all'infinito di  $S_{\infty ext}$  una superficie di corrente per cui il flusso di quantità di moto che la attraversa è nullo e tenere conto della conservazione della massa attraverso le superfici all'infinito a monte e valle. Inoltre anche il termine di pressione dà un contributo nullo poichè all'infinito l'integrando è di ordine  $1/r^2$  (il comportamento all'infinito della soluzione è dato da una distribuzione di sorgenti lungo l'asse  $z$ , Ashley & Landahl (1965) pag. 102). Invece l'ultimo termine di questa relazione non è in generale uguale a zero in quanto nella scia a valle del disco potrebbero essere presenti dei termini rotazionali che comportano la presenza di un gradiente di pressione (radiale) anche nella sezione all'infinito a valle della scia.

$$T = \dot{m} (V_j - V_\infty) + (p_j - p_\infty) A_j . \quad (1.5)$$

Applicando in modo analogo il bilancio di quantità di moto al tubo di flusso a monte ed a valle del disco e sommando le due relazioni si ottiene

$$T = \dot{m} (V_j - V_\infty) + (p_j - p_\infty) A_j + \underline{k} \cdot \int_{S_t} (p - p_\infty) \underline{n} \, dS , \quad (1.6)$$

dove  $S_t$  è la superficie laterale del tubo di flusso. Confrontando la (1.6) con la (1.5) si deduce che

$$\underline{k} \cdot \int_{S_t} (p - p_\infty) \underline{n} \, dS = 0 , \quad (1.7)$$

che non è altro che l'espressione del paradosso di D'Alembert per un corpo di lunghezza infinita. È da notare che la relazione (1.7) è valida anche quando  $A_j \neq A_c$ .

## 1.2 Teoria impulsiva semplice

La prima teoria basata sul modello di disco attuatore fu sviluppata da Rankine nella seconda metà dell'ottocento.

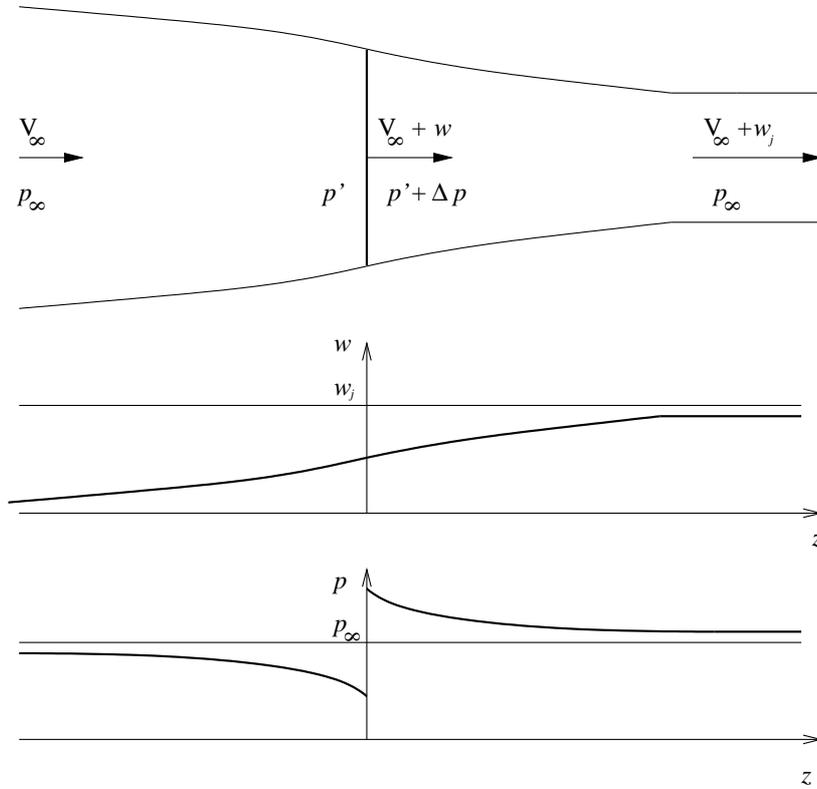


Figura 1.1: Il modello di disco attuatore nella teoria impulsiva semplice.

Ipotizziamo che le grandezze fisiche nel tubo di flusso siano solo funzione di  $z$  che è equivalente, come accennato nel paragrafo precedente, a considerare ad ogni stazione  $z$  una grandezza media nel tubo. Supponiamo inoltre che attraverso il disco non si abbiano discontinuità della componente tangenziale di velocità, cioè che il disco non introduca una rotazione del flusso (come vedremo in seguito questo non è possibile nel caso pratico); questa ipotesi comporta  $p_j = p_\infty$  per cui nella (1.5) si annulla il termine di pressione a valle della scia.

Indicando con  $V_\infty + w$  e  $V_\infty + w_j$  rispettivamente le velocità sul disco ed infinitamente a valle possiamo applicare il teorema di Bernoulli alle due porzioni di tubo di flusso separate dal disco; sottraendo le due relazioni si ottiene

$$\Delta p = \rho w_j \left( V_\infty + \frac{1}{2} w_j \right), \quad (1.8)$$

mentre dalle (1.2) e (1.5):

$$\Delta p = \rho w_j (V_\infty + w), \quad (1.9)$$

per cui, confrontando le (1.8) e (1.9) si ottiene il risultato fondamentale della teoria impulsiva semplice

$$w = \frac{1}{2} w_j, \quad (1.10)$$

cioè l'induzione all'infinito a valle ( $w_j$ ) è il doppio dell'induzione sul disco ( $w$ ) e la spinta è data da

$$T = 2\rho A(V_\infty + w)w . \quad (1.11)$$

Quindi, se l'elica è propulsiva ( $T > 0$ ), la velocità  $V(z)$  è crescente ed il tubo di flusso deve subire una contrazione lungo  $z$  (figura 1.1).

La potenza  $P$  necessaria per ottenere la spinta  $T$  è data, con questo modello, dalla variazione di energia cinetica che subisce il flusso trattato dal disco

$$P = \dot{m} \left[ \frac{1}{2}(V_\infty + w_j)^2 - \frac{1}{2}V_\infty^2 \right] = T(V_\infty + w) , \quad (1.12)$$

per cui il rendimento di questo sistema (rendimento ideale) è

$$\eta = \frac{TV_\infty}{P} = \frac{1}{1+a} , \quad (1.13)$$

dove con  $a = w/V_\infty$  si è indicato il cosiddetto fattore di interferenza assiale.  $P$  è la potenza che deve essere fornita all'asse dell'elica, che indicando con  $Q$  e  $\Omega$  la coppia e la velocità angolare dell'albero è pari a  $P = Q\Omega$ .

La relazione (1.13) fornisce un primo importantissimo criterio progettuale: *per ottimizzare il rendimento di un'elica, assegnata la spinta, occorre minimizzare il fattore di interferenza assiale, cioè bisogna utilizzare il più grande diametro possibile.*

Il regime di funzionamento dell'elica è individuato dal rapporto di funzionamento

$$J = \frac{V_\infty}{nD} , \quad (1.14)$$

dove  $n$  il numero di giri dell'elica nell'unità di tempo. Spesso è conveniente definire il rapporto di funzionamento in termini della velocità angolare dell'elica  $\Omega$  e del suo raggio  $R$  con la relazione

$$\lambda = \frac{V_\infty}{\Omega R} , \quad (1.15)$$

con la quale si evince meglio il significato di rapporto di funzionamento come rapporto tra velocità di avanzamento dell'elica e velocità di rotazione alla sua estremità.

Spinta, coppia e potenza possono essere più comodamente trattate introducendo i coefficienti di spinta  $C_T$ , di coppia  $C_Q$  e di potenza  $C_P$ :

$$T = C_T \rho n^2 D^4 , \quad Q = C_Q \rho n^2 D^5 , \quad P = C_P \rho n^3 D^5 . \quad (1.16)$$

Essendo  $C_P = 2\pi C_Q$ , è incognito, oltre al  $C_T$ , solo uno degli altri due coefficienti; le curve  $C_T(J)$ ,  $C_P(J)$  (o equivalentemente  $C_Q(J)$ ) e  $\eta(J)$  vengono dette curve caratteristiche dell'elica; la loro conoscenza è il modo più sintetico e conveniente per definirne le prestazioni. Questi coefficienti sono legati tra loro dalla definizione di rendimento:

$$\eta = J \frac{C_T}{C_P} . \quad (1.17)$$

Spesso in letteratura si trova una scelta leggermente diversa dell'adimensionalizzazione di spinta, coppia e potenza con una conseguente diversa definizione dei coefficienti adimensionali

$$T_c = \frac{T}{\rho \Omega^2 \pi R^4} , \quad Q_c = \frac{Q}{\rho \Omega^2 \pi R^5} = \frac{P}{\rho \Omega^3 \pi R^5} , \quad (1.18)$$

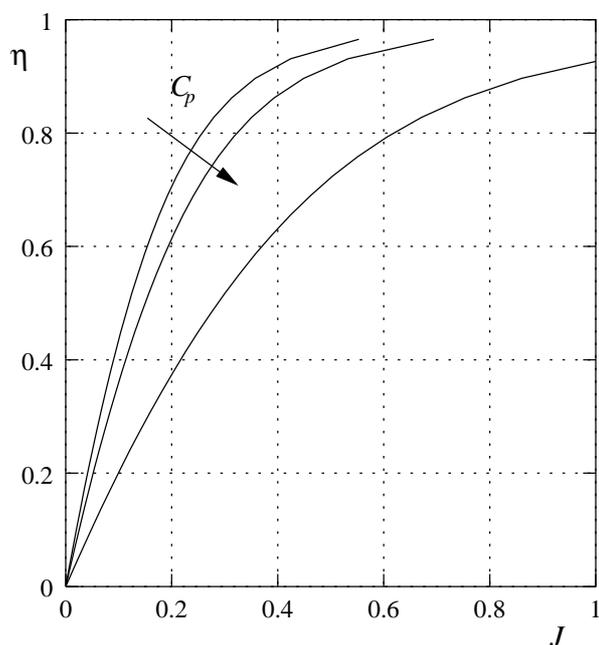


Figura 1.2: Andamento del rendimento ideale in funzione del rapporto di funzionamento a potenza costante secondo la teoria impulsiva semplice ( $C_p = 0.01, 0.02, 0.03$ ).

mentre il rendimento in termini dei nuovi coefficienti è:

$$\eta = \lambda \frac{T_c}{Q_c} . \quad (1.19)$$

In base alla (1.13) si ottiene

$$\eta P = TV_\infty = \frac{\pi}{2} D^2 \rho V_\infty^3 (1+a)a \quad (1.20)$$

che consente di esprimere il rendimento ideale della teoria impulsiva semplice in funzione di  $C_P$  ed  $J$ :

$$\frac{1-\eta}{\eta^3} = \frac{2}{\pi} C_P \frac{1}{J^3} . \quad (1.21)$$

La teoria impulsiva semplice non fornisce nessuna informazione relativa alle caratteristiche  $C_T(J)$  e  $C_P(J)$ ; tramite la (1.21) è però possibile una prima stima di  $\eta(J)$  fissato il coefficiente di potenza (vedi figura 1.2).

### 1.3 Distribuzione di carico ottima

Rimuoviamo l'ipotesi di induzione assiale uniforme sull'elica, cioè consideriamo  $w = w(r)$ . Ipotizziamo inoltre che, ogni corona elementare del disco attuatore di area  $2\pi r dr$  non subisca l'interazione delle altre; in questo caso la spinta è

calcolabile applicando direttamente i risultati della teoria impulsiva semplice alla corona elementare:

$$dT = 4\pi r \rho V_\infty^2 (1+a) a dr; \quad T = 4\pi \rho V_\infty^2 \int_0^R (1+a) a r dr. \quad (1.22)$$

Analogamente, per la potenza  $P$  spesa per ottenere la spinta  $T$  si ottiene

$$dP = 4\pi r \rho V_\infty^3 (1+a)^2 a dr; \quad P = 4\pi \rho V_\infty^3 \int_0^R (1+a)^2 a r dr. \quad (1.23)$$

Abbiamo ottenuto in questo modo la teoria impulsiva semplice differenziale.

È interessante verificare per quale distribuzione radiale di induzione assiale  $a(r)$  si ottiene il rendimento massimo, cioè si minimizza la potenza  $P$  necessaria per ottenere un'assegnata spinta  $T$ . È questo un classico problema di minimo vincolato che può essere semplicemente risolto con il calcolo delle variazioni (cfr. Appendice A). La condizione è soddisfatta quando la variazione del funzionale  $I = P + \Lambda T$  è nulla per qualunque variazione  $\delta a(r)$  ( $\Lambda$  è il moltiplicatore di Lagrange). Essendo spinta e potenza esprimibili nella forma

$$T = \int_0^R \mathcal{F}[a(r), r] dr, \quad P = \int_0^R \mathcal{G}[a(r), r] dr, \quad (1.24)$$

l'equazione di Eulero (A-8) da risolvere per ottenere il minimo in questo caso è:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} + \Lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = 0, \quad (1.25)$$

la (1.25) è soddisfatta se  $a(r) = \text{costante}$ , cioè: nell'ambito della teoria impulsiva semplice, *assegnata la spinta, il rendimento di un'elica di diametro fissato è massimo se il carico è distribuito uniformemente sul disco*. Infatti dalla (1.22) si ottiene

$$\frac{dT}{dA} = \frac{1}{2\pi r} \frac{dT}{dr} = \rho V_\infty (1+a) a, \quad (1.26)$$

che è costante se  $a$  è costante.

Abbiamo così trovato un secondo importante criterio guida per la progettazione di un'elica. È da notare comunque che questo risultato è stato ottenuto ipotizzando valida la teoria impulsiva semplice differenziale (formule (1.22-1.23)). Benché l'evidenza sperimentale abbia mostrato l'applicabilità di questa teoria e l'accuratezza dei risultati ottenibili nel caso di eliche poco caricate e con trascurabili effetti rotazionali (Von Mises, 1959), l'ipotesi di mancanza di interazione tra le corone elementari che costituiscono il disco dell'elica non ha un valido supporto fisico-matematico.

## 1.4 Teoria impulsiva generale

La teoria impulsiva semplice è stata derivata considerando solo le variazioni di velocità assiali; si sono invece trascurate le variazioni di velocità radiale ( $u$ ) e tangenziale o rotazionale ( $v$ ) rispetto all'asse del disco attuatore. La rotazione dell'elica con velocità angolare  $\Omega$  induce necessariamente una componente rotazionale della velocità  $v$  a valle dell'elica. Di questo effetto si può tenere conto in

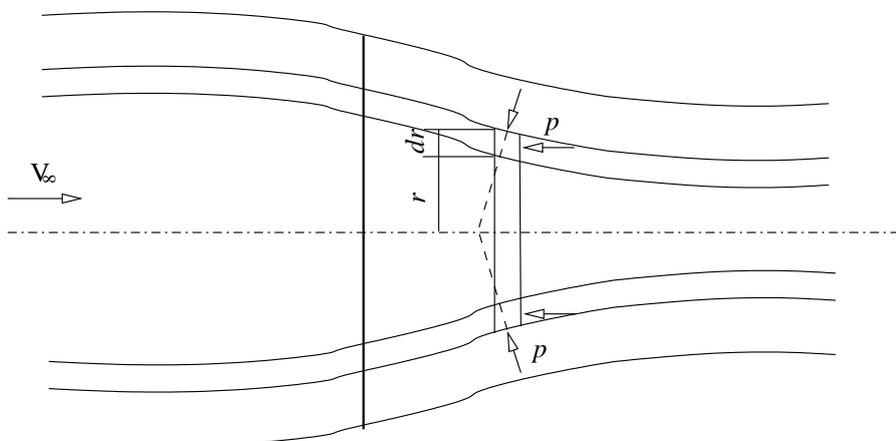


Figura 1.3: Schema del volume di controllo per il bilancio del momento della quantità di moto.

un modello di disco attuatore: questo è quello che ha fatto Betz nello sviluppare la teoria che viene esposta in questo paragrafo.

In questa teoria si continua a trascurare l'effetto di  $u$ , cioè si trascura la "contrazione" della scia; o meglio si considerano  $w$  e  $v$  dello stesso ordine di grandezza mentre si ritiene  $u = O(w^2)$ . Consideriamo quindi il bilancio integrale del momento della quantità di moto <sup>1</sup> per il volume di controllo  $2\pi r dr dz$  delimitato lateralmente dai 2 tubi di flusso passanti per  $r$  ed  $r+dr$  e di lunghezza infinitesima  $dz$  (Figura 1.3):

$$\int_S \rho(\underline{r} \times \underline{V}) \underline{V} \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{r} \times p \underline{n} dS = 0 . \quad (1.27)$$

Data la simmetria del campo di pressioni rispetto all'asse dell'elica, il contributo integrale delle pressioni risulta nullo e gli unici termini diversi da zero sono dati dal flusso convettivo del momento attraverso le 2 superfici perpendicolari all'asse. Inoltre, tenendo conto che, per la conservazione della massa, la portata elementare  $d\dot{m}$  non varia, si ottiene:

$$-vr d\dot{m} + \left[ vr + \frac{\partial}{\partial z}(vr) dz \right] d\dot{m} = 0 , \quad (1.28)$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial z}(vr) = 0 , \quad (1.29)$$

che integrata fornisce

$$vr = \omega r^2 = \text{costante} \quad (1.30)$$

in direzione  $z$ , dove con  $\omega$  si è indicata la velocità angolare della particella rispetto all'asse del disco. Essendo  $\omega$  nulla all'infinito a monte ne consegue che

<sup>1</sup>L'espressione generale, differenziale del bilancio del momento della quantità di moto è  $\rho \frac{D}{Dt} (\underline{r} \times \underline{V}) = \underline{\nabla} \cdot (\underline{r} \times \underline{\tau})^T$ , con  $\underline{\tau}$  il tensore degli sforzi nel fluido.

essa è nulla ovunque a monte dell'elica, mentre non è nulla nella scia a valle dove, sempre per la (1.30), è funzione solo di  $r$  ( $\omega = \omega(r)$ ). La variazione della velocità angolare da 0 ad  $\omega$  attraverso il disco non può che essere conseguenza dell'azione di una coppia  $dQ$  che è quindi data da

$$dQ = \omega r^2 d\dot{m} = 4\pi r^3 \rho V_\infty (1+a) \Omega a' dr . \quad (1.31)$$

Nella (1.31) compare il fattore di interferenza rotazionale:

$$a' = \frac{\omega}{2\Omega} \quad (1.32)$$

associabile ad un'ulteriore perdita di energia, in particolare all'energia cinetica relativa alla rotazione delle particelle di fluido intorno all'asse dell'elica.

È possibile adesso generalizzare la teoria impulsiva semplice tenendo anche in conto queste perdite. In modo analogo al caso precedente semplifichiamo il problema considerando  $\omega(r)$  costante, cioè consideriamo un moto rotazionale rigido delle particelle del tubo di flusso a valle del disco; il moto di ciascuna particella, costituito da una traslazione e da una rotazione, sarà quindi su una traiettoria elicoidale.

Se si trascura il termine  $(p_j - p_\infty)$  le (1.8)-(1.11) non vengono modificate considerando anche il termine  $v = \omega r$ . Infatti dalla (1.30) consegue che  $v$  è costante lungo  $z$  se  $r$  è fissato per cui anche la sua distribuzione media è costante e la variazione  $(v^2 - v_j^2)$  che comparirebbe nell'applicare Bernoulli alla scia è nulla. Invece gli effetti rotazionali non possono essere trascurati nel valutare la potenza  $P$  in quanto occorre considerare nel bilancio energetico anche la variazione di energia cinetica rotazionale  $\int_0^R \frac{1}{2} (\omega r)^2 d\dot{m} = \dot{m} \frac{D^2}{16} \omega^2$ , per cui si ottiene

$$P = T(V_\infty + w) + \dot{m} \frac{D^2}{16} \omega^2 . \quad (1.33)$$

D'altra parte  $P$  può essere ricavata anche per integrazione della (1.31):

$$P = \int_0^R \Omega dQ = \dot{m} \Omega \frac{D^2}{8} \omega ; \quad (1.34)$$

combinando queste ultime due relazioni abbiamo che

$$P = TV_\infty(1+a) + Pa' , \quad (1.35)$$

da cui si ricava il rendimento ideale nella teoria impulsiva generale

$$\eta = \frac{1-a'}{1+a} . \quad (1.36)$$

Le relazioni (1.11), (1.33) e (1.34) costituiscono le equazioni fondamentali della teoria impulsiva generale. Con un'opportuna adimensionalizzazione consentono di legare tra loro  $C_T$ ,  $C_P$  e  $J$  mediante un'unica relazione indipendente dalla forma effettiva delle pale dell'elica.

In questa teoria non sono state considerate le perdite viscosse che evidentemente nascono dall'interazione delle pale dell'elica con il fluido ed il rendimento ideale (1.36) non è superabile in pratica: *la teoria impulsiva ci dà, per ogni valore di  $C_T$  e  $J$ , il limite superiore del rendimento che non può essere superato qualunque sia la forma dell'elica.*

## 1.5 Induzioni assiale e rotazionale ottime

Nell'espressione del rendimento ideale (1.36) sia il fattore di interferenza assiale che quello rotazionale inducono delle perdite di efficienza; d'altro canto mentre  $a \neq 0$  è necessario per ottenere una spinta,  $a'$  induce solo una perdita di energia cinetica rotazionale. Così come fatto nel paragrafo 1.3 è possibile sviluppare una teoria impulsiva, differenziale, generale ed, ancora in modo analogo, è possibile determinare la distribuzione radiale di  $a$  e  $a'$  ottimale per il rendimento.

Le relazioni fondamentali della teoria impulsiva generale differenziale sono:

$$dT = 4\pi\rho V_\infty^2 (1+a) ar dr ; \quad (1.37)$$

$$dQ = 4\pi\rho V_\infty \Omega (1+a) a' r^3 dr ; \quad (1.38)$$

$$dP = 4\pi\rho [V_\infty^3 (1+a)^2 ar dr + \Omega^2 V_\infty (1+a) a'^2 r^3 dr] ; \quad (1.39)$$

$$dP = \Omega dQ . \quad (1.40)$$

Uguagliando la (1.39) alla (1.40) si ottiene una relazione che lega  $a'$  ad  $a$ :

$$\frac{V_\infty^2}{\Omega^2 r^2} (1+a)a = a'(1-a') , \quad (1.41)$$

che si può risolvere in  $a'$  scegliendo la radice minore:

$$a' = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V_\infty^2}{\Omega^2 r^2} (1+a)a} . \quad (1.42)$$

Il soddisfacimento della relazione (1.25), in cui si è calcolato  $\mathcal{G}(a, r)$  utilizzando le (1.40) e (1.42), fornisce la nuova condizione di ottimo:

$$\frac{V_\infty^2}{\Omega^2 r^2} \frac{(1+a)}{(1-2a')} + \frac{a'}{1+2a} = costante . \quad (1.43)$$

Questa soluzione non limita però il risultato ottenuto nella sezione 1.3 in quanto questa condizione è caratterizzata da una distribuzione di  $a(r)$  praticamente costante lungo tutta la pala con variazioni significative solo in prossimità del mozzo, mentre i valori di  $a'$  sono, a sua volta, molto più piccoli di  $a$  a meno, ancora, della zona del mozzo.

## 1.6 Esercizi

1. *Adottando la teoria impulsiva semplice, determinare la relazione che lega il rendimento al rapporto di funzionamento nel caso in cui si supponga la spinta costante. Diagrammare le curve ottenute al variare del coefficiente di spinta.*
2. *Determinare la potenza necessaria per un velivolo monomotore ad elica che deve raggiungere, al livello del mare, una velocità massima di 100 nodi. Allo scopo è necessario conoscere la superficie alare, il diametro dell'elica ed avere una stima, anche approssimativa, del coefficiente di resistenza del velivolo.*

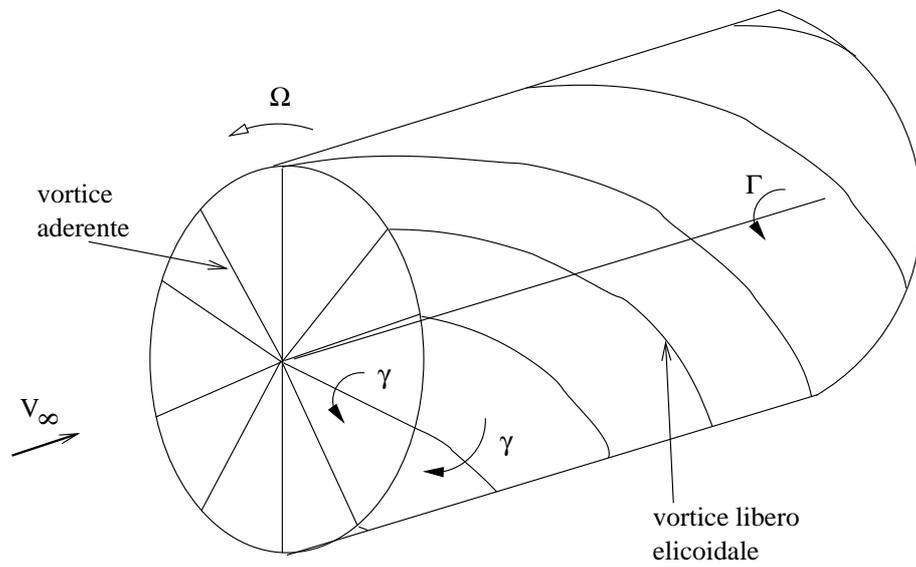


Figura 1.4: Schema del sistema vorticoso dell'elica.

3. Utilizzando i dati dell'esercizio precedente, calcolare l'aggravio di potenza che si ottiene considerando  $a' = 0.005, 0.01, 0.1$ .

## Capitolo 2

# Teorie dell'elemento di pala

### 2.1 Il sistema vorticoso dell'elica

Pur continuando a trattare l'elica come un disco attuatore e' evidente come la genesi della spinta sia associabile alla portanza che agisce sulle pale dell'elica stessa. Ogni pala può essere considerata un'ala finita investita da una corrente asintotica di velocità variabile, in quanto, alla velocità di traslazione dell'elica  $V_\infty$  deve essere sommata vettorialmente la velocità di rotazione  $\Omega r$ . In maniera perfettamente analoga alla teoria della linea portante di Prandtl e' possibile sviluppare un modello in cui l'elica e' un disco sul quale sono disposti radialmente infiniti vortici aderenti di intensità  $\gamma(r)$ . La circolazione totale ad una data stazione  $r$  è data da  $\Gamma(r) = 2\pi\gamma(r)r$ ; se radialmente  $\Gamma(r)$  varia di  $d\Gamma$  deve partire una superficie vorticoso cilindrica di pari intensità. In base ai teoremi sui vortici, la forma dei vortici liberi che costituiscono la superficie cilindrica vorticoso è elicoidale, in quanto devono seguire la traiettoria delle particelle fluide. Nell'ipotesi generalmente valida di elica poco caricata è possibile trascurare l'effetto della contrazione (velocità radiali nulle) per cui l'elicoide descritta da ciascun vortice libero è a generatrice cilindrica ed il sistema di vortici formato, la cosiddetta scia dell'elica, è un cilindro a sezione circolare che ha per base il disco dell'elica e si sviluppa fino all'infinito a valle.

L'elicoide descritta da ciascun vortice libero è ottenibile, in prima approssimazione, componendo la traslazione dell'elica con velocità  $V_\infty$  con la sua rotazione rigida con velocità angolare  $\Omega$ . È facile verificare che il passo dell'elicoide  $p_a$  (passo aerodinamico) è allora dato da

$$\frac{p_a}{D} = J \quad (2.1)$$

relazione che porta ad una interpretazione geometrica del rapporto di funzionamento come passo adimensionale dell'elicoide.

Nota la distribuzione di carico  $\gamma(r)$  è noto il campo di circolazione in tutta la scia ed è possibile risalire al campo di velocità indotto in base alla legge di Biot-Savart, nel caso di filetto vorticoso di intensità costante  $\gamma$  data da

$$\underline{V}(P) = -\frac{\gamma}{4\pi} \int \frac{\underline{R} \times \underline{dl}}{R^3}, \quad (2.2)$$

con  $\underline{R}$  il vettore posizione da  $\underline{dl}$  a  $P$ .

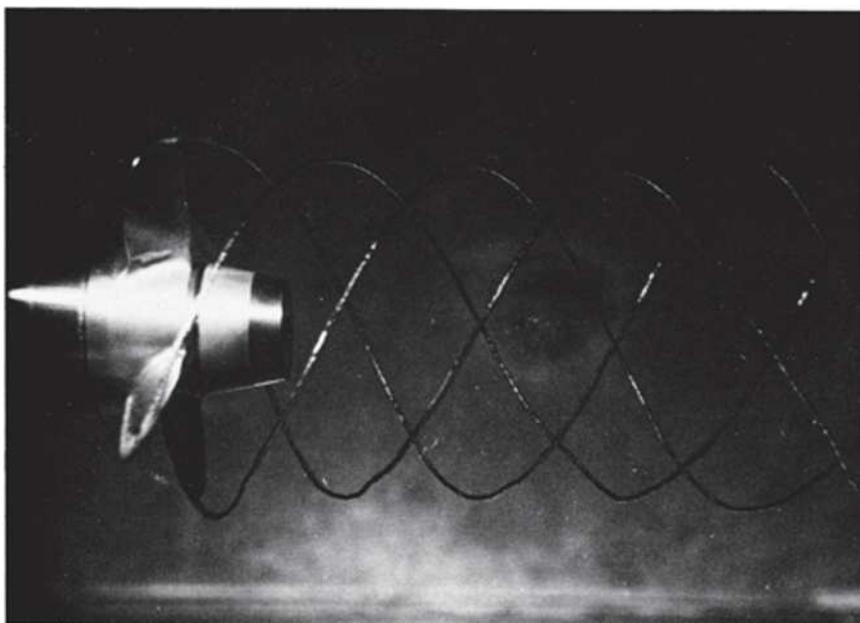


Figura 2.1: Il fenomeno della cavitazione evidenzia il vortice elicoidale che si stacca a valle di un'elica marina (McCormick (1967)).

La comprensione del campo indotto dai vortici liberi è semplificata se lo consideriamo come equivalente al campo indotto da un sistema di vortici liberi rettilinei e paralleli all'asse dell'elica più un sistema di vortici ad anello concentrici che si sviluppa lungo la scia.

Il sistema di vortici ad anello induce all'interno della scia certamente un contributo di velocità assiale  $w$ . La  $w$  in una sezione perpendicolare all'asse dell'elica e posta all'infinito a valle non può che essere doppia rispetto al valore analogo sul disco dell'elica. Infatti sul piano dell'elica l'induzione è dovuta solo al sistema di vortici ad anello che si sviluppa a partire da questa sezione, mentre all'infinito a valle occorre sommare il contributo degli anelli che si sviluppano anche infinitamente a monte. È evidente la congruenza con la teoria impulsiva semplice:  $w_j = 2w$ .

I vortici liberi paralleli all'asse dell'elica inducono nel tubo di flusso, sia a monte che a valle, una velocità rotazionale concorde con la rotazione dell'elica (vedi figura 1.4). Con argomentazioni analoghe al caso precedente la velocità rotazionale indotta all'infinito a valle è doppia rispetto a quella indotta sul disco; l'andamento qualitativo è descritto in figura 2.2. Così come nella teoria della linea di Prandtl l'autoinduzione dei vortici aderenti è nulla; essi inducono una velocità rotazionale a valle concorde con  $\Omega r$ , mentre a monte essa è di verso opposto (vedi figura 1.4). Indicando con  $\omega_l$  la velocità angolare indotta dai vortici liberi, con  $\omega_a$  la velocità angolare (in valore assoluto) indotta dai vortici aderenti ed imponendo la (1.30) a monte ed a valle dell'elica si ottiene (vedi figura 2.2):

$$\forall z > 0 : (\omega_l + \omega_a)r = \omega r; \quad \forall z < 0 : (\omega_l - \omega_a)r = 0 . \quad (2.3)$$

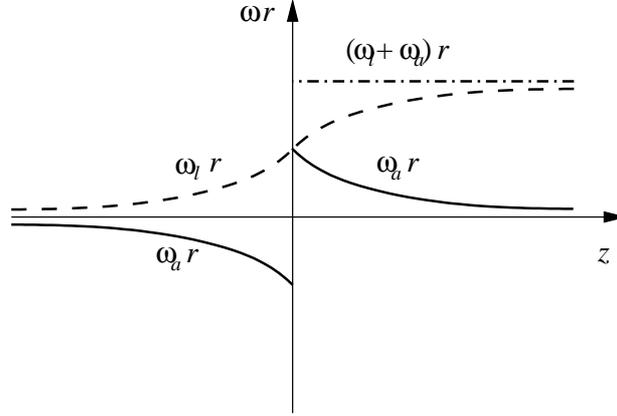


Figura 2.2: Andamento delle velocità rotazionali indotte dal sistema di vortici liberi ( $\omega_l r$ ) ed aderenti ( $\omega_a r$ ).

La velocità angolare indotta sul disco dell'elica  $\omega'(r)$  che dipende solo dal sistema di vortici liberi è:

$$\omega'(r) = \frac{\omega(r)}{2} . \quad (2.4)$$

Il caso di elica uniformemente caricata, come abbiamo visto, è particolarmente importante in quanto molto prossimo alla condizione di massimo rendimento. La spinta elementare esercitata dalla singola pala è chiaramente proporzionale alla portanza locale esercitata per cui, indicando con  $N$  il numero della pale dell'elica,

$$\frac{dT}{dA} \approx \frac{NdL}{2\pi r dr} . \quad (2.5)$$

Nella teoria dell'elemento di pala semplice si suppone che ciascun profilo della pala lavori investito dalla velocità asintotica  $V_e = \sqrt{V_\infty^2 + \Omega^2 r^2}$  per cui, indicando con  $\Gamma$  la circolazione totale alla stazione  $r$  ( $NdL = \rho V_e \Gamma dr$ ), si ottiene

$$\frac{dT}{dA} \approx \rho \Gamma n \sqrt{1 + \frac{J^2 R^2}{\pi^2 r^2}} . \quad (2.6)$$

Per  $J \rightarrow 0$  la portanza varia linearmente lungo la pala mentre la circolazione  $\Gamma$  è costante<sup>1</sup>. Ne consegue che, nel modello di scia vorticoso di un'elica con carico costante lungo il raggio, i vortici liberi elicoidali partono solo dall'estremità del disco con intensità  $\gamma = \Gamma/(2\pi R)$ ; poichè i vortici non possono né iniziare né terminare all'interno del campo, dal centro del disco parte un altro vortice rettilineo in direzione assiale di intensità  $\Gamma$ .

<sup>1</sup>Il risultato è ovviamente esatto nel caso di elica a punto fisso o rotore in hovering.

## 2.2 Velocità assiale indotta da un vortice elicoidale

Determiniamo ora la velocità assiale indotta da un vortice elicoidale di intensità costante  $\gamma$  che parte da  $z = 0$  e si estende fino a  $z = \infty$  valutandola proprio lungo l'asse  $z$  per un generico punto di coordinate  $(0, 0, z_p)$ .

L'equazione parametrica dell'elicoide è data da

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad z = \frac{p\vartheta}{2\pi}; \quad (2.7)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo generatore dell'elicoide e  $p$  il suo passo. L'applicazione della legge di Biot-Savart (2.2) richiede la conoscenza di  $\underline{\mathbf{R}}$  e  $\underline{\mathbf{dl}}$ . Indicando con  $\underline{\mathbf{s}}$  il vettore posizione di un generico punto dell'elicoide e con  $(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}})$  i versori della terna  $(x, y, z)$  si ottiene

$$\underline{\mathbf{R}} = z_p \underline{\mathbf{k}} - \underline{\mathbf{s}} = -r \cos \vartheta \underline{\mathbf{i}} - r \sin \vartheta \underline{\mathbf{j}} + \left( z_p - \frac{p\vartheta}{2\pi} \right) \underline{\mathbf{k}}, \quad (2.8)$$

$$\underline{\mathbf{dl}} = \frac{ds}{d\vartheta} d\vartheta = \left( -r \sin \vartheta \underline{\mathbf{i}} + r \cos \vartheta \underline{\mathbf{j}} + \frac{p}{2\pi} \underline{\mathbf{k}} \right) d\vartheta. \quad (2.9)$$

Essendo  $(-\underline{\mathbf{R}} \times \underline{\mathbf{dl}})_z = r^2 d\vartheta$  la componente assiale della velocità indotta è data da

$$w(0, 0, z_p) = \frac{\gamma r^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\left[ r^2 + \left( \frac{p\vartheta}{2\pi} - z_p \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.10)$$

L'integrale indefinito è riconducibile alla forma

$$\int \frac{dx}{\mathcal{A}^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(2cx + b)}{\mathcal{B}\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.11)$$

con  $\mathcal{A} = a + bx + cx^2$  e  $\mathcal{B} = 4ac - b^2$ , per cui in definitiva si ottiene

$$w(0, 0, z_p) = \frac{\gamma}{2p} \left[ 1 + \frac{\frac{z_p}{r}}{\sqrt{1 + \left( \frac{z_p}{r} \right)^2}} \right]. \quad (2.12)$$

In particolare, essendo da questa relazione  $w(0, 0, 0) = \frac{\gamma}{2p}$ , si ritrova il risultato che l'induzione assiale all'infinito a valle è il doppio di quella sul disco, mentre all'infinito a monte è, ovviamente, nulla.

Se si vuole determinare, nel caso di modello vorticoso del disco attuatore, l'induzione assiale sull'asse dovuta a tutti i vortici liberi che partono dal disco a  $r$  costante, occorre integrare tra 0 e  $2\pi$  in  $r d\vartheta$  la relazione (2.12). Il risultato è esattamente analogo alla formula (2.12), previa sostituzione di  $\gamma$  con  $\Gamma = 2\pi\gamma r$ .

In conclusione, una superficie vorticoso, cilindrica di raggio  $R_R$ , costituita da vortici elicoidali induce una velocità assiale lungo  $z$  data da

$$w(z_p) = w(0) \left[ 1 + \frac{\frac{z_p}{R_R}}{\sqrt{1 + \left( \frac{z_p}{R_R} \right)^2}} \right]; \quad (2.13)$$

il valore di  $w(0)$ , la velocità indotta sul disco stesso, dipende, come visto, dall'intensità della circolazione totale.

## 2.3 Teoria generale dell'elemento di pala

La descrizione della scia come un sistema vorticoso e la conseguente analogia con la teoria della linea portante consentono di superare le contraddizioni tra la teoria semplice dell'elemento di pala e le teorie impulsive.

Supponiamo che sia nota la geometria dell'elica, cioè il numero e la geometria delle pale come mostrato, per esempio in figura 2.3. La teoria generale dell'elemento di pala prevede che il generico profilo lavori in condizioni bidimensionali ed investito (vedi figura 2.4) da una velocità effettiva che dipende dall'induzione del sistema vorticoso:  $V_e^2 = V_\infty^2(1+a)^2 + \Omega^2 r^2(1-a')^2$ . L'angolo di attacco a cui lavora è quindi dato da

$$\alpha = \theta - \varphi, \quad (2.14)$$

con  $\theta$  l'angolo di calettamento e  $\varphi$  definito come

$$\tan \varphi = \frac{V_\infty(1+a)}{\Omega r(1-a')}. \quad (2.15)$$

Posto

$$\lambda_1 = c_l \cos \varphi - c_d \sin \varphi, \quad \lambda_2 = c_l \sin \varphi + c_d \cos \varphi, \quad (2.16)$$

( $c_l$  e  $c_d$  sono i coefficienti di portanza e resistenza del profilo) possiamo esprimere la spinta e la coppia agenti sul singolo elemento come

$$dT' = \lambda_1 \frac{1}{2} \rho V_e^2 c dr; \quad dQ' = \lambda_2 \frac{1}{2} \rho V_e^2 c r dr. \quad (2.17)$$

Indicando con  $N$  il numero delle pale dell'elica e con  $\sigma = Nc/(2\pi r)$  la solidità dell'elica alla stazione  $r$  otteniamo per tutta l'elica:

$$\frac{dT}{dr} = \sigma \pi \lambda_1 r \rho V_e^2; \quad \frac{dQ}{dr} = \sigma \pi \lambda_2 r^2 \rho V_e^2. \quad (2.18)$$

Uguagliando queste espressioni alle (1.22) e (1.31) e tenendo conto che

$$V_e^2 = \frac{V_\infty^2(1+a)^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{\Omega^2 r^2(1-a')^2}{\cos^2 \varphi}, \quad (2.19)$$

si ottiene:

$$\frac{a}{1+a} = \frac{\sigma \lambda_1}{2(1 - \cos 2\varphi)}; \quad \frac{a'}{1-a'} = \frac{\sigma \lambda_2}{2 \sin 2\varphi}. \quad (2.20)$$

La (2.15) ci consente di ricavare il rapporto di funzionamento:

$$J = \pi \bar{r} \frac{1-a'}{1+a} \tan \varphi, \quad (2.21)$$

dove  $\bar{r} = r/R$ .

Le (2.18) possono essere quindi espresse in termini adimensionali:

$$\frac{dc_T}{d\bar{r}} = \frac{\pi^3}{4} \sigma \lambda_1 \bar{r}^3 \frac{(1-a')^2}{\cos^2 \varphi}; \quad \frac{dc_Q}{d\bar{r}} = \frac{\pi^3}{8} \sigma \lambda_2 \bar{r}^4 \frac{(1-a')^2}{\cos^2 \varphi}; \quad \frac{dc_P}{d\bar{r}} = 2\pi \frac{dc_Q}{d\bar{r}}. \quad (2.22)$$

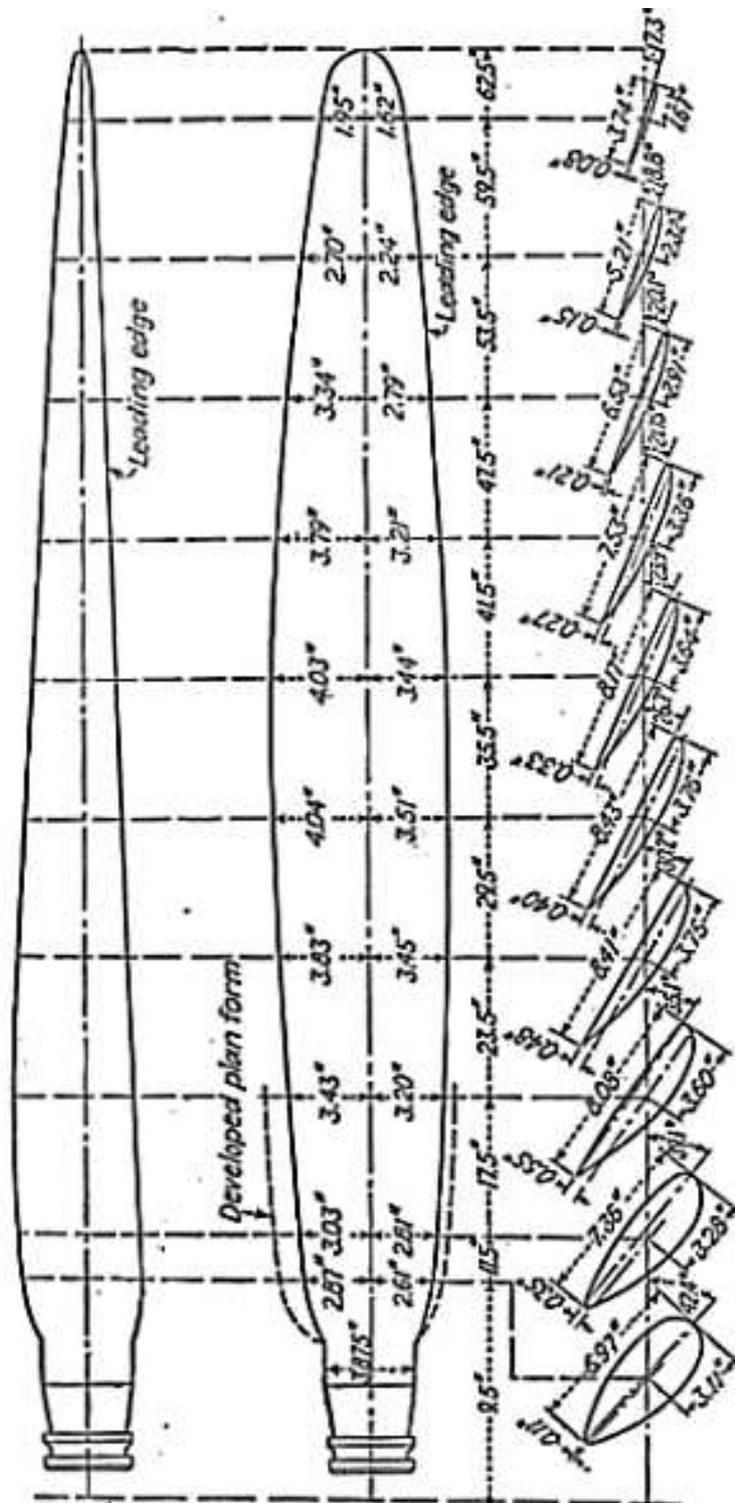


Figura 2.3: Disegno di una classica pala di elica (Weick, 1931).

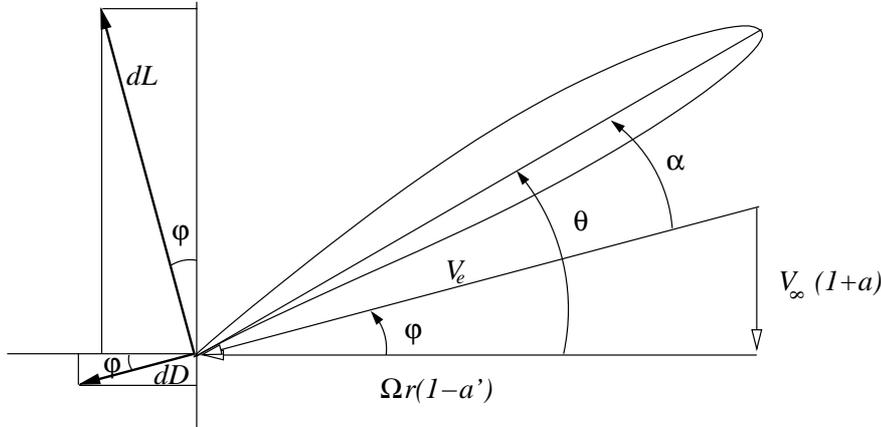


Figura 2.4: Condizioni di funzionamento di un elemento di pala.

$\alpha$	$C_l$	$C_d$	$\phi$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$a$	$a'$	$\frac{dc_T}{d\bar{r}}$	$\frac{dc_P}{d\bar{r}}$	$J$
$-2^\circ$	-0.219	0.0099	$27^\circ$	-0.200	-0.090	-0.036	-0.002	-0.0341	-0.0383	1.26
$0^\circ$	0	0.0087	$25^\circ$	-0.003	0.007	-0.001	0.000	-0.0006	0.0032	1.11
$2^\circ$	0.219	0.0084	$23^\circ$	0.198	0.093	0.053	0.002	0.0316	0.0366	0.95
$4^\circ$	0.438	0.0091	$21^\circ$	0.406	0.165	0.137	0.005	0.0628	0.0628	0.80
$6^\circ$	0.657	0.0108	$19^\circ$	0.618	0.224	0.273	0.007	0.0931	0.0825	0.64
$8^\circ$	0.877	0.0134	$17^\circ$	0.834	0.269	0.501	0.009	0.1226	0.0963	0.48
$10^\circ$	1.096	0.0171	$15^\circ$	1.054	0.300	0.911	0.012	0.1515	0.1048	0.33
$12^\circ$	1.315	0.0217	$13^\circ$	1.277	0.317	1.729	0.014	0.1733	0.1082	0.19

Tabella 2.1: Tabella riepilogativa del funzionamento di un elemento di pala. Elica di figura 2.3, elemento n. 8,  $\bar{r} = 0.76$ ,  $\theta = 25^\circ$ ,  $\sigma = 0.041$ .

Le relazioni ottenute consentono la determinazione delle prestazioni di un'elica di geometria nota come segue. Supponiamo che sia assegnato il diametro  $D$ , il numero di pale  $N$ , le distribuzioni  $\theta(\bar{r})$ ,  $c(\bar{r})$  (calettamento e corda lungo il raggio), la distribuzione di profili alari utilizzati e le loro caratteristiche aerodinamiche  $c_l = c_l(\alpha, Re)$ ,  $c_d = c_d(c_l, Re)$ <sup>2</sup> Dividiamo la pala in un certo numero di stazioni variando  $\bar{r}$ ; per ciascun elemento di pala possiamo determinare una tabella che caratterizza il suo funzionamento al variare dell'angolo di attacco effettivo  $\alpha$ . Infatti fissato  $\alpha$  dalla (2.14) possiamo ricavare  $\varphi$  e, conoscendo la corda  $c(\bar{r})$  possiamo determinare la solidità  $\sigma$ . Utilizzando le caratteristiche aerodinamiche del profilo (è ipotizzabile una debole dipendenza dal numero di Reynolds, nulla vieta poi di reiterare il calcolo con una migliore previsione del  $Re$  di funzionamento) possiamo calcolare  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dalle (2.16). Le (2.20) consentono la determinazione di  $a$  ed  $a'$ , mentre la (2.21) porta al calcolo di  $J$ . Infine dalle (2.22) si ottengono i gradienti di spinta e potenza o, alternativamente, spinta e coppia. Le informazioni sul singolo elemento di pala sono riassumibili in tabella come nell'esempio di tabella 2.1. Noti i dati per ogni elemento di pala è possibile determinare le curve  $\frac{d}{d\bar{r}}C_T(\bar{r})$  e  $\frac{d}{d\bar{r}}C_P(\bar{r})$  per un assegnato rapporto di funzionamento  $J$ , dalle quali è possibile determinare i coefficienti di spinta e

<sup>2</sup>Essendo, per piccole incidenze, la dipendenza dal numero di Reynolds debole spesso si utilizzano espressioni di  $c_l$  e  $c_d$  solo in funzione di  $\alpha$ .

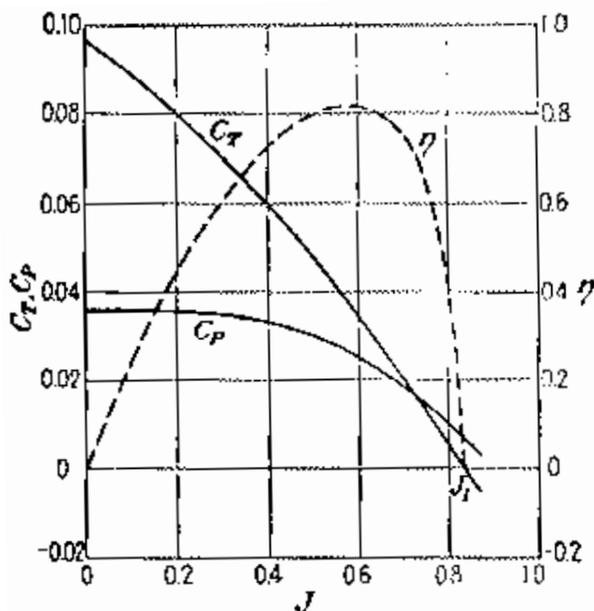


Figura 2.5: Curve caratteristiche  $\eta$ ,  $C_T$  e  $C_P$  in funzione di  $J$  per l'elica di figura 2.3 con calettamento nominale  $\theta(0.75) = 15.5^\circ$ , (Weick, 1931).

potenza:

$$C_T = \int_0^1 \frac{d}{d\bar{r}} C_T(\bar{r}) d\bar{r} ; \quad C_P = \int_0^1 \frac{d}{d\bar{r}} C_P(\bar{r}) d\bar{r} . \quad (2.23)$$

Infine si può ricavare il rendimento dell'elica dalla (1.17); è così completa la conoscenza delle caratteristiche dell'elica.

## 2.4 Regimi di funzionamento

Per  $J = 0$ ,  $a \rightarrow \infty$ ; dalle (2.20) si ottiene  $4 \sin^2 \varphi = \sigma \lambda_1$ . In genere (per eliche progettate per funzionare a  $J$  medio-bassi), il coefficiente di spinta è massimo per  $J = 0$  mentre diminuisce con legge quasi lineare all'aumentare del rapporto di avanzamento in quanto diminuisce l'angolo di attacco effettivo degli elementi di pala. Per la stessa ragione il coefficiente di potenza diminuisce con legge pressappoco parabolica poichè esso dipende principalmente dal coefficiente di resistenza dei profili che appunto varia con legge quadratica con l'angolo di attacco. Quando  $\lambda_1 = 0$  ( $J = J_1$ , condizione  $c_l = c_d \tan \varphi$  dalle (2.20))  $C_T$  si annulla mentre  $C_P$  è ancora positivo, cioè l'elica è ancora mossa. All'aumentare di  $J$  l'elica diventa frenante ( $C_T < 0$ ). Quando  $\lambda_2 = 0$  ( $J = J_2$ ,  $c_l = -c_d \cot \varphi$ ) il coefficiente di potenza si annulla e per valori di  $J$  ancora superiori è l'elica a cedere potenza all'albero: funzionamento elica frenante a mulinello. Il rendimento dell'elica è zero per  $J = 0$  e  $J = J_1$ .

Una particolare condizione di funzionamento è data dalla cosiddetta elica

bloccata o a bandiera. Questa è caratterizzata da  $\Omega = 0$  per cui  $J \rightarrow \infty$  e da  $C_T < 0$ .

Indicando con  $\eta_e$  il rendimento del singolo elemento di pala si ottiene:

$$\eta_e = \frac{V_\infty dT}{\Omega dQ} = \frac{V_\infty \lambda_1}{\Omega r \lambda_2} = \frac{(1 - a') \lambda_1}{(1 + a) \lambda_2} \tan \varphi . \quad (2.24)$$

Posto  $c_d = c_l \tan \bar{\gamma}$ , si ottiene

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{\tan(\varphi + \bar{\gamma})} \quad (2.25)$$

e quindi

$$\eta_e = \frac{(1 - a')}{(1 + a)} \frac{\tan \varphi}{\tan(\varphi + \bar{\gamma})} . \quad (2.26)$$

La (2.26) mette in luce come, nel caso di flusso non viscoso ( $c_d = 0$  quindi  $\bar{\gamma} = 0$ ), i risultati della teoria dell'elemento di pala generale coincidano con quelli della teoria impulsiva generale. Soltanto gli effetti viscosi, per i più elevati valori di  $J$  (con la presenza di un secondo punto di rendimento nullo) portano ad un significativo scostamento della curva  $\eta = \eta(J)$  dall'andamento suggerito dalle teorie impulsive.

All'aumentare dell'angolo di calettamento della pala il punto di massimo rendimento si sposta verso destra in quanto gli elementi di pala lavorano, fissata  $\Omega$ , ad un'incidenza minore e quindi ad un  $c_d$  minore per valori più elevati di  $V_\infty$ . Ne segue che per una data elica si può mantenere un elevato valore del rendimento per un maggiore intervallo se si modifica l'angolo di calettamento al variare di  $J$  (eliche a passo variabile).

Nel caso di eliche veloci, cioè progettate per lavorare ad elevati valori del rapporto di funzionamento ( $\alpha \approx \alpha_i$  per  $J$  grande), la caratteristica di spinta è caratterizzata da un comportamento di  $C_T$  debolmente oscillante intorno ad un valore costante per bassi valori di  $J$ . Infatti, in questa condizione un'ampia parte della pala lavora in condizioni di stallo.

## 2.5 Perdite del mozzo

In prossimità del mozzo la pala dell'elica non ha più la forma di un profilo alare per cui l'espressioni dei coefficienti di spinta e potenza (2.23) devono necessariamente cambiare per piccoli valori di  $\bar{r}$ . Le (2.23) si possono modificare cambiando gli estremi di integrazione da  $(0, 1)$  a  $(\bar{r}_h, 1)$  con  $\bar{r}_h$  il raggio del mozzo. Inoltre bisogna tenere conto della diminuzione di spinta netta dovuta alla resistenza del mozzo

$$D_h = c_{D_h} \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \pi r_h^2 . \quad (2.27)$$

Il coefficiente di resistenza del mozzo  $c_{D_h}$  assume valori molto prossimi ad 1, per cui la diminuzione di coefficiente di spinta (e quindi anche di rendimento) è data da

$$\Delta C_T = -\frac{1}{2} \pi \frac{r_h^2}{D^2} J^2 . \quad (2.28)$$

È da notare la dipendenza quadratica da  $J$  che comporta un significativo contributo delle perdite del mozzo per elevati valori del rapporto di funzionamento.

## 2.6 Una condizione di ottimo approssimata

Nel paragrafo 1.5 sono state ottenute le distribuzioni ottime di induzione assiale e rotazionale, condizioni esatte nell'ambito della teoria impulsiva generale. Utilizzando la teoria dell'elemento di pala è possibile ottenere una condizione di ottimo che, seppure approssimata, fornisce maggiori indicazioni sugli obiettivi progettuali.

Si suppone che l'elica sia poco caricata e con  $N \gg 1$  per poter trascurare la contrazione della scia ed il flusso radiale intorno all'estremità della pala. Se si considerano nulle le perdite viscosse, la forza aerodinamica totale che agisce sull'elemento di pala è data dal teorema di Kutta-Joukowski  $dF_a = \rho V_e \Gamma dr$  con  $\Gamma$  la circolazione intorno all'elemento. La spinta e la potenza elementare sono quindi

$$dT = N\rho\Omega r(1 - a')\Gamma dr \quad ; \quad dP = N\rho\Omega r V_\infty(1 + a)\Gamma dr . \quad (2.29)$$

Queste espressioni consentono di determinare facilmente i funzionali  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{F}$  necessari alla determinazione dell'ottimo (cfr. paragrafo 1.3). L'espressione approssimata dell'ottimo si ottiene assumendo che le variazioni  $\delta\mathcal{G}$  e  $\delta\mathcal{F}$  siano associabili solo a variazioni  $\delta\Gamma$  della circolazione:

$$\delta\mathcal{F} \approx N\rho\Omega r(1 - a')\delta\Gamma \quad , \quad \delta\mathcal{G} \approx N\rho\Omega r V_\infty(1 + a)\delta\Gamma ; \quad (2.30)$$

per cui la nuova condizione di ottimo diventa

$$\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\mathcal{F}} = \frac{V_\infty(1 + a)}{(1 - a')} = -\Lambda . \quad (2.31)$$

Questa relazione mostra che l'ottimo si ottiene imponendo che il rendimento ideale dell'elemento di pala  $\eta_e$  sia costante lungo la pala stessa. Ponendo  $\Lambda = -(V_\infty + w_0)$  si ottiene

$$\frac{V_\infty + w}{\left(\Omega - \frac{\omega}{2}\right)r} = \frac{V_\infty + w_0}{\Omega r} = \tan\varphi , \quad (2.32)$$

con  $w_0$  una costante opportuna da cui dipende il valore della spinta vincolata.

La condizione di funzionamento ottimo può essere compresa con l'aiuto della figura 2.6. La velocità effettiva  $(\overline{OA'})$  indica che la traiettoria delle particelle che lasciano il disco è data da elicotidi a generatrici cilindriche che è anche la forma che assume la scia vorticoso. La condizione di ottimo (2.32) impone che il passo dell'elicoido  $p = 2\pi r \tan\varphi$  sia costante con  $r$ ; tutte le elicotidi sono generate per traslazione con velocità  $V_\infty + w_0$  e rotazione rigida con velocità  $\Omega r$ : *un'elica di assegnata spinta ha rendimento massimo se la scia vorticoso, dopo una piccola deformazione iniziale, trasla e ruota rigidamente generando una superficie elicoidale a passo costante.*

Ancora non si è ottenuta nessuna informazione sulla velocità indotta,  $(\overline{AA'})$  nella figura 2.6), in particolare sull'andamento che devono assumere  $a$  ed  $a'$  in funzione di  $\bar{r}$ . Possiamo però sfruttare la relazione tra induzione assiale e rotazionale (1.41) che può essere scritta come

$$(V_\infty + w)w = \omega' r(\Omega r - \omega' r) ; \quad (2.33)$$

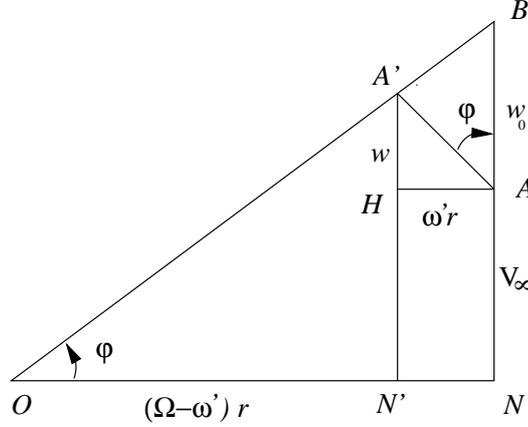


Figura 2.6: Triangolo delle velocità nel caso di elica ottima.

questa relazione ci assicura che i due triangoli  $ON'A'$  e  $AHA'$  sono simili e la velocità indotta  $AA'$  che indichiamo con  $w_n$  è perpendicolare a  $OB$ . È allora possibile determinare  $w$  ed  $\omega'r$ :

$$w = w_n \cos \varphi = w_0 \cos^2 \varphi \quad , \quad \omega'r = w_n \sin \varphi = w_0 \cos \varphi \sin \varphi \quad , \quad (2.34)$$

per cui, in conclusione:

$$a = \frac{w_0}{V_\infty} \frac{\chi^2}{\left(1 + \frac{w_0}{V_\infty}\right)^2 + \chi^2} \quad , \quad a' = \frac{w_0}{V_\infty} \frac{\left(1 + \frac{w_0}{V_\infty}\right)}{\left(1 + \frac{w_0}{V_\infty}\right)^2 + \chi^2} \quad , \quad (2.35)$$

dove  $\chi = \Omega r / V_\infty$ . Dalla seconda delle (2.34) si nota che se  $\varphi \ll 1$  (cioè  $J \rightarrow 0$ ),  $w \approx w_0$  e l'induzione rotazionale diventa trascurabile se l'elica è poco caricata. Questo risultato è confermato dall'analisi della figura 2.7 in cui le relazioni (2.35) sono diagrammate. Nel caso di eliche lente, è possibile trascurare l'induzione rotazionale; inoltre un'elica di rendimento ottimale è caratterizzata da una distribuzione di  $a(r)$  costante lungo la maggior parte della pala. Il rendimento ideale ottimo ottenibile utilizzando le distribuzioni descritte dalle (2.35) è solo di poco (1 – 2%) inferiore a quello previsto con la teoria impulsiva semplice.

Confrontando la spinta elementare così come espressa dalla prima delle (2.29) con la relazione differenziale classica (1.37) e tenendo conto della relazione (1.41) che lega le induzioni assiali e rotazionali possiamo determinare l'espressione generale della circolazione totale  $N\Gamma$  al variare del raggio della pala.

$$\frac{N\Gamma}{\Omega R^2} = 4\pi r^2 a'(\bar{r}). \quad (2.36)$$

In condizioni di ottimo questa relazione diventa:

$$\frac{N\Gamma\Omega}{4\pi w_0 V_\infty} = \frac{\chi^2 \left(1 + \frac{w_0}{V_\infty}\right)}{\chi^2 + \left(1 + \frac{w_0}{V_\infty}\right)^2} \quad , \quad (2.37)$$

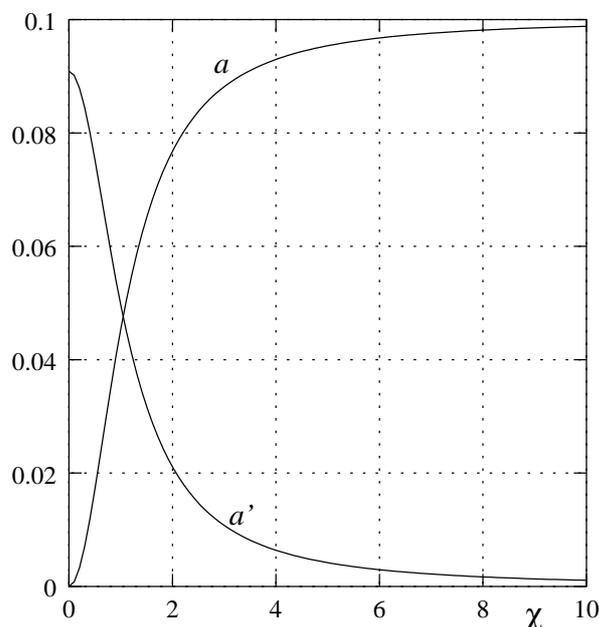


Figura 2.7: Andamento di  $a(\chi)$  ed  $a'(\chi)$  nel caso di elica ottima (relazioni (2.35)).  $w_0/V_\infty = 0.1$ .

relazione diagrammata in figura 2.8. Si nota ancora come per bassi rapporti di funzionamento la circolazione si mantiene pressappoco costante lungo il raggio.

È ovvio aspettarsi una variazione della condizione di ottimo dovuta alla presenza delle perdite viscosive che sono state trascurate nella presente trattazione. Assumendo invariata la distribuzione di circolazione lungo la pala (formula (2.37)) l'effetto della resistenza di profilo è di ridurre la spinta ed aumentare la potenza richiesta, comportando una diminuzione del rendimento. Glauert (1935) ha proposto la derivazione di un nuovo carico ottimo ( $NT$ ) nell'ipotesi di efficienza costante dell'elemento di pala al variare del raggio.

## 2.7 Effetto del numero di pale finito

Il modello vorticoso del disco attuatore ammette che, come nel caso di disco caricato uniformemente, il carico all'estremità della pala ( $dC_T/d\bar{r}$ ) sia diverso da zero. Nella realtà, cioè nel caso di numero di pale finito (è lo stesso dire un numero finito di vortici aderenti), il carico all'estremità della pala è nullo e la differenza di pressione dorso-ventre comporta delle velocità radiali non più trascurabili. Ne risulta una riduzione della spinta verso l'estremità della pala generalmente nota come “perdite di estremità”.

Per tenere conto di questo effetto occorre sviluppare una teoria analoga a quella della linea portante di Prandtl, sostituendo alla scia piana di vortici liberi di un'ala con distribuzione di carico ellittico  $N$  superfici elicoidali generate dalla rotazione di un'elica ad  $N$  pale. Questo formidabile problema fisico-matematico

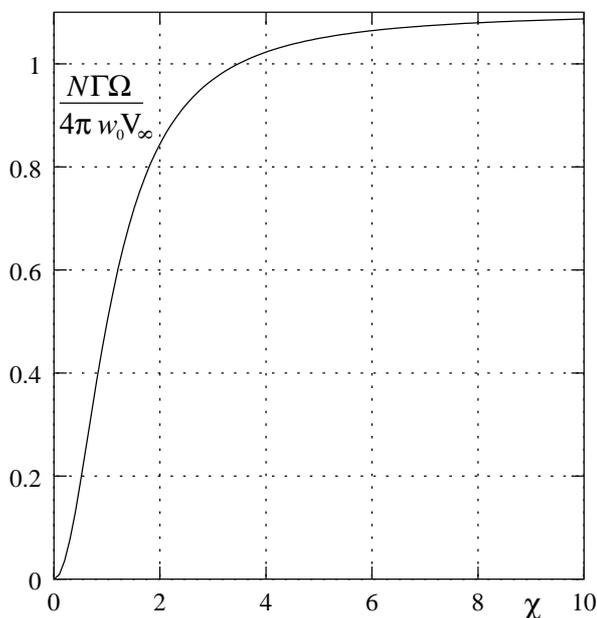


Figura 2.8: Andamento della circolazione adimensionale ottima in funzione del raggio della pala.  $w_0/V_\infty = 0.1$ .

fu brillantemente affrontato e risolto da Goldstein nel 1929 nel caso di distribuzioni radiali di induzione assiale e rotazionale in accordo all'ottimo approssimato determinato nel paragrafo 2.6. Lock verificò la possibilità di estendere i risultati ottenuti da Goldstein al caso di elica generica. La trattazione è però piuttosto complessa e laboriosa dal punto di vista matematico per cui ci limitiamo qui a studiare una soluzione locale di questo problema proposta da Prandtl, che, pur tenendo conto di tutti gli effetti considerati nella più generale teoria di Goldstein, consente di determinare in forma quantitativa e semplice le perdite di estremità.

Si consideri un'elica ottima, cioè caricata in accordo alla (2.37), supponendo  $R \gg 1$  ed  $\Omega R \gg 1$  cioè  $J \rightarrow 0$  per cui ciascuna spira dell'elica è approssimabile come una superficie piana semi-infinita; se anche  $N \gg 1$  ciascuna spira è ad una distanza finita  $s$  dalle altre data da:

$$s = \frac{2\pi R}{N} \tan \varphi \approx \frac{2\pi R}{N} \lambda . \quad (2.38)$$

In un riferimento solidale all'elica le spire più lontane dal piano dell'elica si spostano a valle con velocità  $w_j = 2w_0$ ; di questo campo di moto esiste la soluzione esatta. Se indichiamo con  $Oxy$  un riferimento solidale alla scia vorticoso (vedi figura 2.9) il potenziale complesso del campo è dato da

$$W(z) = \Phi + i\Psi = -w_j \frac{s}{\pi} \arccos \left( e^{\frac{\pi}{s} z} \right) , \quad (2.39)$$

dove  $z = x + iy$  ed  $i$  è l'unità immaginaria. È quindi possibile determinare la

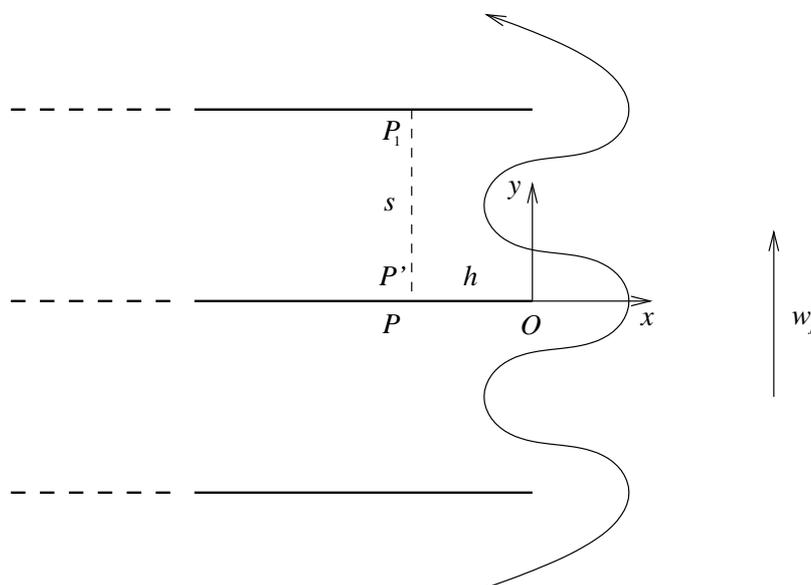


Figura 2.9: La scia nel modello di Prandtl.

velocità media del fluido nella scia. Infatti, essendo

$$\frac{d}{dz}W(z) = u - iv = w_j \frac{e^{\frac{\pi}{s}z}}{\sqrt{1 - e^{2\frac{\pi}{s}z}}}, \quad (2.40)$$

si ottiene, sempre con riferimento alla figura 2.9

$$\frac{1}{s} \int_0^s v \, dy = \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\partial \Phi}{\partial y} \, dy = \Phi(P_1) - \Phi(P') = w_j \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(e^{-\frac{\pi}{s}h}) \right] \quad (2.41)$$

con  $h = \overline{P'O}$ . È questa la soluzione locale in prossimità dell'estremità di una pala per cui, nel caso di raggio finito, possiamo porre  $h = R - r$  e la velocità media del fluido nella scia nel riferimento solidale all'elica è data da

$$\bar{w}(r) = w_j - \frac{1}{s} \int_0^s v \, dy = w_j \frac{2}{\pi} \arccos \left[ e^{\frac{N}{2\lambda} \left( \frac{r-R}{R} \right)} \right] = w_j F(\bar{r}) \quad (2.42)$$

La presenza della funzione  $F(\bar{r})$  nella (2.42), diagrammata in figura 2.10 indica che la velocità indotta  $w$  non può rimanere finita all'estremità della pala, ma deve invece annullarsi per la presenza della componente di velocità radiale.

La funzione di Prandtl  $F$  consente di ottenere la circolazione lungo la pala modificando la relazione (2.36):

$$\frac{N\Gamma}{\Omega R^2} = F(\bar{r}) 4\pi \bar{r}^2 a'(\bar{r}) \quad (2.43)$$

per cui si ottiene, come nell'ala finita stazionaria, che la circolazione si annulla all'estremità della pala. In figura 2.11, sono diagrammati gli andamenti della

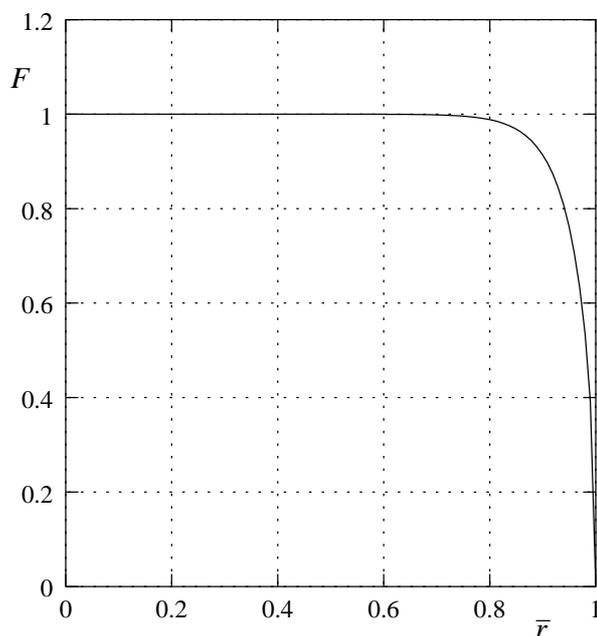


Figura 2.10: Andamento della funzione di correzione del carico di estremità di Prandtl lungo il raggio della pala.  $\lambda = 0.1$ ,  $N = 4$ .  $w_0/V_\infty = 0.1$ .

circolazione ottima (2.37), corretti con le perdite di estremità al variare del numero di pale. Se  $\lambda$  è piccolo, per  $N \geq 4$ , questi andamenti sono praticamente coincidenti con quelli ottenibili mediante la teoria “esatta” di Goldstein-Lock; per valori crescenti del rapporto di funzionamento invece lo scostamento tra la soluzione approssimata ed esatta diventa maggiore.

## 2.8 Progetto dell'elica

Abbiamo adesso pronti tutti gli strumenti necessari al progetto aerodinamico di un'elica lenta, cioè in grado di lavorare in modo ottimale per bassi rapporti di avanzamento ( $J < 1$ ).

Sono possibili essenzialmente due scelte progettative:

- assegnare la spinta, determinare la geometria dell'elica e quindi la potenza necessaria;

oppure

- assegnare la potenza disponibile, determinare la geometria dell'elica e quindi la spinta ottenibile.

È necessario definire un certo numero di parametri, ad esempio assegnando il diametro  $D$ , il numero di pale  $N$ , il raggio del mozzo  $r_h$  il numero di giri  $n$ , la velocità asintotica  $V_\infty$ , la spinta (abbiamo scelto la prima possibilità sopra

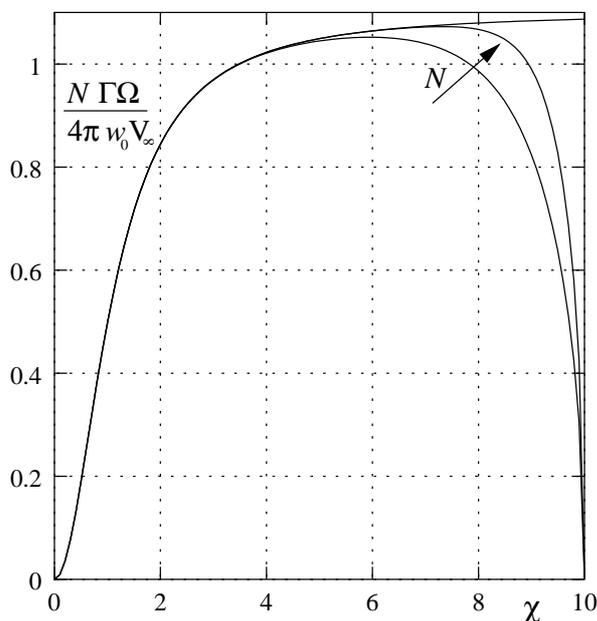


Figura 2.11: Andamento della circolazione adimensionale ottima in funzione del raggio della pala al variare del numero di pale.  $w_0/V_\infty = 0.1$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $N = 2, 4, \infty$ .

elencata) e la quota ( $\rho$ ) per cui è noto il coefficiente di spinta  $C_T$ . Ecco i passi fondamentali di un possibile ciclo progettuale.

1. Si assegna un valore di tentativo per  $w_0$ . Una buona stima, non troppo lontana dalla realtà, è assumere  $w_0 = aV_\infty$  con l'induzione assiale  $a$  calcolata utilizzando la (1.11).
2. E' allora determinata la distribuzione  $\varphi(\bar{r})$  dalla (2.32) per cui si possono calcolare le distribuzioni radiali di induzione assiale e rotazionale (quindi anche  $V_e(\bar{r})$ ), e, soprattutto, la distribuzione del carico aerodinamico  $NFT$  già corretta per le perdite di estremità con la funzione di correzione  $F(\bar{r})$  di Prandtl.
3. Trascurando in un primo momento le perdite viscosive è possibile determinare le distribuzioni radiali di spinta e di potenza mediante le (2.29). Inoltre sono ottenibili le prime informazioni geometriche sull'elica essendo

$$\sigma(\bar{r})c_l(\bar{r}) = \frac{1}{\pi} \frac{N\Gamma}{V_e R \bar{r}} . \quad (2.44)$$

4. E' preferibile a questo punto assegnare la distribuzione  $c_l(\bar{r})$ . Chiaramente i valori di  $c_l$  saranno molto prossimi a quelli ideali del profilo per poter minimizzare le perdite viscosive; inoltre può essere conveniente scegliere valori di portanza più bassi verso le estremità per non introdurre un eventuale contributo di resistenza d'onda nella zona in cui, chiaramente la velocità

effettiva è massima. E' possibile ora scegliere la distribuzione dei profili della pala (spessore percentuale e serie), definire gli angoli di attacco  $\alpha$  ed il calettamento  $\theta = \alpha + \varphi$ . E' infine definibile  $\sigma(\bar{r})$ , cioè la forma in pianta della pala.

5. Un'analisi dell'elica così ottenuta mediante la teoria generale dell'elemento di pala permette di determinare le perdite viscosse e ricalcolare la spinta ottenuta, che sarà leggermente inferiore a quella stabilita, sia a causa della variazione dell'induzione assiale che della resistenza del profilo che introduce un contributo negativo di spinta. E' possibile allora ripetere il ciclo progettuale dal punto 1 aumentando un poco il valore di  $w_0$  precedentemente assegnato fino al raggiungimento della spinta richiesta.

Un po' più complessa è la scelta del rapporto di funzionamento a cui progettare l'elica che dovrà necessariamente lavorare anche in condizioni "off design". Nel caso di elica lenta a passo variabile può forse essere preferibile progettare l'elica a punto fisso ( $J = 0$ ) che comporta solo una piccola degradazione del rendimento in crociera (2-3%), in quanto, al contrario, un'elica definita in condizioni di crociera produce una spinta a punto fisso molto inferiore a quella ottenibile con una progettazione *ad hoc*.

## 2.9 Esercizi

1. Mediante la teoria dell'elemento di pala semplice determinare le caratteristiche dell'elica illustrata in figura 2.3 con  $N = 2$  per  $J = 0.6$ . Si ipotizzi il flusso ideale per cui  $c_d = 0$  e  $c_l = 2\pi\alpha$ ; l'angolo di portanza nulla per tutti gli elementi sia dato da  $\alpha_{z1} = -3^\circ$ . Ripetere il calcolo supponendo  $c_d = 0.02$  per tutti gli elementi. Ripetere il calcolo facendo variare  $J$ . Ripetere il calcolo portando il calettamento nominale della pala da  $\theta = 20.1^\circ$  a  $\theta = 30^\circ$ . Per tutte le analisi effettuate calcolare il rapporto  $C_T / \frac{d}{d\bar{r}} C_T$  a  $\bar{r} = 0.75$ .
2. Ripetere il calcolo delle caratteristiche dell'elica dell'esercizio precedente utilizzando la teoria generale dell'elemento di pala.



## Capitolo 3

# Eliche intubate

### 3.1 Analisi con la teoria impulsiva semplice

Un modo per aumentare la spinta ottenibile da un'elica a parità di potenza impiegata consiste nell'“intubarla” in maniera opportuna.

L'elica intubata è costituita da un'elica libera circondata da una carenatura la cui funzione preminente, dal punto di vista aerodinamico è di controllare la sezione della scia all'infinito a valle e quindi anche la velocità ultima nella scia.

Incominciamo a considerare il caso più semplice di carenatura cilindrica (cioè a sezione costante) e paragoniamo il suo funzionamento a quello di un'elica libera. All'interno della carenatura consideriamo un disco attuatore che modella il funzionamento dell'elica. Per l'elica libera sappiamo che la velocità indotta sul disco è la metà della velocità indotta a valle mentre si osserva che l'elica intubata con carenatura cilindrica mantiene una sezione di scia costante e quindi una velocità indotta costante dalla fine della carenatura fino all'infinito a valle (cfr. figura 3.1).

La spinta e la potenza ideale a punto fisso per un'elica intubata con carenatura cilindrica di sezione  $A$  sono date da

$$T_d = \rho A w_d^2 \quad ; \quad P_d = \frac{1}{2} \rho A w_d^3 . \quad (3.1)$$

Paragoniamo allora l'elica intubata ad un'elica libera a parità di area  $A$  e di spinta. Eguagliando la (3.1) alla spinta dell'elica libera ( $T = 2\rho A w^2$ ) si ottiene

$$\frac{w_d}{w} = \sqrt{2} \approx 1.41 , \quad (3.2)$$

mentre il rapporto tra potenza dell'elica intubata e libera è dato da (per l'elica libera a punto fisso  $P = 2\rho A w^3$ )

$$\frac{P_d}{P_f} = \frac{1}{4} \left( \frac{w_d}{w} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 . \quad (3.3)$$

Quindi la velocità indotta dall'elica intubata è del 41% maggiore che nel caso di elica libera, ma ciò non comporta un aumento della potenza ideale dell'elica intubata, anzi, questa è minore del 30% di quella dell'elica libera a causa dell'incremento della portata d'aria che attraversa il disco attuatore.

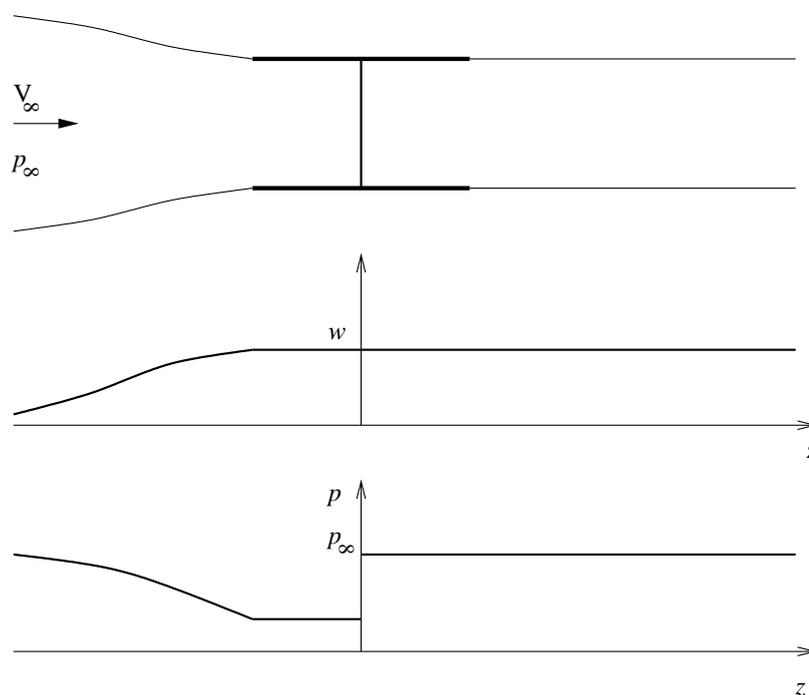


Figura 3.1: Schema di funzionamento di un'elica intubata a carenatura cilindrica.

In modo analogo possiamo effettuare il confronto a parità di potenza e di area che porta al risultato

$$\frac{w_d}{w} = 2^{\frac{2}{3}} \approx 1.59 \quad , \quad \frac{T_d}{T_f} = \frac{1}{2} \left( \frac{w_d}{w} \right)^2 \approx 1.26 ; \quad (3.4)$$

cioè a parità di potenza l'elica intubata è in grado di sviluppare una spinta a punto fisso maggiore (25%) che nel caso di elica libera; ovviamente questi risultati sono stati ottenuti trascurando le perdite viscosive.

Dal punto di vista geometrico si possono avere tre diversi tipi di carenatura: cilindrica, convergente e divergente.

Qualunque sia la geometria della carenatura la sua sezione finale coincide con la sezione della scia all'infinito a valle, a meno di piccoli effetti dovuti alla contrazione della scia che si verifica immediatamente a valle della carenatura oppure al distacco dello strato limite che si può verificare per carenature fortemente divergenti. Si comprende quindi che, dal punto di vista aerodinamico è determinante proprio il fatto che, per qualunque regime di funzionamento, la sezione finale della scia, nei limiti sopraindicati, non varia assegnata la carenatura mentre nel caso di elica libera varia con il rapporto di funzionamento.

Un'altra caratteristica dell'elica intubata è che qualunque sia il tipo di carenatura utilizzata vengono notevolmente ridotte le perdite di estremità in quanto la carenatura ostacola il flusso radiale intorno all'estremità della pala.

Al fine di evidenziare il comportamento di un'elica intubata al variare della

forma della carenatura prendiamo in considerazione un insieme di eliche intubate di cui faccia parte anche un'elica libera a parità di velocità asintotica ( $V_\infty$ ), portata di massa ( $\dot{m}$ ) e sezione finale ( $A_j$ ) della scia.

Le espressioni della spinta, potenza e rendimento ideale sono:

$$T = \dot{m}(V_j - V_\infty) , \quad (3.5)$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{m}(V_j^2 - V_\infty^2) , \quad (3.6)$$

$$\eta = \frac{TV_\infty}{P} . \quad (3.7)$$

Per le ipotesi fatte queste grandezze sono costanti per tutte le eliche intubate in considerazione. Inoltre sarà costante anche la variazione di pressione attraverso il disco che, come al solito attraverso il teorema di Bernoulli è data da

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho(V_j^2 - V_\infty^2) . \quad (3.8)$$

L'unica grandezza che varia tra le eliche è l'area della sezione del disco attuatore  $A_R$ . La spinta dovuta all'azione del solo disco attuatore è pari a

$$T_R = \Delta p A_R . \quad (3.9)$$

$T_R$  è diversa dalla spinta totale  $T$ ; la sua differenza è proprio il contributo alla spinta dovuto alla carenatura ( $T_s = T - T_R$ ).

Essendo dalla (3.5)  $V_j - V_\infty = T/\dot{m}$  la (3.8) diventa

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho(V_j + V_\infty)(V_j - V_\infty) = \frac{\rho V_\infty T}{\dot{m}} \left(1 + \frac{T}{2V_\infty \dot{m}}\right) . \quad (3.10)$$

Dalla (3.9) ed essendo  $\dot{m} = \rho V_R A_R$  abbiamo

$$\frac{T_R}{T} = \frac{V_\infty}{V_R} \left(1 + \frac{T}{2V_\infty \dot{m}}\right) . \quad (3.11)$$

Il termine tra parentesi nella (3.11) è, nel nostro caso, costante; il suo valore è legato al rendimento ideale. Infatti è facile verificare che

$$\eta = \frac{TV_\infty}{\dot{m} \frac{\Delta p}{\rho}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{T}{2V_\infty \dot{m}}\right)} , \quad (3.12)$$

per cui

$$\frac{T_R}{T} = \frac{1}{\eta} \frac{V_\infty}{V_R} \quad (3.13)$$

In particolare, nel caso di elica libera ( $T_R = T$ ) la (3.13) porta a

$$\frac{V_\infty}{V_{Rf}} = \eta , \quad (3.14)$$

con  $V_{Rf}$  la velocità sul disco nel caso di elica libera. Per mezzo delle (3.13) e (3.14) è possibile esprimere la spinta della carenatura in funzione del valore del rapporto tra velocità sul disco con e senza carenatura

$$\frac{T_s}{T} = 1 - \frac{V_{Rf}}{V_R} . \quad (3.15)$$

In definitiva si ha

$$V_R > V_{Rf} : T_s > 0 , \quad T > T_R ; \quad (3.16)$$

$$V_R < V_{Rf} : T_s < 0 , \quad T < T_R . \quad (3.17)$$

Il comportamento del primo tipo è caratteristico di carenature divergenti, mentre, al contrario, si ottengono spinte di carenatura negative nel caso di carenatura convergente. Più precisamente la carenatura cilindrica ed una carenatura leggermente convergente danno ancora una spinta positiva; quando la carenatura segue perfettamente la linea di corrente che avrebbe l'elica libera, ovviamente la spinta di carenatura è nulla, mentre aumentando ulteriormente la convergenza il contributo di spinta diventa negativo.

La carenatura divergente accelera il flusso sul disco (aumenta la portata) ed aumenta la sezione di scia dando un contributo positivo alla spinta rispetto ad un'elica libera di pari diametro; è quindi in grado di fornire elevate spinte a basse velocità.

Una carenatura convergente invece rallenta il flusso in corrispondenza dell'elica e restringe la sezione di scia dando un contributo negativo alla spinta. Può esserci un vantaggio nell'utilizzarla per consentire un funzionamento dell'elica a più alti numeri di Mach asintotici in quanto, diminuendo la velocità sul disco, il flusso si allontana dalle condizioni critiche.

L'utilizzo di un'elica intubata divergente è equivalente ad avere un'elica di diametro effettivo maggiore allo stesso modo in cui schermature all'estremità di un'ala fissa (winglets) portano ad una variazione dell'allungamento effettivo.

È possibile ottenere lo stesso effetto con carenature molto più corte (quindi minori perdite viscosive) utilizzando delle carenature opportunamente sagomate. Un comportamento analogo ad una carenatura divergente si ottiene, per esempio, utilizzando come sezione della carenatura un profilo alare a curvatura negativa (cfr. figura 3.2). Infatti la circolazione che agisce intorno al profilo porta ad un aumento delle velocità sul dorso del profilo (e quindi all'interno del condotto) con conseguente aumento della portata di massa. In questo caso la sezione di scia a valle non viene determinata dalla sezione finale della carenatura, è invece possibile un'ulteriore aumento della sezione di scia. Ovviamente, al contrario, l'uso di un profilo alare a curvatura positiva, è equivalente ad una carenatura convergente.

### 3.2 Effetto della geometria della carenatura

Lo studio del campo di moto aerodinamico indotto dalla carenatura, in flusso ideale, incomprimibile, è riconducibile, in generale all'analisi delle cosiddette ali ad anello, caratterizzate da una simmetria assiale del campo. Può essere effettuato numericamente utilizzando opportune distribuzioni superficiali di singolarità per ottenere soluzioni esatte, oppure, nel caso di carenature "sottili", sostituendo alla geometria effettiva della carenatura la superficie di curvatura media con una distribuzione di vortici ad anello che sostituiscono i vortici bidimensionali della teoria di Glauert.

Entrambi questi metodi non forniscono una soluzione in forma chiusa per cui, in questa sede si preferisce introdurre una trattazione approssimata in grado, comunque, di fornire risultati quantitativi.

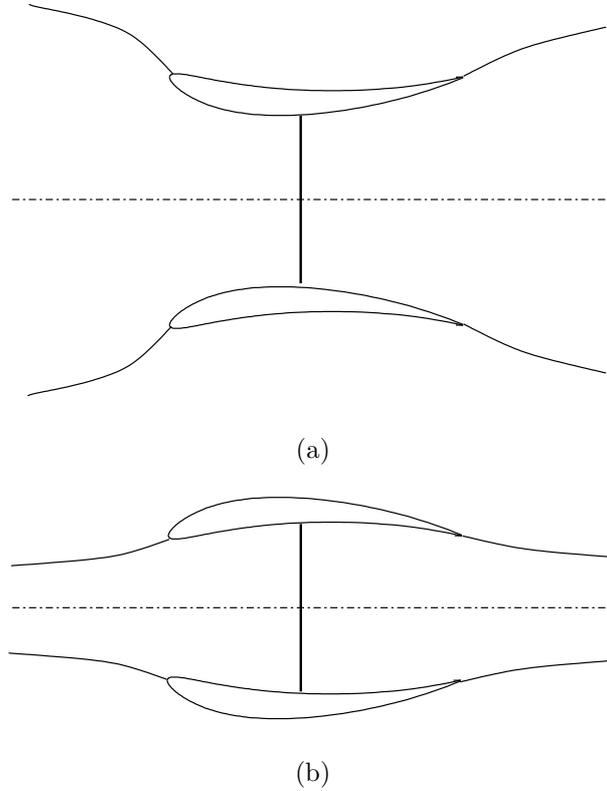


Figura 3.2: Elica intubata con carenatura negativa (a) e con carenatura positiva (b).

In maniera analoga alla teoria del punto neutro posteriore di Pistolesi, l'effetto della carenatura è modellato da un vortice ad anello di intensità  $\Gamma$  posto ad  $1/4$  della corda della carenatura. L'intensità di tale vortice può essere quindi determinata imponendo che la condizione di tangenza del flusso alla linea media sia soddisfatta nel punto a  $3/4$  della corda (figura 3.3).

La componente radiale della velocità indotta dal vortice ad anello  $v_i$  è ottenibile utilizzando la legge di Biot-Savart (2.2); essa è esprimibile come

$$v_i = \frac{\Gamma}{\pi D_{\frac{1}{4}}} f \left( \frac{c}{D_{\frac{1}{4}}}, \frac{D_{\frac{3}{4}}}{D_{\frac{1}{4}}} \right), \quad (3.18)$$

dove  $f$  è una funzione universale, indipendente dalla geometria effettiva, essa è diagrammata in figura 3.4.

Oltre alla velocità radiale indotta dalla carenatura stessa occorre tenere conto della velocità radiale  $v_{iR}$  indotta dal rotore (come spesso viene nominata l'elica intubata), che dipende dalla contrazione che subisce il tubo di flusso dell'aria "inghiottita" dall'elica. Se indichiamo con  $r_t$  il raggio di questo tubo di flusso, una espressione questa velocità, valida nell'approssimazione di flusso

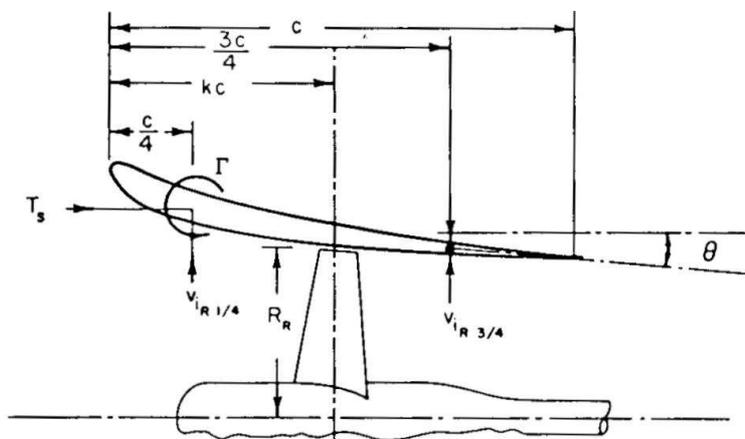


Figura 3.3: Schematizzazione della geometria della carenatura (McCormick, 1967).

quasi-unidimensionale è

$$v_{iR} = \frac{dr_t}{dz} [V_\infty + w(\bar{z})] \quad (3.19)$$

dove con  $w(\bar{z})$  si è indicata la velocità indotta lungo l'asse del rotore per la quale abbiamo determinato una espressione analitica data dalla relazione (2.13) e  $\bar{z} = z - z_R$ , con  $z_R$  che indica la posizione del rotore. Differenziando l'equazione di conservazione della massa scritta nella forma

$$[V_\infty + w(\bar{z})] \pi r_t^2 = cost, \quad (3.20)$$

si ottiene

$$\frac{dr_t}{dz} = -\frac{r_t \frac{dw}{dz}}{2[V_\infty + w(\bar{z})]}; \quad (3.21)$$

d'altra parte, dalla relazione (2.13)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w(0)R^2}{(R^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.22)$$

e quindi l'espressione della velocità radiale indotta dal rotore (3.19) diventa

$$v_{iR} = -\frac{1}{2} r_t w(0) \frac{R^2}{(R^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.23)$$

Infine la velocità assiale  $w(0)$  indotta sull'elica è ottenibile in termini della spinta dovuta al rotore utilizzando la relazione (1.11):

$$w(0) = \frac{1}{2} \left\{ -V_\infty + \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2T_R}{\rho\pi R^2}} \right\}. \quad (3.24)$$

La condizione di tangenza del flusso nel punto a 3/4 della corda comporta che

$$\frac{v_i + v_{iR \frac{3}{4}}}{V_\infty + w_{\frac{3}{4}}} = -\theta, \quad (3.25)$$

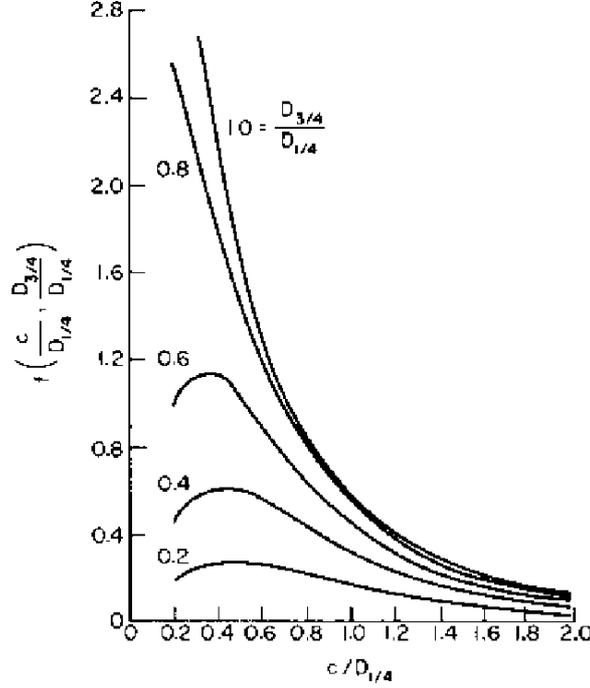


Figura 3.4: Velocità indotta dal vortice ad anello (McCormick, 1967).

per cui, ricavando  $v_i$  da questa espressione e uguagliando alla equazione (3.18) si ottiene la circolazione  $\Gamma$  intorno alla carenatura:

$$\Gamma = \frac{\pi D_{\frac{1}{4}}}{f\left(\frac{c}{D_{\frac{1}{4}}}, \frac{D_{\frac{3}{4}}}{D_{\frac{1}{4}}}\right)} \left[ -v_{iR\frac{3}{4}} - \theta \left( V_{\infty} + w_{\frac{3}{4}} \right) \right], \quad (3.26)$$

dove i pedici 1/4 e 3/4 indicano, rispettivamente, condizioni valutate a 1/4 e 3/4 della corda.

La conoscenza della circolazione  $\Gamma$  consente di determinare il contributo della carenatura alla spinta totale. Infatti, mentre le forze che agiscono sulla carenatura in direzione radiale si annullano per la simmetria del campo, esiste un contributo assiale in generale diverso da zero. L'effetto della linea media può essere descritto, come nella teoria dei profili sottili di Glauert, da una distribuzione di vorticità  $\gamma$  e nel modello del punto neutro posteriore  $\Gamma \approx \int_0^c \gamma dz$  per cui, ricordando che  $\gamma$  è proprio il carico lungo la linea media, la forza aerodinamica per una data sezione longitudinale della carenatura è data da  $F_a = \rho V_{\infty} \Gamma$ . Il campo indotto dal rotore induce un angolo di attacco locale  $\approx \frac{v_{iR\frac{1}{4}}}{V_{\infty}}$ , per cui la forza aerodinamica  $F_a$  risulta essere inclinata di quest'angolo rispetto all'asse del rotore comportando una forza di spinta della carenatura data da

$$T_S = -\rho v_{iR\frac{1}{4}} \Gamma \pi D_{\frac{1}{4}}. \quad (3.27)$$

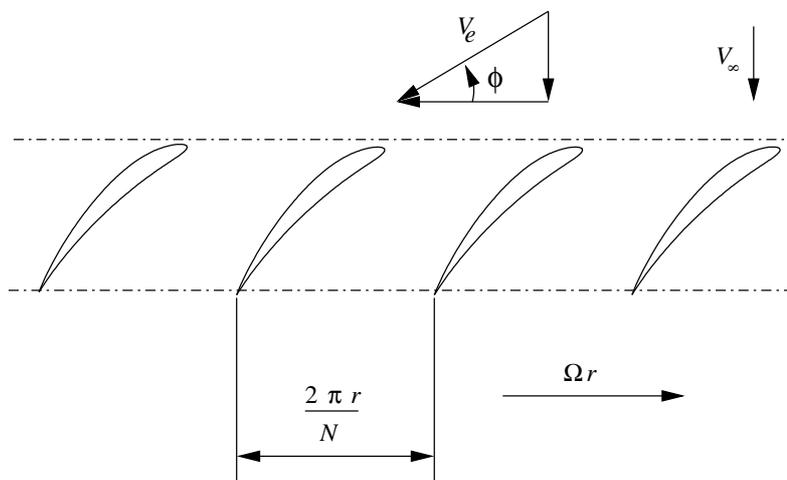


Figura 3.5: Schiera di profili.

### 3.3 Profili a schiera

In genere le eliche intubate sono caratterizzate da valori della solidità più elevati delle eliche libere; questo comporta che l'interazione aerodinamica tra i profili delle pale non può essere più trascurata, come abbiamo fino ad ora implicitamente fatto.

In questo caso è utile introdurre il modello bidimensionale dei profili a schiera (cascades in inglese): una corona circolare elementare dell'elica alla stazione  $r$  viene schematizzata con un modello bidimensionale di infiniti profili distanti tra loro  $\frac{2\pi r}{N}$  (vedi figura 3.5). La teoria impulsiva e la teoria dell'elemento di pala sono applicabili anche in questo caso ma bisogna tenere conto delle variazioni delle caratteristiche aerodinamiche dei profili (in particolare il  $C_l$ ) rispetto al caso di profilo isolato.

Se esprimiamo il coefficiente di portanza come  $C_l = 2\pi K \alpha$ , il fattore  $K$  tiene conto dell'effetto "schiera". Una semplice espressione di  $K$  è stata proposta da McCormick (1967) ed è data da

$$K = \frac{4r}{Nc} \left[ \frac{\tan^2(\pi X) + \tanh^2(\pi Y)}{\sin \varphi \tanh(\pi Y) [1 + \tan^2(\pi X)] + \cos \varphi \tan(\pi X) [1 - \tanh^2(\pi Y)]} \right], \quad (3.28)$$

dove  $X = \cos \varphi / \left( \frac{4\pi r}{Nc} \right)$  e  $Y = \sin \varphi / \left( \frac{4\pi r}{Nc} \right)$ .

Come si può facilmente verificare analizzando la figura 3.6 in cui il fattore  $K$  è diagrammato al variare di  $\frac{2\pi r}{Nc}$  e  $\varphi$ , l'effetto "schiera" non è facilmente prevedibile ( $K$  assume valori sia maggiori che minori di uno).

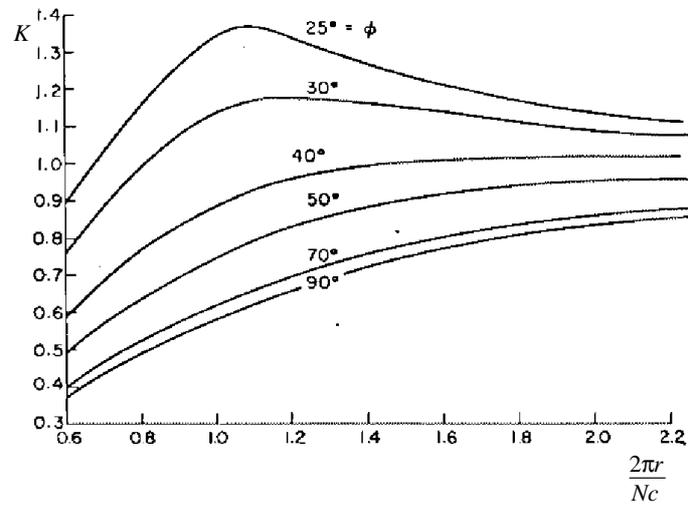


Figura 3.6: Effetto schiera sul  $c_t$ ; formula (3.28) (McCormick, 1967).

### 3.4 *Esercizi*

1. Determinare la posizione ottima del rotore per un'elica intubata a carenatura cilindrica caratterizzata da rapporto lunghezza-diametro  $c/D = 1$ .



## Capitolo 4

# Effetti della comprimibilità

### 4.1 La teoria impulsiva semplice in regime comprimibile

Il modello di disco attuatore e le teorie impulsive sono facilmente estendibili al caso in cui il flusso è comprimibile subsonico anche se, in questo caso, l'insieme delle equazioni algebriche che definiscono il problema non è più risolvibile in maniera esplicita.

Trascurando l'induzione rotazionale è possibile sviluppare una teoria impulsiva semplice; nel caso di densità variabile la velocità non è più continua attraverso il disco, mentre è continuo il flusso di massa per unità di superficie  $\rho V = \dot{m}/A$ . In base al bilancio di quantità di moto, la spinta è data dalla variazione dell'impulso attraverso il disco:

$$T = \dot{m}(V_J - V_\infty) = (p_2 - p_1)A + \dot{m}(V_2 - V_1), \quad (4.1)$$

dove con i pedici 1 e 2 sono rispettivamente indicati le condizioni immediatamente a monte ed a valle del disco. La potenza assorbita è, inoltre, data da

$$P = \frac{\dot{m}}{2}(V_J^2 - V_\infty^2) = T \frac{(V_\infty + V_J)}{2}. \quad (4.2)$$

Ipotizzando che la variazione di energia totale che subisce il flusso è associabile solo a variazioni di energia cinetica assiale, all'infinito a valle l'entalpia specifica non varia, per cui se  $p_j = p_\infty$  anche  $\rho_j = \rho_\infty$ . Il problema è quindi chiuso considerando le equazioni di Bernoulli nel caso comprimibile applicate a monte ed a valle del disco. In conclusione, supponendo il flusso isoentropico, si ottiene:

$$\frac{P}{A} = \frac{\dot{m}}{A} \frac{1}{2} (V_J^2 - V_\infty^2), \quad (4.3)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \rho_1^{\gamma-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_1^2} \left( \frac{\dot{m}}{A} \right)^2, \quad (4.4)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{1}{2} V_J^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \rho_2^{\gamma-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_2^2} \left( \frac{\dot{m}}{A} \right)^2, \quad (4.5)$$

$$\frac{2P}{A(V_\infty + V_J)} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} (\rho_2^\gamma - \rho_1^\gamma) - \left( \frac{\dot{m}}{A} \right)^2 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right). \quad (4.6)$$

Il problema è quindi chiuso nelle incognite  $\dot{m}/A$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  e  $V_j$  se sono note le condizioni del flusso all'infinito a monte, la potenza assorbita e l'area del disco.

In generale la soluzione si discosta sempre molto poco da quella ottenibile con la teoria impulsiva incomprimibile per cui è scarsa l'influenza della comprimibilità sul rendimento ideale in regime subsonico.

Anche l'applicazione della teoria dell'elemento di pala è semplicemente estendibile al caso di flusso subsonico comprimibile. È sufficiente considerare le caratteristiche aerodinamiche dei profili delle pale corrette per la comprimibilità, per esempio applicando una delle similitudini subsoniche.

Ovviamente, all'aumentare della velocità effettiva  $V_e$  (in particolare verso le estremità dove  $\Omega r$  è maggiore), si raggiungeranno condizioni critiche del flusso e successivamente crisi di comprimibilità delle sezioni delle pale. Il rapido incremento della resistenza aerodinamica a cui lavorano le sezioni porta quindi ad un decadimento del rendimento e di tutte le prestazioni dell'elica; è questo il problema aerodinamico fondamentale che limita il valore di progetto di  $\Omega R$  nelle eliche e nei rotori.

Soltanto negli anni 80 con l'introduzione delle eliche, cosiddette "avanzate", caratterizzate dall'uso di profili supercritici all'estremità e da forme della pala a "scimitarra" per innalzare il numero di Mach critico inferiore, è stato possibile utilizzare con successo propulsori ad elica nell'alto subsonico. Si sono inoltre dimostrate operative, anche se, in questo momento, non economicamente accettabili, le eliche "propfan" in grado di funzionare efficientemente in regime transonico.

## 4.2 Teoria impulsiva linearizzata

Una soluzione esplicita del sistema di equazioni 4.3-4.6 può essere ottenuta nell'ipotesi di piccole perturbazioni indotte dall'elica sul campo fluidodinamico. In questo modo si può inoltre mettere meglio in evidenza il legame tra le teorie impulsive comprimibili e non. Si riporta qui la teoria linearizzata come brillantemente derivata da Losito<sup>1</sup>.

In regime di moto comprimibile il flusso subirà una variazione di densità attraverso il disco dell'elica. In particolare, per elica propulsiva ( $T > 0$ ), il tubo di flusso si contrae lungo l'asse  $z$ . La costanza del flusso di massa attraverso il disco dell'elica

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (4.7)$$

implica  $\rho_2 > \rho_1$  e  $V_2 < V_1$ . Le prime grandezze da determinare sono quindi le variabili fluidodinamiche immediatamente a monte ed a valle del disco dell'elica che risulteranno funzione del numero di Mach all'infinito a monte  $M_\infty$ .

Trascuriamo l'induzione radiale e rotazionale rispetto a quella assiale e poniamo

$$V_1 = V_\infty + w_1 \quad V_2 = V_\infty + w_2 \quad V_j = V_\infty + w_j \quad (4.8)$$

con

$$\frac{w_1}{V_\infty} \ll 1 \quad \frac{w_2}{V_\infty} \ll 1 \quad \frac{w_j}{V_\infty} \ll 1 \quad (4.9)$$

Il salto di densità tra l'infinito a monte ed il disco dell'elica si può ricavare ricorrendo alla teoria delle piccole perturbazioni. Il disturbo termodinamico

<sup>1</sup>V.Losito, Teoria impulsiva comprimibile, manoscritto, 1962?.

é rappresentato dal salto di entalpia adimensionalizzato con il quadrato della velocità del suono

$$\frac{h - h_\infty}{a_\infty^2} = \varepsilon_h \tilde{h} \quad (4.10)$$

con  $\tilde{h}$  di ordine di grandezza unitario ed  $\varepsilon_h < 1$ . Il disturbo di densità può essere espresso in funzione di  $\varepsilon_h \tilde{h}$  come

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \rho^+ = 1 + \left( \frac{\partial \rho^+}{\partial h^+} \right)_\infty (\varepsilon_h \tilde{h}) + \mathcal{O}(\varepsilon_h \tilde{h})^2 \quad (4.11)$$

con  $h^+ = \frac{h}{a_\infty^2}$ . La derivata che compare nella (4.11) si può ottenere ricordando la relazione di Gibbs

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp \quad (4.12)$$

che, per moti omoentropici, diventa

$$dh = \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} a^2 d\rho \quad (4.13)$$

Quindi si ha

$$\left( \frac{\partial \rho^+}{\partial h^+} \right)_\infty = \frac{a_\infty^2}{\rho_\infty} \left( \frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_\infty = 1 \quad (4.14)$$

La relazione (4.11), scritta tra l'infinito a monte e la sezione immediatamente a monte del disco dell'elica, fornisce

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = 1 + \frac{h_1 - h_\infty}{a_\infty^2} + \mathcal{O}(\varepsilon_h \tilde{h})^2 \approx 1 + \frac{V_1^2 - V_\infty^2}{a_\infty^2} \quad (4.15)$$

da cui, trascurando il termine quadratico in  $w_1$ , si ottiene l'espressione per il salto di densità tra l'infinito a monte ed il disco dell'elica

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = 1 - M_\infty^2 \frac{w_1}{V_\infty} \quad (4.16)$$

Il salto di pressione si ricava dalla condizione di adiabaticità, che si scrive

$$\frac{p_1}{p_\infty} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_\infty} \right)^\gamma = \left( 1 - M_\infty^2 \frac{w_1}{V_\infty} \right)^\gamma \approx 1 - \gamma M_\infty^2 \frac{w_1}{V_\infty} \quad (4.17)$$

nell'ipotesi che  $M_\infty^2 \frac{w_1}{V_\infty} \ll 1$ .

Analogamente a valle dell'elica si ottiene

$$\frac{\rho_2}{\rho_\infty} = 1 + M_\infty^2 \frac{w_j - w_2}{V_\infty} \quad (4.18)$$

$$\frac{p_2}{p_\infty} = 1 + \gamma M_\infty^2 \frac{w_j - w_2}{V_\infty} \quad (4.19)$$

La costanza del flusso di massa attraverso il disco ad ogni distanza radiale (relazione 4.7) si può scrivere come

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} (V_\infty + w_1) = \frac{\rho_2}{\rho_\infty} (V_\infty + w_2) \quad (4.20)$$

che, sostituendo le relazioni (4.16) e (4.18), diventa

$$\left(1 - M_\infty^2 \frac{w_1}{V_\infty}\right) (V_\infty + w_1) = \left(1 + M_\infty^2 \frac{w_j - w_2}{V_\infty}\right) (V_\infty + w_2) \quad (4.21)$$

da cui, trascurando i termini del secondo ordine, si ottiene la seguente relazione tra le velocità indotte assiali

$$\frac{w_2}{V_\infty} = \frac{w_1}{V_\infty} - \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{w_j}{V_\infty} \quad (4.22)$$

Il salto di velocità assiale attraverso il disco dell' elica é quindi dato da

$$\frac{V_1 - V_2}{V_\infty} = \frac{w_1 - w_2}{V_\infty} = \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{w_j}{V_\infty} \quad (4.23)$$

La relazione(4.19), sfruttando la (4.23), diventa

$$\frac{p_2}{p_\infty} = 1 - \gamma M_\infty^2 \frac{w_2}{V_\infty} + \gamma M_\infty^2 \frac{w_j}{V_\infty} = 1 - \gamma M_\infty^2 \frac{w_1}{V_\infty} + \gamma \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{w_j}{V_\infty} \quad (4.24)$$

e tenendo conto della (4.17)

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{p_1}{p_\infty} + \gamma \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{w_j}{V_\infty} \quad (4.25)$$

Il salto di pressione attraverso il disco dell' elica si può esprimere in funzione dell' induzione assiale all' infinito a valle come

$$\Delta P = p_\infty \left( \frac{p_2}{p_\infty} - \frac{p_1}{p_\infty} \right) = \gamma p_\infty \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{w_j}{V_\infty} \quad (4.26)$$

ovvero introducendo il fattore  $\beta^2 = 1 - M_\infty^2$

$$\Delta P = \frac{1}{\beta^2} \rho_\infty V_\infty^2 \frac{w_j}{V_\infty} \quad (4.27)$$

In campo incomprimibile, sempre nell' ipotesi di validità delle relazioni (4.9), il salto di pressione risulterebbe

$$\Delta P = \rho_\infty V_\infty^2 \frac{w_j}{V_\infty} \quad (4.28)$$

Confrontando le relazioni (4.27) e (4.28) si conclude che, a parità di spinta prodotta, un' elica in campo comprimibile si comporta come se fosse in campo incomprimibile ma occorrerà fornire un salto di pressione maggiore di  $\frac{1}{\beta^2} \rho_\infty V_\infty w_j$ . Questo risultato poteva essere anticipato dal fatto che in campo comprimibile il disco dell' elica rappresenta una superficie di discontinuità non solo per la pressione ma anche per la velocità assiale. Questo comporta che la spinta per unità di area del disco non uguaglia il salto di pressione ma occorre considerare, così come indicato dalla relazione (4.1), anche la diminuzione di quantità di moto assiale che si verifica attraverso il piano dell' elica. Quindi a parità di spinta prodotta, in regime comprimibile l' aumento di pressione che si realizza attraverso il disco dell' elica dovrà essere maggiore del corrispondente  $\Delta p$  incomprimibile.

La relazione tra l' induzione assiale all' infinito a valle e quella a monte del disco dell' elica si ottiene eguagliando la spinta prodotta dall' elemento di pala con quella che si ottiene dal salto di pressione.

$$dT = 2\rho_\infty dA(V_\infty + w_1)w_1 \approx 2\rho_\infty dAV_\infty w_1 = \frac{1}{\beta^2} \rho_\infty V_\infty w_j dA \quad (4.29)$$

da cui

$$w_j = 2\beta^2 w_1 \quad (4.30)$$

L' induzione all' infinito a valle non é piú il doppio dell' induzione sul disco, come in campo incomprimibile, ma é scalata del fattore  $\beta^2$ . Dalla (4.22) si ricava il rapporto tra le induzioni a valle ed a monte del disco che risulta funzione del  $M_\infty$ .

$$w_2 = w_1(1 - 2M_\infty^2) \quad (4.31)$$

La densità e la pressione a valle del disco dell' elica possono essere espresse in funzione dell' induzione assiale a monte del disco dell' elica sfruttando le relazioni (4.30) e (4.31)

$$\frac{\rho_2}{\rho_\infty} = 1 + M_\infty^2 \frac{w_1}{V_\infty} \quad (4.32)$$

$$\frac{p_2}{p_\infty} = 1 + \gamma M_\infty^2 \frac{w_1}{V_\infty} \quad (4.33)$$

Se sono note le condizioni fluidodinamiche all' infinito a monte, la potenza assorbita e l'area del disco dell' elica é possibile calcolare la altre incognite del problema. Infatti dalla relazione (4.2), sfruttando le relazioni (4.29) e (4.30) si può calcolare l' induzione a monte del disco dell' elica. Dalla conoscenza di  $w_1$  poi si ricavano le induzioni assiali  $w_2$  e  $w_j$  ed i valori di pressione e densità a monte e a valle del disco dell' elica.

### 4.3 Un modello numerico di disco attuatore in regime comprimibile

Con l'avvento del calcolatore elettronico ha raggiunto una sempre maggiore diffusione l'applicazione della fluidodinamica computazionale all'analisi aerodinamica di configurazioni complesse. In particolare sono risultate interessanti le applicazioni, in regime subsonico e transonico, nell'analisi dell'influenza dell'elica sull'aerodinamica del velivolo mediante la soluzione numerica delle equazioni di Eulero.

Anche nell'ipotesi di flusso non viscoso, la simulazione dei flussi fortemente rotazionali indotti dall'elica richiede un modello matematico piuttosto complesso quale quello descritto dalle equazioni di Eulero. In questo caso è più conveniente utilizzare un metodo di campo, in cui è incognito lo stato termofluidodinamico in tutto il dominio, mentre è più complesso, se non impossibile, utilizzare un metodo basato su distribuzioni superficiali di singolarità (metodi a "pannello").

La presenza dell'elica può quindi essere tenuta in conto mediante il modello di disco attuatore comprimibile. L'elica costituisce parte del contorno del campo di moto e viene simulata mediante un opportuno insieme di condizioni al contorno per le equazioni di Eulero. È nota la necessità di un insieme di condizioni al contorno "ben poste" per assicurare la stabilità del metodo numerico

di soluzione. I più diffusi, anche in campo stazionario, risolvono le equazioni di Eulero instazionarie, in questo caso l'integrazione nel tempo viene utilizzata come tecnica di rilassamento iterativa per raggiungere lo stato a regime.

Il problema della "correttezza" delle condizioni al contorno per le equazioni di Eulero è molto complesso e si rimanda ai corsi ed alla letteratura specifica per un approfondimento, per esempio Hirsch (1988), vol. 2, pag. 191. Una semplice regola che può essere applicata consiste nel considerare unidimensionale il problema locale sul contorno, dove possono essere quindi imposte tante condizioni quante sono le curve caratteristiche entranti nel dominio. Il disco attuatore costituisce un contorno di uscita per il flusso a monte ed un contorno di ingresso per quello a valle. In caso di flusso subsonico, nel problema a monte solo una curva caratteristica, caratterizzata da  $\frac{dz}{dt} = V_n - c$  (su di essa è costante l'invariante di Riemann  $V_n - \frac{2c}{\gamma-1}$ ) entra nel dominio, per cui solo una condizione può essere imposta, mentre tutte le altre informazioni necessarie per la determinazione del campo termo-fluidodinamico sul contorno (4 in flussi tridimensionali) devono essere estrapolate dall'interno del campo. Al contrario, per il problema a valle, una sola condizione deve essere estrapolata dall'interno del campo, mentre 4 condizioni devono essere imposte, data la presenza della caratteristica semplice  $\frac{dz}{dt} = V_n + c$  (sulla quale è costante l'invariante di Riemann  $V_n + \frac{2c}{\gamma-1}$ ) ed di quella multipla  $\frac{dz}{dt} = V_n$  (dove sono costanti l'entropia  $e$ , in un flusso parallelo, le componenti della velocità tangenti al contorno) entrambe entranti nel dominio di calcolo.

In figura 4.1 è illustrato un esempio di griglia computazionale intorno ad una configurazione ala-gondola-elica propfan (Amendola *et al.*, 1988). Se indichiamo con  $(i, j)$  una coppia di indici che identificano un punto della griglia sul disco dell'elica e supponiamo lo stato termofluidodinamico  $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, p)$  noto in tutto il campo al tempo  $t^{(n)}$  le condizioni al contorno debbono consentire la determinazione al tempo  $t^{(n+1)}$  nei punti di griglia  $(i, j)$  del disco lo stato termofluidodinamico a monte ed a valle.

Il funzionamento dell'elica può essere caratterizzato assegnando la pressione di ristagno a valle del disco  $p_{t2_{i,j}}$ , ed il versore della velocità a valle del disco  $\hat{\mathbf{v}}_{i,j}$  (il cosiddetto "swirl" del flusso) per ogni punto griglia. Come già discusso nel paragrafo precedente, l'ipotesi di adiabaticità dello scambio di energia elica-flusso comporta anche la conoscenza della temperatura di ristagno a valle:

$$T_{t2_{i,j}} = T_\infty \left( \frac{p_{t2_{i,j}}}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (4.34)$$

con  $T_\infty$  la temperatura della corrente asintotica.

Lo stato termofluidodinamico sul disco immediatamente a monte può essere determinato come segue.

1. Determinazione dell'entalpia totale  $H_{1_{i,j}}$  mediante estrapolazione alla parete dei valori interni del campo a monte;
2. determinazione del vettore velocità tangenziale  $\mathbf{V}_{t1_{i,j}}$  mediante estrapolazione alla parete dei valori interni del campo a monte (equivalente a 2 condizioni scalari);
3. determinazione della densità  $\rho_{1_{i,j}}$  mediante estrapolazione alla parete dei valori interni del campo a monte;

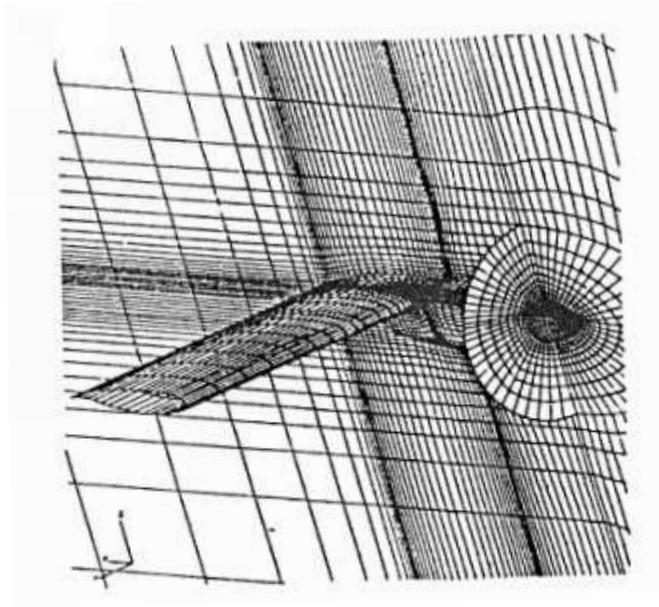


Figura 4.1: Griglia computazionale per la simulazione con le equazioni di Eulero di una configurazione ala-gondola-elica propfan, (Amendola *et al.*, 1988).

4. imposizione della continuità del flusso attraverso il disco:  $(\rho_1 \mathbf{V}_{n1})_{i,j} = (\rho_2 \mathbf{V}_{n2})_{i,j}$ .

Le 4 condizioni che vengono imposte per determinare il problema per il flusso a valle sono l'imposizione della pressione e della temperatura di ristagno e dello swirl (equivalente a 2 condizioni scalari). Lo stato sul disco immediatamente a valle richiede quindi i seguenti passi.

1. Determinazione del modulo della velocità  $V_{2,i,j}$  mediante estrapolazione alla parete dei valori interni del campo a valle;
2. calcolo della velocità del suono utilizzando l'espressione della (nota) temperatura di ristagno:  $c_{2,i,j}^2 = \gamma R_g T_{t2,i,j} - \frac{\gamma-1}{2} V_{2,i,j}^2$  ( $R_g$  costante del gas aria);
3. determinazione del numero di Mach a valle:  $M_{2,i,j} = V_{2,i,j}/c_{2,i,j}$ ;
4. calcolo della pressione a valle utilizzando l'espressione della (nota) pressione di ristagno:  $p_{2,i,j} = \frac{p_{t2,i,j}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{2,i,j}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$ ;
5. calcolo delle componenti del vettore velocità utilizzando lo swirl assegnato:  $\underline{V}_{2,i,j} = V_{2,i,j} \hat{\underline{y}}_{i,j}$ ;
6. determinazione della densità a valle:  $\rho_{2,i,j} = \gamma \frac{p_{2,i,j} M_{2,i,j}^2}{V_{2,i,j}^2}$ .

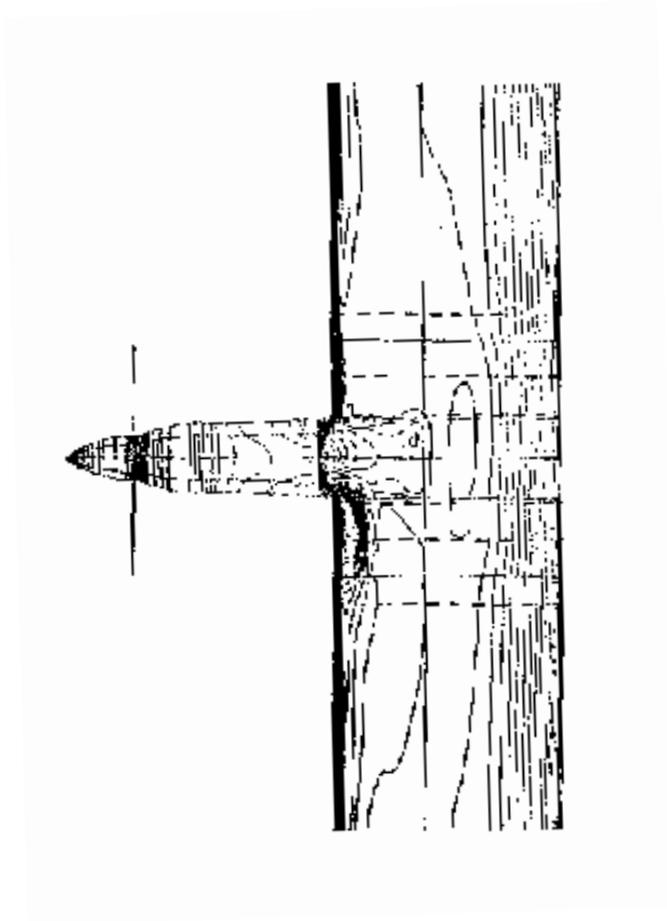


Figura 4.2: Configurazione ala-gondola-elica propfan, isobare del campo di moto ottenuto mediante soluzione delle equazioni di Eulero,  $M_\infty = 0.7$ ,  $c_L = 0.37$ ,  $J = 3.06$ , (Amendola *et al.*, 1988).

In figura 4.2 è riportata la soluzione ottenuta per la configurazione ala-gondola-elica propfan per  $M_\infty = 0.7$ ,  $C_L = 0.37$ ,  $J = 3.06$ . Le isobare mostrano che sul lato sinistro dell'ala, dove la rotazione dell'elica induce un campo di velocità indotto diretto verso l'alto, si ottengono delle forti sovraespansioni che inducono una intensa onda d'urto sull'ala, limitata all'interno della scia dell'elica. In condizioni "propeller off" il flusso sarebbe subcritico all'assetto studiato, sono quindi evidenti i notevoli problemi di interferenza aerodinamica che possono essere presenti quando eliche avanzate vengono utilizzate nel regime di alto subsonico.

Parte II

**AERODINAMICA DEL  
ROTORE**



## Capitolo 5

# Il rotore in hovering

### 5.1 Teoria impulsiva per il rotore in hovering

Una condizione di funzionamento fondamentale del rotore è il cosiddetto hovering che consiste essenzialmente in un rotore in grado di generare trazione mentre è investito da una corrente di velocità asintotica nulla. Questa condizione è perfettamente equivalente al funzionamento di un'elica a punto fisso. L'importanza dell'hovering per un rotore è tale che esso può essere considerato la caratteristica che lo identifica e contraddistingue: il rotore è quella macchina a fluido in grado di generare una forza di sustentazione (in genere verticale) anche quando la velocità relativa della corrente fluida è nulla.

Le teorie impulsive illustrate nel Capitolo 1 sono state derivate nell'ipotesi di flusso quasi unidimensionale e trascurabilità della contrazione della scia. In maniera analoga alla teoria quasi-unidimensionale dell'ugello in cui le condizioni di ristagno sono caratterizzate da una sezione del tubo di flusso di area infinita, le teorie impulsive possono essere estese al rotore in hovering (o applicate anche per l'elica a punto fisso) considerando  $V_\infty = 0$  e la sezione del tubo di flusso all'infinito a monte di area infinita. Sul rotore, ancora una volta schematizzato come un disco attuatore, è presente un'induzione media (in questo caso tutta la velocità) pari a  $w$ , mentre all'infinito a valle essa è pari a  $2w$  se consideriamo il rotore infinitamente lontano dal suolo (ipotizziamo cioè trascurabile l'effetto suolo).

È possibile descrivere con le teorie impulsive anche la condizione di funzionamento del rotore in salita, caratterizzata, nelle nostre convenzioni da  $V_\infty > 0$  (cfr. figure 5.1 e 5.2), mentre una più attenta analisi, come vedremo, è richiesta per la descrizione del funzionamento del rotore in discesa. Indicando con  $w_h$  l'induzione sul disco del rotore in hovering, le relazioni (1.11) e (1.12) diventano

$$T = 2\rho w_h^2 A, \quad P = 2\rho w_h^3 A; \quad (5.1)$$

oppure, in termini adimensionali:

$$T_c = 2\lambda_i^2, \quad Q_c = \frac{T_c^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}; \quad (5.2)$$

dove  $\lambda_i = w_h/(\Omega R)$ .

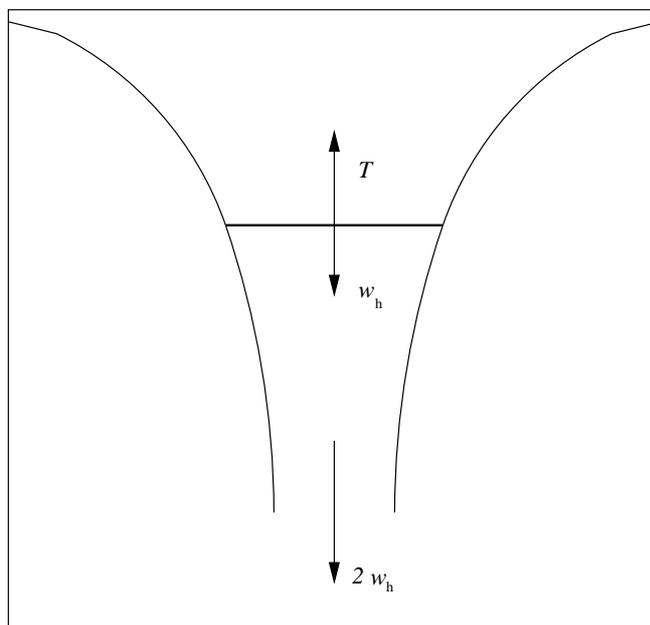


Figura 5.1: Il rotore in hovering nel modello della teoria impulsiva.

In generale, sia in hovering che in salita, il rotore è caratterizzato da un rapporto di funzionamento molto prossimo a 0 per cui  $\varphi \ll 1$ . Inoltre, nel paragrafo 2.6, abbiamo visto che un'elica ottima, per rapporti di funzionamento molto piccoli, è caratterizzata da fattori di interferenza rotazionali  $a' \approx 0$ ; questo implica che un rotore progettato correttamente, in hovering può essere descritto efficacemente dalla teoria impulsiva semplice e l'introduzione della teoria impulsiva generale non si rende necessaria.

## 5.2 Teoria dell'elemento di pala per il rotore in hovering

Per quanto detto nel precedente paragrafo, si considerano valide le seguenti ipotesi:

1.  $\varphi \ll 1$ ,
2.  $a' = 0$ .

Particolarizziamo quindi a questo caso la teoria generale dell'elemento di pala descritta nel paragrafo 2.3. La prima delle relazioni (2.16) diventa

$$\lambda_1 \approx c_l - c_d \varphi = c_l \left(1 - \frac{\varphi}{E}\right), \quad (5.3)$$

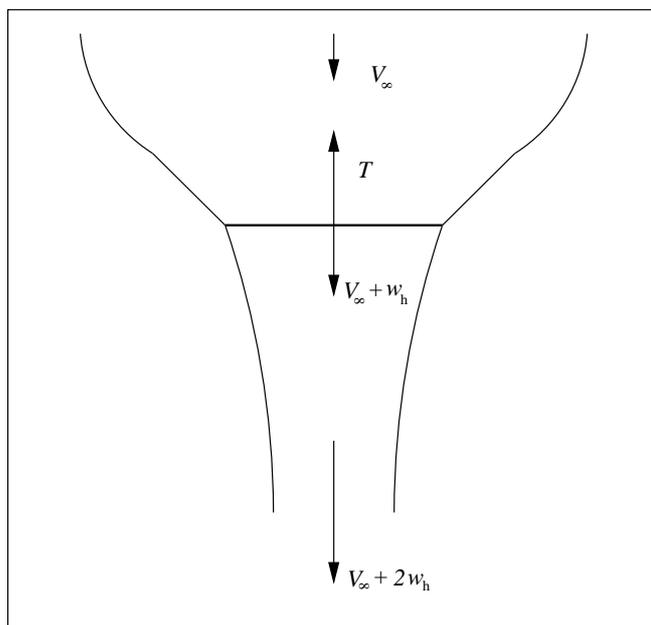


Figura 5.2: Il rotore in salita nel modello della teoria impulsiva.

con  $E$  l'efficienza aerodinamica dell'elemento di pala. Se l'elemento lavora, come è auspicabile, in condizioni di alta efficienza,  $\frac{1}{E} \ll 1$  per cui

$$\lambda_1 \approx c_l = c_{l_\alpha}(\theta - \varphi), \quad (5.4)$$

con il calettamento  $\theta$  misurato rispetto alla retta di portanza nulla del profilo.

Un'altra semplificazione importante si ottiene imponendo l'ipotesi 2 nella relazione (2.19):

$$V_e = \frac{\Omega r(1 - a')}{\cos \varphi} \approx \Omega r; \quad (5.5)$$

per cui, uguagliando la prima delle (2.19) alla (1.23) si ottiene

$$\frac{Nc}{2\pi r} (\Omega r)^2 c_{l_\alpha} \left( \theta - \frac{V_\infty + w}{\Omega r} \right) = 4(V_\infty + w)w, \quad (5.6)$$

relazione in cui si è posto  $\varphi \approx (V_\infty + w)/(\Omega r)$ .

Ponendo  $\mu = V_\infty/(\Omega R)$ ,  $\lambda_i = w/(\Omega R)$  e  $\sigma = Nc/(\pi R)$  si ottiene ( $\varphi \approx \mu/\bar{r} + \lambda_i/\bar{r}$ ):

$$\lambda_i^2 + \left( \mu + c_{l_\alpha} \frac{\sigma}{8} \right) \lambda_i - \bar{r} c_{l_\alpha} \frac{\sigma}{8} \left( \theta - \frac{\mu}{\bar{r}} \right) = 0, \quad (5.7)$$

equazione di secondo grado nell'induzione  $\lambda_i$  di cui si sceglie la radice positiva.

Nel caso di rotore in hovering o in salita (lenta) è possibile ottenere l'induzione assiale sull'elica in forma esplicita.

È quindi possibile ricavare le prestazioni del rotore mediante un'unica tabella come nell'esempio di tabella (5.1).

$\bar{r}$	$\theta$ ( $^\circ$ )	$\sigma$	$\lambda_i$	$\varphi$ ( $^\circ$ )	$\alpha$ ( $^\circ$ )	$c_l$	$c_d$	$dT_c/d\bar{r}$	$dQ_c/d\bar{r}$
0.132	13.3	0.0580	0.0205	8.91	4.43	0.440	0.0110	0.0127	0.0023
0.263	12.7	0.0580	0.0325	7.09	5.60	0.557	0.0124	0.0644	0.0173
0.395	12.0	0.0580	0.0413	6.00	6.03	0.599	0.0129	0.156	0.0523
0.526	11.4	0.0580	0.0481	5.24	6.13	0.609	0.0131	0.282	0.109
0.724	10.4	0.0580	0.0557	4.41	5.97	0.594	0.0129	0.519	0.231
0.855	9.72	0.0580	0.0594	3.98	5.74	0.571	0.0125	0.697	0.330
1.000	9.00	0.0580	0.0624	3.58	5.42	0.539	0.0121	0.900	0.447

Tabella 5.1: Calcolo delle prestazioni in hovering di un rotore mediante la teoria dell'elemento di pala.  $N = 3$ ,  $R = 7.60m$ ,  $\mu = 0$ .

L'espressione della spinta diventa

$$T = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 R^2 A \int_0^1 \sigma c_l \bar{r}^2 d\bar{r}, \quad (5.8)$$

per cui

$$T_c = \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma c_l \bar{r}^2 d\bar{r}. \quad (5.9)$$

Essendo:

$$dQ = Nr(dD + \varphi dL) \approx NrdD + r\varphi dT,$$

con  $NdD = Nc_d \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^2 c dr = \frac{\sigma}{2} \rho A R^2 \Omega^2 c_d \bar{r}^2 d\bar{r}$ , si ottiene

$$P = Q\Omega = \frac{1}{2} \rho A \Omega^3 R^3 \int_0^1 \sigma (c_d + c_l \varphi) \bar{r}^3 d\bar{r} \quad (5.10)$$

e quindi

$$Q_c = \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma (c_d + c_l \varphi) \bar{r}^3 d\bar{r}, \quad (5.11)$$

in cui si nota un contributo parassita ( che dipende dal  $c_d$ ) ed uno indotto (che dipende dal  $c_l$ ).

Anche per il rotore in hovering si può tenere conto delle perdite di estremità mediante la funzione di Prandtl  $F$  (vedi paragrafo 2.7). In alternativa viene spesso schematizzato il fenomeno come una riduzione del raggio effettivo del rotore:

$$T_c = \frac{1}{2} \int_0^B \sigma c_l \bar{r}^2 d\bar{r}, \quad (5.12)$$

con  $B \approx 0.97$ . Una tra le tante espressioni di  $B$  suggerita in letteratura è

$$B = 1 - \frac{\sqrt{2}}{N} T_c. \quad (5.13)$$

Le perdite di spinta comportano una diminuzione del 5-10% della spinta; inoltre, a parità di  $T_c$  le perdite di estremità comportano un aumento di  $\lambda_i$  e, di conseguenza, della potenza indotta (2-3%).

### 5.3 Il rotore ideale

Nell'ipotesi di trascurabilità dell'induzione rotazionale è già stata trovata nel paragrafo (1.3) una condizione di ottimo in base alla teoria impulsiva:  $w(r) = costante$ , che ci consente di definire il rotore in grado di minimizzare la potenza indotta.

La relazione (5.6) per  $V_\infty = 0$  si scrive:

$$\frac{Nc}{2\pi} \Omega^2 r c_{l_\alpha} \left( \theta - \frac{w}{\Omega r} \right) = 4w^2. \quad (5.14)$$

Imponendo  $w$  costante e scegliendo un profilo costante lungo la pala ( $c_{l_\alpha}(r) = costante$ ), una possibile condizione di ottimo si ottiene per  $c(r) = costante$  e  $\theta r = costante$ , cioè con un rotore di forma in pianta rettangolare ed una distribuzione di calettamento iperbolica:

$$\theta(\bar{r}) = \frac{\theta_t}{\bar{r}}. \quad (5.15)$$

Questo rotore, che minimizza con una forma in pianta molto semplice, la potenza indotta in hovering viene detto *rotore ideale*.

L'angolo di inflow diventa  $\varphi = \varphi_t / \bar{r}$  con  $\varphi_t = \lambda_i$ .

L'espressione del coefficiente di spinta per il rotore ideale è:

$$T_c = \frac{1}{2} \sigma \int_0^1 c_l \bar{r}^2 d\bar{r} = \frac{\sigma}{4} c_{l_\alpha} (\theta_t - \varphi_t). \quad (5.16)$$

Tenendo conto delle (5.2) e della (5.16) si ottiene invece la seguente espressione del coefficiente di potenza:

$$Q_c = \frac{\sigma}{8} \bar{c}_d + \frac{T_c^{3/2}}{\sqrt{2}}, \quad (5.17)$$

dove con  $\bar{c}_d$  si è indicato il coefficiente di resistenza medio lungo il raggio della pala.

### 5.4 Il rotore ottimo

Il rotore ideale è stato ottenuto richiedendo la minimizzazione della potenza indotta e non di tutta la potenza, per cui probabilmente è ottenibile una macchina più efficiente se si richiede che anche le perdite parassite siano minime.

Questo risultato si ottiene imponendo nella (5.14) che non solo  $w(r) = costante$  ma anche che l'angolo effettivo dell'elemento di pala  $\alpha(r) = \alpha_{opt}$  sia costante con  $r$  e tale da minimizzare le perdite viscosive.

È facile verificare con la relazione (5.14) che questo risultato è ottenibile anche se non è più possibile con una pala rettangolare ma è necessario che:

$$c_{l_\alpha}(r) = costante \quad , \quad c(r) = \frac{c_t}{\bar{r}} \quad , \quad \theta(\bar{r}) = \alpha_{opt} + \frac{\varphi_t}{\bar{r}}. \quad (5.18)$$

Il rotore caratterizzato da questa geometria viene detto rotore *ottimo* in hovering.

Le espressioni dei coefficienti di spinta e potenza diventano in questo caso

$$T_c = \frac{\sigma_t}{4} c_l \quad (5.19)$$

e

$$Q_c = \frac{\sigma_t}{6} c_d + \frac{T_c^{3/2}}{\sqrt{2}}. \quad (5.20)$$

Un confronto tra la (5.20) e la (5.17) non è immediato. Introducendo una solidità *equivalente* del rotore ottimo definita attraverso la relazione

$$T_c = \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma c_l \bar{r}^2 d\bar{r} = \frac{\sigma_e c_l}{2} \int_0^1 \bar{r}^2 d\bar{r}, \quad (5.21)$$

si ottiene  $\sigma_t = \frac{2}{3}\sigma_e$  per cui

$$Q_c = \frac{\sigma_e c_d}{9} + \frac{T_c^{3/2}}{\sqrt{2}}, \quad (5.22)$$

cioè un rotore ottimo di solidità equivalente pari alla solidità di un corrispondente rotore ideale ha una potenza parassita inferiore dello 11%.

Si noti comunque che  $c(r) \rightarrow \infty$  per  $r \rightarrow 0$  per cui esistono dei limiti pratici costruttivi di un rotore ottimo.

## 5.5 Il rotore reale

Nelle realizzazioni pratiche, in genere, si preferisce utilizzare una più semplice distribuzione di calettamento, per cui, a parte i limiti teorici dell'espressione (5.2) la potenza indotta del rotore risulta maggiore di un fattore  $k$ ; nel caso di distribuzione di calettamento lineare con  $r$  si ha che  $k \approx 1.13 \div 1.15$ . Se si indica con  $\sigma$  una solidità media del rotore (da non confondere con la solidità equivalente  $\sigma_e$  del rotore ottimo) è possibile scrivere, per un rotore reale:

$$Q_c = \frac{\sigma \bar{c}_d}{8} + k \frac{T_c^{3/2}}{\sqrt{2}} \quad (5.23)$$

La curva  $Q_c(T_c)$  viene detta polare in hovering del rotore. Nella Figura 5.3 sono confrontate le polari in hovering per un rotore ideale, rotore ottimo e rotore reale con distribuzione lineare del calettamento. Sovente in letteratura le polari in hovering vengono espresse in termini di  $Q_c/\sigma = q_c$  e  $T_c/\sigma = t_c$ ; si noti come  $t_c$  e  $q_c$  sono i coefficienti di spinta e potenza in cui si è utilizzata come superficie di riferimento la superficie effettiva del rotore  $A_r = NcR$ .

## 5.6 La cifra di merito

Essendo  $V_\infty = 0$  la definizione di rendimenti dell'elica ( $\eta = TV_\infty/P$ ) non può, chiaramente essere applicata al caso di rotore in hovering. In questo caso la valutazione delle prestazioni di un dato rotore è agevolata introducendo la cifra di merito:

$$FM = \frac{P_{i_{min}}}{p} = \frac{T_c^{3/2}/\sqrt{2}}{Q_c}, \quad (5.24)$$

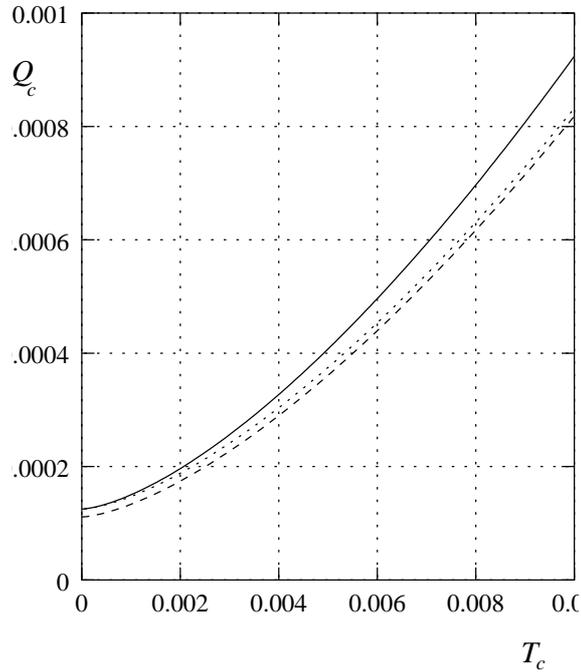


Figura 5.3: Coefficiente di potenza in hovering in funzione del coefficiente di spinta;  $\bar{c}_d = 0.01$ ,  $\sigma = 0.1$ . — : rotore reale ( $k = 1.13$ );  $\cdots$ : rotore ideale;  $---$ : rotore ottimo.

dove con  $P_{i_{min}}$  si è indicata la risultante indotta minima possibile. La cifra di merito è quindi il rapporto tra la *minima potenza indotta teoricamente possibile* e la *potenza effettiva* per il dato valore della spinta. Chiaramente maggiore è  $FM$ , migliori le caratteristiche del rotore.

L'utilizzo della cifra di merito nel confronto tra più rotori richiede però qualche cautela. Due parametri molto importanti nel dimensionamento sono il *disk loading* ( $T/A$ ) ed il *power loading* ( $T/P$ ); questi due parametri sono dimensionali e, chiaramente, a parità di spinta  $T$ , maggiore è  $T/P$  migliore è l'efficienza della macchina. Dalla definizione di  $FM$  (5.24) e dalle (5.1) si ricava:

$$FM = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \frac{T}{P} \sqrt{\frac{T}{A}}, \quad (5.25)$$

cioè nel piano  $(\sqrt{\frac{T}{A}}, \frac{T}{P})$  i rotori di pari  $FM$  sono individuati da una iperbole. È facile verificare disegnando in questo piano due curve con differente  $FM$  che aumentare  $FM$  porta ad un aumento di  $T/P$  solo se  $\frac{T}{A}$  è fissato; quindi *la cifra di merito consente di confrontare le prestazioni di due rotori solo a parità di  $T/A$ .*

Nel caso di un rotore reale la dipendenza di  $FM$  da  $T_c$  è nota se è nota la

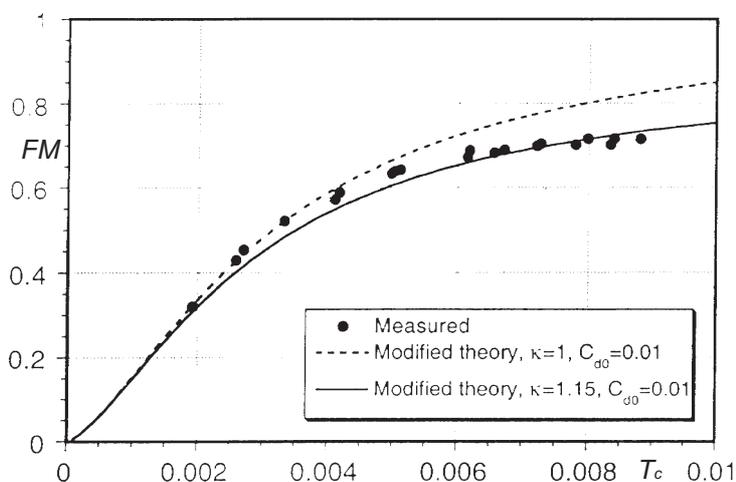


Figura 5.4: Cifra di merito in funzione del coefficiente di spinta (Leishman, 2000).

polare in hovering:

$$FM = \frac{\frac{T_c^{3/2}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sigma}{8}\bar{c}_d + k\frac{T_c^{3/2}}{\sqrt{2}}}, \quad (5.26)$$

vedi figura 5.4.

$FM$  chiaramente aumenta con  $T_c$  in quanto le perdite parassite diminuiscono in proporzione rispetto a quelle indotte. Fissato  $T_c$  è possibile migliorare significativamente  $FM$  agendo su  $\sigma$  e  $\bar{c}_d$ .

L'aumento di efficienza al diminuire del  $c_d$  degli elementi di pala è ovvio, un po' meno che  $FM$  migliori al diminuire di  $\sigma$ <sup>1</sup>. È questa la ragione per cui nei rotori reali di elicotteri in genere la solidità è bassa ( $\sigma \approx 0.1$ ).

Si nota però che, indicando con  $\bar{c}_l$  il coefficiente di portanza medio lungo la pala e  $\sigma$  la solidità media dalla (5.9) si ottiene

$$\bar{c}_l = 6\frac{T_c}{\sigma}, \quad (5.27)$$

cioè, tenendo conto che  $c_{l_\alpha} \approx 6.28$ , l'angolo di attacco medio è dato da  $\bar{\alpha} \approx T_c/\sigma$ , per cui diminuire  $\sigma$  comporta, fissato  $T_c$  un aumento dell'angolo di attacco effettivo degli elementi di pala; quindi lo stallo del rotore limita  $\sigma$ , non solo, ma la sicurezza della macchina richiede anche di salvaguardare un certo margine rispetto allo stallo.

<sup>1</sup>L'aumento di  $FM$  è comunque facilmente spiegabile tenendo conto che, a parità di  $A$  una diminuzione di  $\sigma$  implica una diminuzione dell'area bagnata del rotore.

Sostituendo nella (5.26)  $T_c = \frac{\sigma \bar{c}_l}{6}$  si ottiene:

$$FM = \frac{\frac{1}{6^{3/2}\sqrt{2}} \frac{\bar{c}_l^{3/2}}{\bar{c}_d}}{\frac{1}{8\sigma^{1/2}} + \frac{k}{6^{3/2}\sqrt{2}} \frac{\bar{c}_l^{3/2}}{\bar{c}_d}}. \quad (5.28)$$

Questa relazione mostra che per massimizzare  $FM$  è necessario massimizzare  $\bar{c}_l^3/\bar{c}_d^2$ , condizione che aiuta ad individuare l'angolo d'attacco in cui deve funzionare il rotore in hovering.

Nella realtà l'andamento di  $FM(T_c)$  si scosta leggermente da quello indicato in figura 5.4 per i valori grandi di  $T_c$ . Infatti  $FM$  non aumenta indefinitamente con  $T_c$ , ma può anche diminuire leggermente, perchè il  $c_d$  tende ad aumentare con  $T_c$  (aumenta  $\bar{\alpha}$ ).

Nella pratica, con le attuali tecnologie, un rotore dalle buone prestazioni in hovering è caratterizzato da  $FM \approx 0.7 \div 0.8$ .

Come già detto,  $FM$  da solo non è in grado di identificare le prestazioni in hovering del rotore. Dall'espressione della polare in hovering (5.23) si ottiene

$$P = \frac{\sigma \bar{c}_d}{8} \rho \pi \Omega^3 R^5 + \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \frac{T^{3/2}}{\sqrt{\pi R}}, \quad (5.29)$$

da cui si evince che la potenza indotta è indipendente da  $\Omega$  e che può essere minimizzata, fissato il peso del velivolo e quindi  $T$ , facendo aumentare  $R$ , ne conseguono le grandi dimensioni dei rotori principali degli elicotteri. Un aumento di  $R$  non comporta un aumento delle perdite parassite se contemporaneamente si fa diminuire  $\Omega$ . Ad ogni modo  $\Omega$  non può essere troppo piccolo perchè:

- 1) come vedremo è necessaria una sufficiente energia cinetica delle pale per consentire il funzionamento in autorotazione;
- 2) l'articolazione del rotore, necessaria per il volo traslato, porta a conicità troppo elevate in hovering se  $\Omega$  è troppo piccola e quindi ad un degrado delle prestazioni;
- 3) il dimensionamento del rotore richiede anche l'analisi in volo traslato.

## 5.7 Velocità di salita

Si assume che il rotore abbia velocità di salita assiale pari a  $V_c$  ed un relativo rapporto di avanzamento  $\mu = \frac{V_c}{\Omega R}$ .

Per un dato rotore la teoria dell'elemento di pala ci consente di, assegnato  $\mu$ , determinare  $T_c$ , oppure viceversa, assegnato  $T_c$  determinare  $\mu$ .

Si assuma che la spinta  $T$  sia fissata e, per semplicità di analisi,  $w(r) = \text{costante}$ . Indicando con  $i$  e  $c$  rispettivamente le condizioni di hovering e salita, dalla teoria impulsiva si ottiene ( $\lambda_i = w/(\Omega R)$ ,  $\lambda_c = w_c/(\Omega R)$ ):

$$(\mu + \lambda_c)\lambda_c = \lambda_i^2, \quad (5.30)$$

da cui

$$\lambda_c = -\frac{\mu}{2} + \lambda_i \sqrt{\frac{\mu_c^2}{4\lambda_i^2} + 1}. \quad (5.31)$$

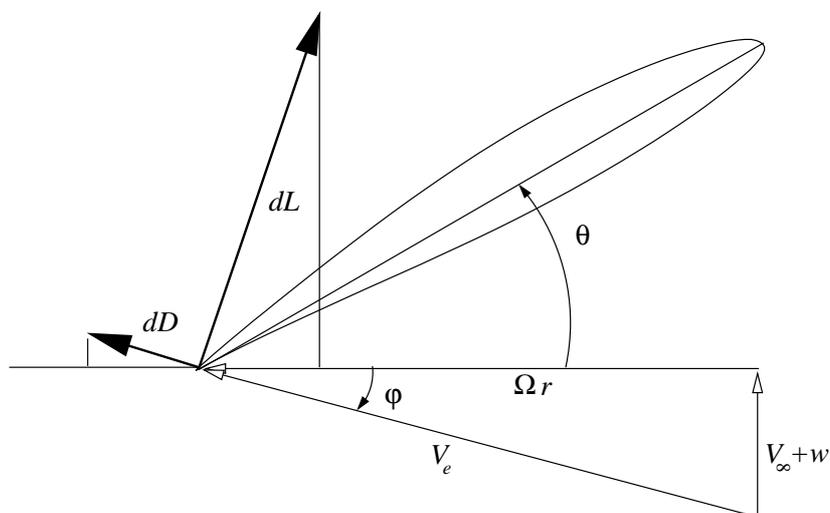


Figura 5.5: Elemento di pala in condizione di autorotazione.

Poichè nella pratica  $\mu/\lambda_i \ll 1$ :

$$\lambda_c \approx \lambda_i - \frac{\mu}{2}, \quad (5.32)$$

cioè l'induzione in hovering è maggiore di quella in salita a parità di spinta e risulta che la potenza dissipata in hovering è maggiore di quella dissipata in salita <sup>2</sup>.

Se si trascura, date le basse velocità  $V_c$  la resistenza della fusoliera dell'elicottero, la potenza in salita è data, come in hovering, dal contributo parassita e indotto. Per un dato rotore ad un fissato  $T_c$ , corrisponde uno stesso angolo di attacco medio e quindi lo stesso  $\bar{c}_d$  per cui la potenza parassita è praticamente la stessa per cui, indicando con  $\Delta Q_c = Q_{c_c} - Q_{c_h}$ :

$$\Delta Q_c = T_c \mu + T_c \lambda_c - T_c \lambda_i \approx T_c \mu + T_c \left( \lambda_i - \frac{\mu}{2} \right) - T_c \lambda_i \approx \frac{T_c \mu}{2}. \quad (5.33)$$

## 5.8 Autorotazione

L'autorotazione è una condizione di funzionamento del rotore in cui viene fornita spinta a potenza nulla. Per la conservazione dell'energia, una condizione di questo tipo è possibile solo se il rotore sta perdendo energia potenziale, cioè in discesa.

Si consideri un elemento di pala in discesa assiale, la condizione di autorotazione dell'elemento di pala è data da  $dP = (dD \cos \varphi - dL \sin \varphi) \cdot \Omega R = 0$ . (vedi figura 5.5). Indicando con  $E$  l'efficienza aerodinamica dell'elemento di pala il punto di autorotazione è caratterizzato da

$$\alpha = \theta + \varphi \quad ; \quad \tan \varphi = \frac{1}{E}. \quad (5.34)$$

<sup>2</sup>In salita la potenza totale è  $P = T(V_c + w_c)$ , ma la potenza dissipata per induzione è solo  $P = Tw_c$  in quanto  $TV_c$  è lavoro utile (l'energia viene acquisita come energia potenziale).

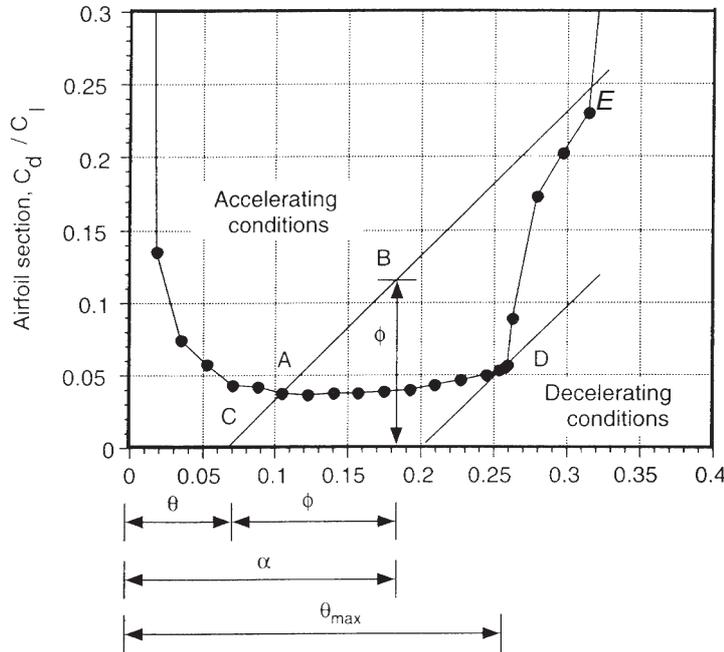


Figura 5.6: Diagramma per descrivere le condizioni di autorotazione di un elemento di pala (Leishman, 2000).

Noto l'andamento di  $1/E$  al variare di  $\alpha$ , questa condizione è identificabile con una costruzione grafica, come illustrato in figura 5.6 (in cui si è assunto  $\tan \varphi \approx \varphi$ ).  $D$  è il punto di tangenza di una retta inclinata a  $45^\circ$  con la curva  $1/E$ . L'autorotazione è ottenibile solo per valori di  $\theta < \theta_D$  ed, in genere per ciascun  $\theta$  sono possibili 2 condizioni di autorotazione identificate dai punti  $A$  e  $E$ , per i quali è facile verificare che le condizioni di autorotazione (5.34) sono soddisfatte. La condizione di autorotazione è però stabile in  $A$  ed instabile in  $E$ .

Si consideri una perturbazione della condizione  $A$ , ad esempio una raffica ascendente che fa aumentare  $\varphi$  ad un valore  $\varphi_B$  e conseguentemente l'angolo d'attacco. Con riferimento alla figura 5.5, in autorotazione la forza aerodinamica è diretta secondo l'asse del rotore. In conseguenza della perturbazione, la risposta della forza aerodinamica sarà di inclinarsi verso destra in quanto dal diagramma 5.6 risulta  $1/E = dD/dL < \varphi_B$ , per cui essa, essendo motrice, porterà ad un aumento di  $\Omega$  ed una conseguente diminuzione di  $\varphi$ : il sistema tende a ritornare nelle condizioni iniziali ed è quindi stabile. Al contrario, il sistema in  $E$  risponde ad una perturbazione con l'allontanamento ulteriore da  $E$  ( $1/E > \varphi_E$ ) ed la condizione è quindi instabile.

Quella illustrata fino ad ora è la condizione di autorotazione di un elemento di pala; nel caso di un rotore in autorotazione, solo per un elemento sarà verificata la condizione descritta in figura 5.5. Tenendo conto che all'aumentare di  $r$  diminuisce l'angolo d'attacco dell'elemento, in generale si avrà che gli elementi

più vicini e mozzo saranno in stallo, poi si avranno elementi di pala per cui  $dP < 0$  ed infine nella parte più esterna della pala si avrà  $dP > 0$  però con

$$P = \int_0^R dP = 0.$$

## 5.9 Curve di funzionamento in salita e discesa

La teoria impulsiva semplice è in grado di descrivere il funzionamento di un rotore non solo in salita e hovering, ma anche per una parte delle condizioni di discesa. Il funzionamento in discesa (per congruenza delle convenzioni sui segni di velocità e forze in discesa è  $V_\infty < 0$ ) è caratterizzato da  $V_\infty$  e  $w$  di verso opposto. Fintanto che  $|V_\infty| > |2w|$  la teoria impulsiva è in grado di descrivere la condizione di discesa: in questo caso ci si trova nel regime di mulinello frenante già studiato nel capitolo 2.

Si nota però che in discesa la scia è al di sopra e non al di sotto del rotore (vedi figura 5.7); inoltre la teoria impulsiva non è più applicabile quando  $V_\infty + 2w = 0$ , infatti in queste condizioni nella scia a valle il flusso medio è nullo, cade l'ipotesi di unidimensionalità. In queste condizioni la scia è fortemente instazionaria e turbolenta e la sezione del tubo di flusso non è chiaramente identificabile.

Questa condizione  $V_\infty + 2w = 0$  identifica l'inizio del regime di funzionamento di *scia turbolenta*. Facendo ulteriormente diminuire  $|V_\infty|$  la scia turbolenta si avvicina al rotore fino a che  $V_\infty + w = 0$  cioè il flusso di massa attraverso il rotore è nullo. In queste condizioni è ancora ottenibile una spinta  $T$  ma il lavoro nell'unità di tempo che questa forza compie  $P_i = T(V_\infty + w) = 0$ ; si è ottenuta la condizione di funzionamento detta di autorotazione ideale in cui il rotore sta funzionando da *paracadute*.

Per valori ancora più piccoli di  $|V_\infty|$  si ha che il flusso medio attraverso il rotore è diretto verso il basso, il campo di moto è caratterizzato da vortici anello in cui il flusso scende attraverso la pala e risale all'esterno. (regime di vortici ad anello, vedi figura 5.7.)

Si consideri una condizione di funzionamento in salita e si assuma fissata la spinta; dalla teoria impulsiva

$$2\rho(V_\infty + w)Aw = 2\rho w_h^2 A, \quad (5.35)$$

da cui, introducendo  $\tilde{V}_\infty = V_\infty/w_h$  e  $\tilde{w} = w/w_h$ ;  $(\tilde{V}_\infty + \tilde{w})\tilde{w} = 1$  per cui

$$\tilde{w} = -\frac{\tilde{V}_\infty}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{V}_\infty}{2}\right)^2 + 1}. \quad (5.36)$$

Analogamente indicando con  $P = T(V_\infty + w)$  la potenza coinvolta ( $Tw$  è la potenza indotta) e definendo  $\tilde{P} = P/P_h$  si ottiene

$$\tilde{P} = \tilde{V}_\infty + \tilde{w} \quad (5.37)$$

Le funzioni (5.36) e (5.37) sono illustrate nelle figure 5.8 e 5.9 e vengono dette curve di funzionamento del rotore; in salita sono curve universali.

Analogamente la condizione di discesa a mulinello frenante è caratterizzata

da  $2\rho(V_\infty + w)A(V_\infty - V_\infty - 2w) = 2\rho w_h^2 A$  per cui  $(\tilde{V}_\infty + \tilde{w})\tilde{w} = -1$  e quindi

$$\tilde{w} = -\frac{\tilde{V}_\infty}{2} - \sqrt{\left(\frac{\tilde{V}_\infty}{2}\right)^2 - 1}, \quad (5.38)$$

con la scelta della radice obbligata dal soddisfacimento della relazione  $V_\infty + 2w < 0$ .

La potenza è sempre data da  $\tilde{P} = \tilde{V}_\infty + \tilde{w}$  dove però adesso  $\tilde{w}$  è data dalla (5.38). Queste curve di funzionamento universali sono ancora proposte in figura 5.8 e 5.9.

La funzione (5.37) non ammette radici reali per  $-2 < \tilde{V}_\infty < 0$  che è proprio l'intervallo in cui la teoria impulsiva non è valida.

In questo intervallo, non avendo nessuna teoria a disposizione le curve di funzionamento di un rotore possono essere determinate solo sperimentalmente. In questo caso è possibile ottenere una definizione di  $w$  ponendo

$$P = T(V_\infty + w) + P_p, \quad (5.39)$$

dove  $P_p$  è la potenza passiva esprimibile come  $P_p = \frac{\sigma c_d}{8} \rho \Omega^3 R^3 A$ .

Tenendo conto che

$$T(V_\infty + w) = T(\tilde{V}_\infty + \tilde{w})w_h = \frac{T_c^{3/2}}{\sqrt{2}}(\tilde{V}_\infty + \tilde{w})\rho \Omega^3 R^3 A, \quad (5.40)$$

si ottiene

$$Q_c = \frac{T_c^{3/2}}{\sqrt{2}}(\tilde{V}_\infty + \tilde{w}) + \frac{\sigma c_d}{8}. \quad (5.41)$$

Conoscendo la geometria del rotore ( $\sigma$ ) e l'aerodinamica delle pale ( $c_d$ ) e misurando  $Q_c$  e  $T_c$  al variare di  $\tilde{V}_\infty$  con la (5.40) è possibile ottenere le curve di funzionamento sperimentale.

Ovviamente non si otterrà più un comportamento universale, ma lo "scatter" tra queste curve è abbastanza piccolo, vedi ancora le figure 5.8 e 5.9. Inoltre, sorprendentemente, per un lungo tratto queste sono molto vicine a quelle (tratteggiate) ottenute per  $V_\infty < 0$  utilizzando le formule (5.35) e (5.36) valide in salita!

Chiaramente in hovering si ottengono valori di  $\tilde{w}$  e  $\tilde{P}$  maggiori di 1 in quanto negli esperimenti occorre introdurre le perdite di estremità e quelle dovute alla non costanza di  $w$  lungo la pala. Si nota inoltre che l'autorotazione reale si individua nel regime di scia turbolenta.

## 5.10 Effetto suolo in hovering

Le prestazioni del rotore sono influenzate in modo significativo dalla presenza del suolo o di un altro ostacolo che "costringono" lo sviluppo della scia.

L'esperienza mostra che in condizioni di effetto suolo la spinta aumenta a parità di potenza, o, equivalente, la potenza dinamica a parità di spinta.

Una spiegazione definitiva di questo effetto non è stata ancora data. Una prima interpretazione può essere ottenuta considerando che, fissata l'induzione e quindi la potenza, il suolo costringe la scia a curvarsi in modo simmetrico al

suo asse. La curvatura delle linee di corrente comporta un gradiente normale di pressione per cui la pressione media a valle del rotore risulta maggiore e porta ad un aumento della spinta.

Un altro modello, che ha anche portato a risultati quantitativi consiste nello studiare il sistema vorticoso della scia ed utilizzare il metodo delle immagini per imporre la condizione al contorno di velocità normale nulla al suolo.

Il sistema vorticoso immagine induce sul rotore una componente di velocità indotta di verso opposto per cui a parità di spinta, l'induzione totale sul rotore diminuisce portando ad una diminuzione della potenza indotta.

Un'espressione analitica del rapporto delle spinte con e senza effetto suolo (a potenza costante) basata su correlazioni sperimentali è data da

$$\frac{T}{T_\infty} = \frac{1}{1 - \left(\frac{R}{4z}\right)^2}, \quad (5.42)$$

dove  $z$  indica la distanza dal suolo del rotore. Questa relazione indica che l'effetto suolo in hovering diventa trascurabile per  $z \geq 2R$ .

Per quanto riguarda la potenza, poichè possiamo vedere l'effetto suolo come un aumento di spinta a parità di potenza indotta, allora  $\lambda T_c = \lambda_\infty T_{c_\infty}$  da cui

$$\frac{\lambda}{\lambda_\infty} = \frac{T_{c_\infty}}{T_c} = \frac{T_\infty}{T} = K_G, \quad (5.43)$$

e quindi a parità di spinta

$$\frac{P_c}{P_{c_\infty}} = \frac{T_c}{T_\infty} \frac{\lambda}{\lambda_\infty} = K_G. \quad (5.44)$$

Oppure, tenendo conto che l'effetto è sostanzialmente sulla potenza indotta<sup>3</sup>

$$P = P_P + K_G P_{i_\infty}. \quad (5.45)$$

---

<sup>3</sup>In realtà l'effetto suolo porta anche ad una leggera riduzione della potenza parassita a causa della diminuzione dell'angolo d'attacco dell'elemento di pala a parità di spinta.

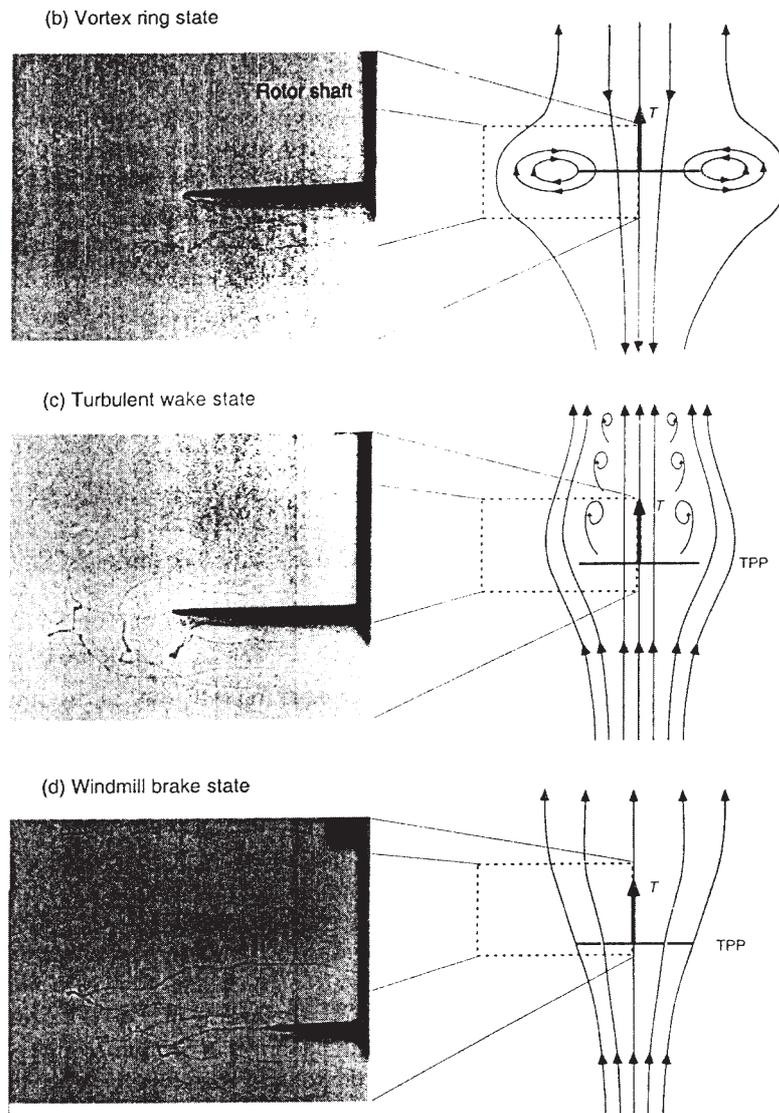


Figura 5.7: Regimi di funzionamento del rotore in discesa (Leishman, 2000).

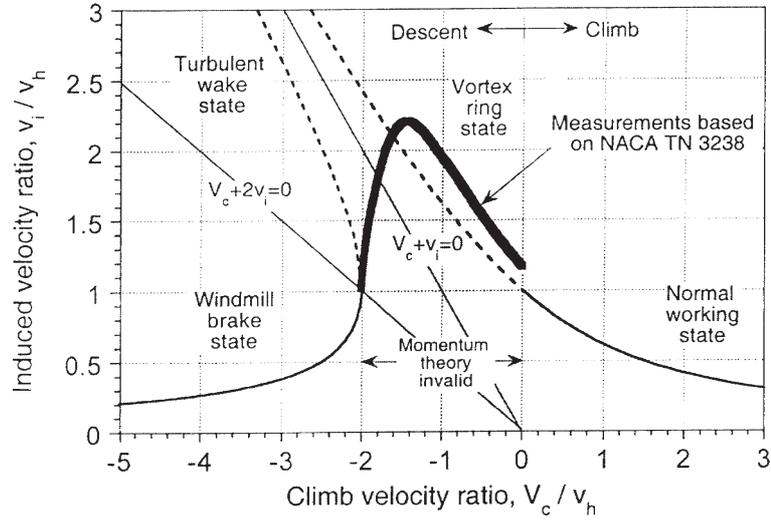


Figura 5.8: Velocità indotta in funzione delle velocità di salita o discesa (Leishman, 2000).

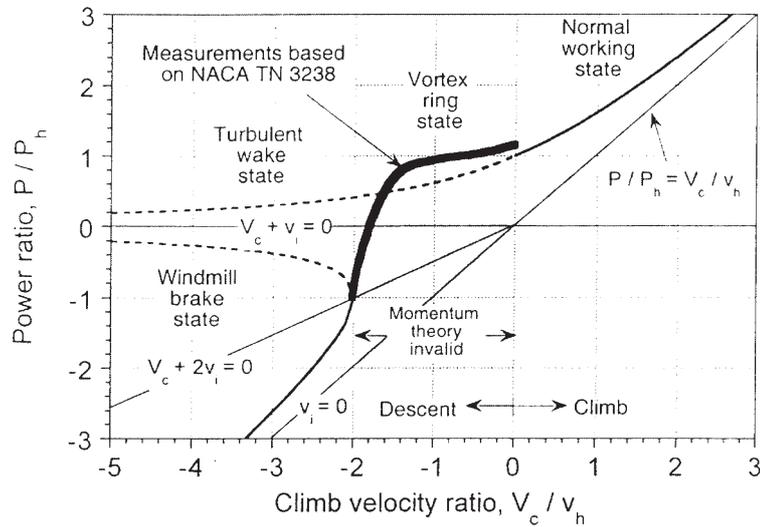


Figura 5.9: Potenza richiesta in funzione della velocità di salita o discesa (Leishman, 2000).

## Capitolo 6

# Il rotore rigido in volo traslato

### 6.1 Teoria impulsiva per le eliche in flusso non assiale

Glauert ipotizzò la possibilità di estendere la teoria impulsiva semplice anche al caso di eliche in flusso non assiale, ma per questa teoria che, d'altra parte ha dimostrato un ottimo accordo con l'evidenza sperimentale, non esiste, a tutt'oggi, una rigorosa derivazione matematica.

Si supponga quindi che la corrente asintotica  $V_\infty$  formi un angolo d'attacco  $\alpha$  con il piano dell'elica ( $\alpha = 90^\circ$  equivalente a condizioni di flusso assiale).

Glauert fa le seguenti assunzioni:

1. in corrispondenza dell'elica si ha una velocità indotta  $w$  che è normale al piano del disco;
2. all'infinito a valle essa diventa  $2w$ ;
3. la spinta che si ottiene, diretta secondo l'asse dell'elica è pari a

$$T = 2\dot{m} w, \quad (6.1)$$

dove la portata  $\dot{m} = \rho V' A$ , è ottenuta con il vettore velocità  $\underline{V}$  dato dalla *somma vettoriale*

$$\underline{V}' = \underline{V}_\infty + \underline{w}. \quad (6.2)$$

La potenza indotta è data quindi da

$$P_i = \frac{1}{2}\dot{m} \left( V_{fin}^2 - V_{in}^2 \right), \quad (6.3)$$

con  $V_{fin}^2 = \left( V_\infty + 2w \sin \alpha \right)^2 + \left( 2w \cos \alpha \right)^2$  e  $V_{in}^2 = V_\infty^2$ , per cui

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2}\rho V' A \left[ \left( V_\infty + 2w \sin \alpha \right)^2 + \left( 2w \cos \alpha \right)^2 - V_\infty^2 \right] \\ &= 2\rho V' A w (w + V_\infty \sin \alpha) = TV'_n, \end{aligned} \quad (6.4)$$

dove  $V'_n$  è la componente della velocità  $V'$  normale al piano dell'elica.

Anche se la relazione (6.1) è *formalmente* identica alla relazione (1.11), essa è *sostanzialmente* diversa in quanto nella (6.1)  $m$  non è la portata d'aria che attraversa il disco attuatore, ma è significativamente maggiore.

In condizioni di flusso assiale o a punto fisso (hovering) le relazioni (6.1) e (6.4) restituiscono i risultati della teoria impulsiva classica.

Si applichino i risultati della teoria dell'ala ellittica ad un'ellisse di eccentricità 0 (cioè un cerchio), di allungamento  $\mathcal{AR} = 4/\pi$  e posta ad incidenza  $\alpha = 0^\circ$ ; si ha:

$$\alpha_i \approx \frac{w}{V_\infty} = \frac{C_L}{\pi \mathcal{AR}} \Rightarrow C_L = \pi \mathcal{AR} \frac{w}{V_\infty}, \quad (6.5)$$

dove  $\alpha_i$  è l'angolo di incidenza indotta e  $w$  la velocità indotta perpendicolare a  $V_\infty$ . Si nota che il modello dell'ala ellittica applicata al cerchio è equivalente a quello di disco attuatore, entrambi caratterizzati da una velocità indotta  $w$  ed una forza (portanza o spinta) ad essa parallela e opposta.

Utilizzando le (6.5) e la definizione di coefficiente di portanza di un'ala si ottiene per l'ala circolare, nelle ipotesi di validità della teoria dell'ala ellittica

$$L = C_L \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 A = 2\rho V_\infty A w. \quad (6.6)$$

Essendo, per  $V_\infty/w \gg 1$ ,  $V_\infty \approx V'$  abbiamo ottenuto che *la teoria impulsiva per le eliche in flusso non assiale è in accordo con la teoria dell'ala ellittica applicata ad un cerchio posto a incidenza nulla e velocità asintotica molto elevata.*

### 6.1.1 Funzionamento a spinta costante

Tenendo conto che  $V'^2 = (V_\infty \sin \alpha + w)^2 + (V_\infty \cos \alpha)^2$  e applicando la (6.1) si ottiene

$$\frac{T^2}{(2\rho A)^2} = w^2 \left[ (V_\infty \sin \alpha + w)^2 + (V_\infty \cos \alpha)^2 \right]. \quad (6.7)$$

In caso di elica a punto fisso o hovering a parità di spinta si ha:

$$\frac{T^2}{(2\rho A)^2} = w_h^4. \quad (6.8)$$

Uguagliando le relazioni (6.7) e (6.8) e definendo, come nel capitolo precedente  $\tilde{V}_\infty = V_\infty/w_h$  e  $\tilde{w} = w/w_h$  si ottengono le curve di funzionamento per le eliche in flusso non assiale al variare dell'angolo d'attacco:

$$\left( \tilde{V}_\infty \tilde{w} \sin \alpha + \tilde{w}^2 \right)^2 + \tilde{V}_\infty^2 \tilde{w}^2 \cos^2 \alpha = 1. \quad (6.9)$$

Queste curve sono diagrammate in 6.1.

Adimensionalizzando la potenza indotta rispetto alla potenza indotta in hovering a parità di spinta ( $\tilde{P}_i = P_i/P_{i_h}$ ), si ottiene

$$\tilde{P}_i = \tilde{V}_\infty \cdot \sin \alpha + \tilde{w}, \quad (6.10)$$

vedi figura 6.2.

Si noti che le relazioni (6.9) e (6.10) per  $\alpha = 90^\circ$  coincidono con le curve di funzionamento del rotore in salita assiale.

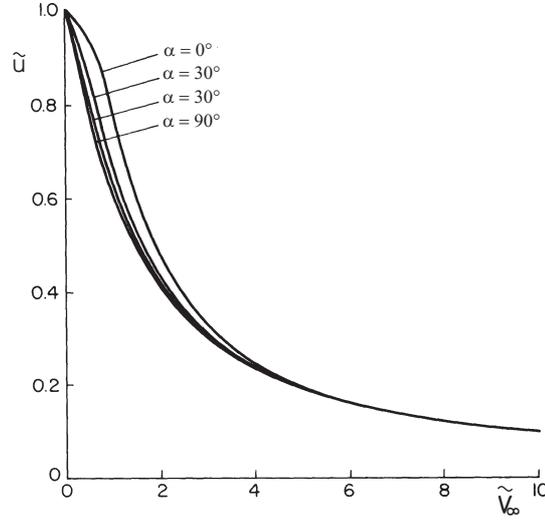


Figura 6.1: Curve di funzionamento  $\tilde{w}(\tilde{V}_\infty)$  a spinta costante per eliche il flusso non assiale.

### 6.1.2 Funzionamento a potenza costante

Se si confronta una condizione di funzionamento generica con quella in hovering ad uguale potenza si ottiene

$$\frac{T(V_\infty \sin \alpha + w)}{T_h w_h} = 1; \quad (6.11)$$

per cui, definito  $\tilde{T} = T/T_h$ , si ha

$$\tilde{T} = (V_\infty \sin \alpha + \tilde{w})^{-1}, \quad (6.12)$$

Sostituendo nella (6.7) la (6.12) e tenendo conto che  $w_h^2 = T_h/(2\rho A)$  si ottengono le curve di funzionamento a potenza costante

$$\left[ (\tilde{V}_\infty \tilde{w} \sin \alpha + \tilde{w}^2)^2 + \tilde{V}_\infty^2 \tilde{w}^2 \cos^2 \alpha \right] (\tilde{V}_\infty \sin \alpha \tilde{w}) = 1. \quad (6.13)$$

Le relazioni (6.13) e (6.12) diagrammate rispettivamente nelle figure 6.3 e 6.4 consentono di analizzare la spinta di una data elica (o rotore) nota la potenza disponibile.

## 6.2 Il rotore in volo traslato

I parametri che caratterizzano il funzionamento in volo traslato sono

$$\mu = \frac{V_\infty \cos \alpha}{\Omega R}, \quad \lambda = \frac{V_\infty \sin \alpha + w}{\Omega R} = \mu \tan \alpha + \lambda_i. \quad (6.14)$$

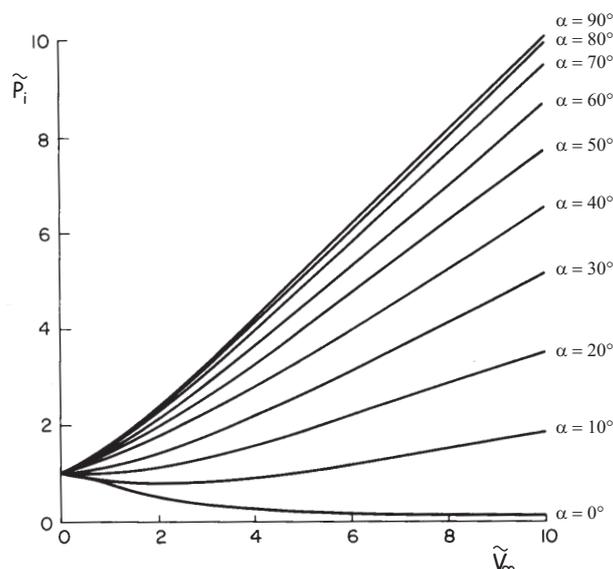


Figura 6.2: Curve  $\tilde{P}_i(\tilde{V}_\infty)$  a spinta costante per eliche in flusso non assiale.

$\mu$  e  $\lambda$  vengono rispettivamente chiamati rapporto di avanzamento e rapporto di ingresso. Il rapporto di ingresso indotto  $\lambda_i$  è dato da, utilizzando la relazione (6.7):

$$\lambda_i = \frac{T_c}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}, \quad (6.15)$$

per cui la curva di funzionamento a spinta costante è data anche da

$$\lambda = \mu \tan \alpha + \frac{T_c}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}. \quad (6.16)$$

Per  $\mu \gg \lambda$ :  $\lambda_i \approx T_c/(2\mu)$ . Questa assunzione corrisponde ad aver simulato il disco attuatore come un'ala ellittica. Si può verificare che questa approssimazione è buona per  $\mu/\lambda_h \geq 1.5$  che corrisponde, in genere, a  $\mu \geq 0.1$ . Il funzionamento del rotore in volo traslato si divide quindi in due regimi:

1.  $\mu < 0.1$ , regime di transizione in cui la scia non è più assiale, ma la sua estensione verticale è ancora significativa;
2.  $\mu > 0.1$ , regime ad alta velocità, caratterizzato dal funzionamento con carico ellittico in cui la scia è praticamente piana.

L'angolo che la scia forma con l'asse del rotore è determinata con buona approssimazione della teoria impulsiva ed è dato da  $\chi = \arctan(\mu/\lambda)$ . Il regime di transizione è in genere caratterizzato da  $\chi = 0^\circ \div 60^\circ$ .

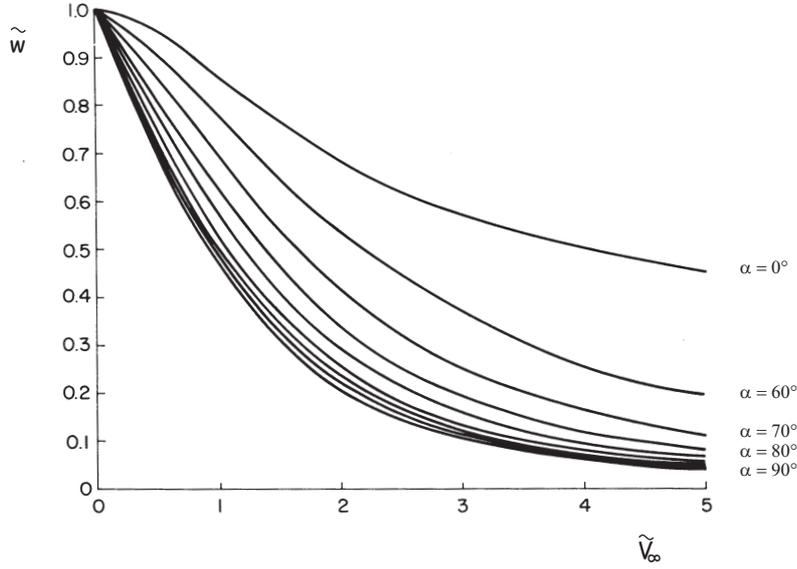


Figura 6.3: Curve di funzionamento  $\tilde{w}(\tilde{V}_\infty)$  a potenza costante per eliche in flusso non assiale.

### 6.3 Potenza parassita in volo traslato

In volo traslato la velocità che investe l'elemento di pala dipende dalla posizione della pala stessa. Si indica con  $\psi$ , angolo di *azimut*, l'angolo che l'asse della pala forma con la velocità di traslazione proiettata sul piano di rotazione ( $V_\infty \cos \alpha$  o vedi figura 6.5). A una data stazione lungo il raggio  $r$ , la velocità che investe l'elemento di pala nel piano di rotazione è data da una componente perpendicolare al raggio ed da una parallela, date rispettivamente da

$$U_T = \Omega r + V_\infty \cos \alpha \sin \psi, \quad U_R = V_\infty \cos \alpha \cos \psi. \quad (6.17)$$

La resistenza aerodinamica che agisce sull'elemento di pala,  $dD = C_d \frac{1}{2} \rho_\infty U_T^2 c dr$ , comporta una potenza istantanea assorbita dalla pala per effetto delle forze parassite di natura viscosa  $dP_0 = dD U_T$  che, integrata lungo la pala, dà la potenza istantanea assorbita dalle forze viscosse. Conviene fare riferimento al valore medio che si ottiene durante una rotazione; tenendo conto del numero di pale  $N$  si ottiene:

$$P_0 = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R C_d \frac{1}{2} \rho_\infty \left( \Omega r + V_\infty \cos \alpha \sin \psi \right)^3 c dr d\psi. \quad (6.18)$$

Integrando ed adimensionalizzando la potenza si ottiene (si è introdotto un coefficiente di resistenza medio  $\bar{C}_d$ )

$$P_{c_0} = \frac{\sigma \bar{C}_d}{8} (1 + 3\mu^2). \quad (6.19)$$

Si nota che  $\sigma \bar{C}_d / 8$  è il coefficiente di potenza parassita in hovering, per cui questa relazione mette in evidenza che in volo traslato la potenza parassita è

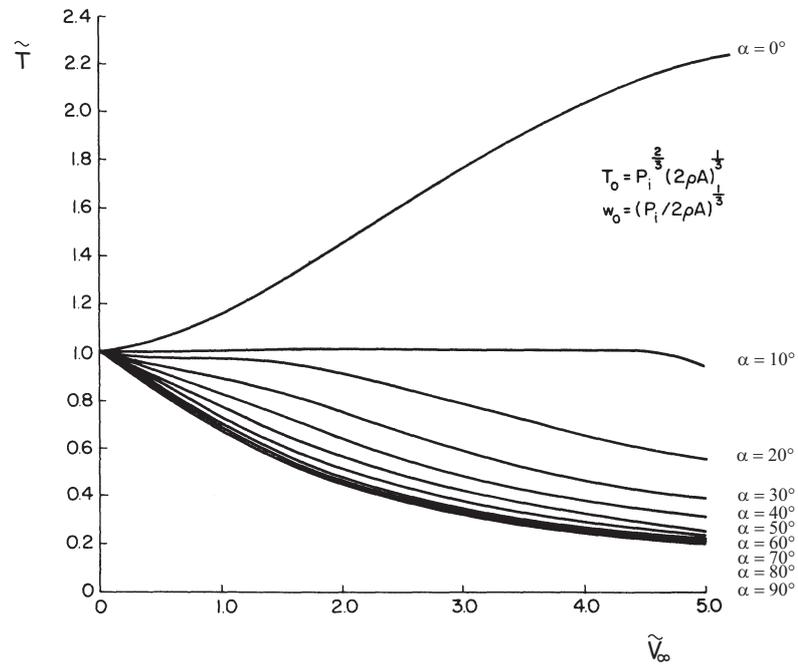


Figura 6.4: Curve di funzionamento  $\tilde{T}(\tilde{V}_\infty)$  a potenza costante per eliche in flusso non assiale.

data dalla potenza parassita in hovering più un'altra aliquota proporzionale a  $\mu^2$ .

Nell'espressione (6.19) si è trascurato il contributo dovuto allo scorrimento del flusso lungo la pala ( $V_\infty \cos \alpha \cos \psi$ ). Per tenere conto di questo effetto e delle altre approssimazioni insite nella (6.19) si è soliti sostituire il fattore 3 della (6.19) con un coefficiente  $K \approx 4 \div 5$ , un tipico valore suggerito è  $K = 4.7$ , Stepniewski & Keys (1984).

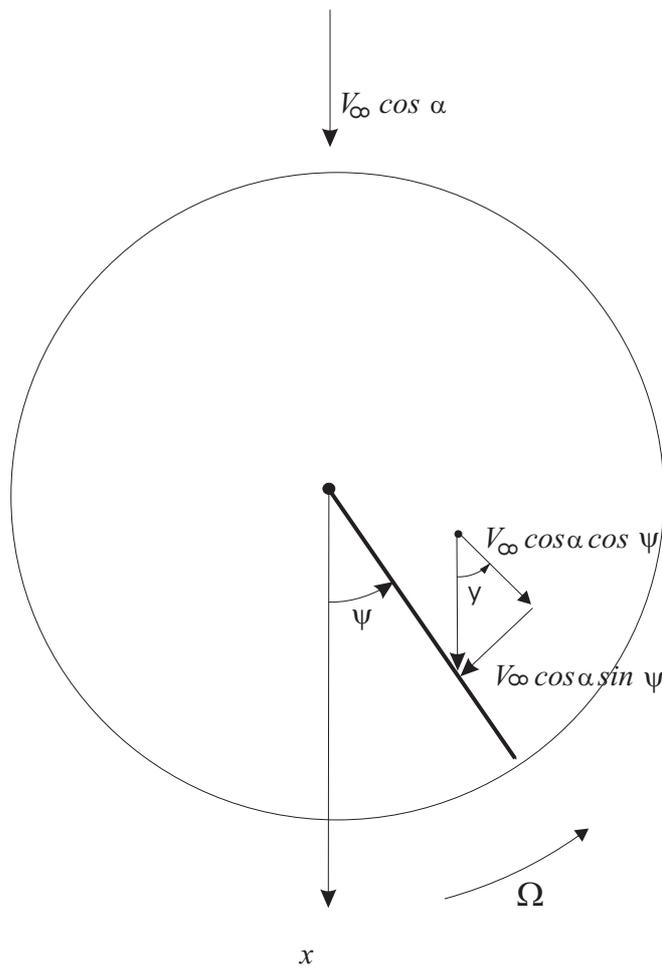


Figura 6.5: Velocità che investe un elemento di pala in volo traslato.

## 6.4 Stima della potenza necessaria al volo traslato livellato

La potenza necessaria al volo traslato livellato di un elicottero è data da

$$P = P_i + P_0 + P_{fus}, \quad (6.20)$$

dove

1.  $P_i$  è la potenza indotta assorbita dal rotore;
2.  $P_0$  è la potenza parassita assorbita dal rotore;
3.  $P_{fus}$  è la potenza parassita assorbita dalla fusoliera, dal mozzo, dal carrello, etc.

Note le caratteristiche fondamentali di un elicottero è possibile ottenere una rapida stima della potenza al variare di  $V_\infty$ .

Si assume  $\alpha = 0^0$ , ipotesi sufficientemente valida in prima approssimazione.

### 6.4.1 Potenza indotta.

Dall'espressione della potenza indotta per eliche in flusso non assiale (6.4) si ricava:

$$P_i = T(V_\infty \sin \alpha + w) = Tw. \quad (6.21)$$

D'altra parte in volo livellato uniforme  $T \approx W$  ( $W$  è il peso dell'elicottero), per cui è necessario solo determinare  $w$ .

Per  $V_\infty = 0$  (hovering)  $w$  e  $P_i$  sono già state calcolate; infatti dalla (5.1) si ottiene

$$w_h = \sqrt{\frac{W}{2\rho A}}; \quad P_{i_h} = \sqrt{\frac{W^3}{2\rho A}}. \quad (6.22)$$

Per  $V_\infty/w \gg 1$  si può considerare  $V' \approx V_\infty$ , quindi, per le (6.1) e (6.21):

$$P_i \approx \frac{W^2}{2\rho AV_\infty}; \quad (6.23)$$

da cui si evince che, per velocità  $V_\infty$  elevate la potenza indotta diminuisce iperbolicamente con  $V_\infty$ . Si nota che questa espressione è valida quando  $\lambda \approx \lambda_i \approx T_c/(2\mu)$ , cioè siamo nel regime già definito di alta velocità.

Per bassi valori di  $V_\infty$  la (6.23) non è più valida (prevede addirittura  $P_i = \infty$  per  $V_\infty = 0$ ) ed il calcolo della potenza indotta richiede l'utilizzo della più completa relazione (6.4).

### 6.4.2 Potenza parassita del rotore.

Per il calcolo della potenza parassita assorbita dal rotore possiamo utilizzare la relazione (6.4) determinata nel paragrafo precedente:

$$P_0 = \frac{\sigma \bar{C}_d}{8} \rho_\infty A \Omega R \left( \Omega^2 R^2 + K V_\infty^2 \right), \quad (6.24)$$

con  $K = 4.7$ .

Si nota che la potenza parassita del rotore cresce con il quadrato della velocità e parte da un valore finito a  $V_\infty = 0$ .

## 6.5 Potenza parassita della fusoliera.

La potenza assorbita dalla cellula è data dal lavoro compiuto, nell'unità di tempo, dalla resistenza dell'elicottero (eccetto il rotore):

$$P_{fus} = f \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^3, \quad (6.25)$$

dove il fattore  $f$ , che ha le dimensioni di un superficie, viene denominato area bagnata equivalente.

$f$  dipende dallo sforzo fatto, in fase progettuale, nel *sagomare aerodinamicamente* la fusoliera ed il mozzo dell'elicottero; un valore tipico è  $f/A \approx 0.007$ .

<i>Componente</i>	$f/A$	%
<i>fusoliera</i>	0.00210	30
<i>gondole motore</i>	0.00042	6
<i>mozzo</i>	0.00245	35
<i>mozzo rotore di coda</i>	0.00028	4
<i>carrello principale</i>	0.00042	6
<i>carrello di coda</i>	0.00028	4
<i>piano di coda orizzontale</i>	0.00007	1
<i>piano di coda verticale</i>	0.00007	1
<i>interferenza rotore/fusoliera</i>	0.00047	7
<i>sistema di scarico</i>	0.00021	3
<i>altro</i>	0.00021	3
<i>totale</i>	0.00700	100

Tabella 6.1: Tipico *breakdown* della resistenza della fusoliera di un elicottero.

Un calcolo approssimato di  $f$  è ottenibile sommando la resistenza dei singoli componenti dell'elicottero:

$$f = \sum_n C_{D_n} S_n, \quad (6.26)$$

dove  $C_{D_n}$  è il coefficiente di resistenza del componente  $n$ -esimo e  $S_n$  l'area di riferimento utilizzata nella sua definizione.

Un tipico *breakdown* della potenza assorbita dalla fusoliera è proposto in tabella (6.1). Si noti che questo contributo di potenza cresce con il cubo di  $V_\infty$  ed è nullo a  $V_\infty = 0$ .

La somma di questi tre contributi fornisce la potenza necessaria al volo traslato al variare di  $V_\infty$ .

In un ampio intervallo delle velocità  $V_\infty$ , la potenza necessaria al volo traslato è inferiore a quella in hovering; questo è dovuto al fatto che, in volo traslato, vengono trattate portate d'aria molto più elevate, per cui, per ottenere la spinta necessaria sono necessarie minori accelerazioni del flusso d'aria.

La potenza disponibile è, in genere, costante con  $V_\infty$ , ma diminuisce all'aumentare della quota, per cui, quando le due curve (potenza necessaria e disponibile) diventano tangenti a  $V_\infty = 0$  si ottiene la quota di tangenza in hovering, oltre la quale l'elicottero non è in grado di mantenersi in hovering. La quota di tangenza in volo traslato si ottiene invece quando la curva della potenza disponibile diventa tangente alla curva della potenza necessaria nel suo punto di minimo.

## 6.6 La zona di flusso inverso.

Un altro fenomeno, collegato al volo traslato è la formazione di una zona lungo la pala in cui la velocità effettiva è negativa.

Questo luogo di punti è identificato dall'equazione  $U_T = 0$ :

$$\bar{r} + \mu \sin \psi = 0. \quad (6.27)$$

È facile verificare che questa equazione descrive, in coordinate adimensionali una circonferenza con centro nel punto ( $\bar{r} = \frac{\mu}{2}, \psi = 270^\circ$ ) e raggio  $\mu/2$ .

Per bassi valori del rapporto di avanzamento, questa zona è confinata nei pressi del mozzo e quindi ha scarsi effetti sulle prestazioni del rotore che, invece, vengono influenzate sempre di più all'aumentare di  $\mu$ .

## 6.7 Effetto suolo in volo traslato.

In volo traslato l'effetto suolo diminuisce rapidamente all'aumentare di  $V_\infty \cos \alpha$ . L'esperienza mostra che esso diventa trascurabile per  $V_\infty \cos \alpha \approx 2w_h$  oppure, approssimativamente, per  $\mu \approx 0.10$ .

Questo è facilmente spiegabile tenendo conto che la scia interagisce sempre di meno (e più lontano dall'elicottero) all'aumentare di  $V_\infty \cos \alpha$ .

Un'espressione approssimata del rapporto delle spinte con e senza effetto suolo, Johnson (1980), p.147 è data da

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 / \left[ 1 - k_1 \frac{\left(\frac{R}{4z}\right)^2}{1 + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2} \right]. \quad (6.28)$$

Il coefficiente  $k_1$  può essere scelto un prima approssimazione pari a 1, oppure, per tenere conto del carico della pala  $k_1 = \sigma C_{l_\alpha} \lambda / (4T_c)$ .

La (6.28) è sufficientemente accurata per  $z/R \geq 0.5$

## 6.8 Esercizi

1. *Assegnati, la spinta  $T$  la quota ( $\rho$ ), il raggio dell'elica e l'angolo d'attacco, data  $V_\infty$  determinare  $w$  e  $P_i$  utilizzando le curve di funzionamento per le eliche in flusso non assiale.*
2. *Assegnati la potenza  $P_i$ , la quota ( $\rho$ ), il raggio dell'elica e l'angolo d'attacco, data  $V_\infty$  determinare  $w$  e  $T$  utilizzando le curve di funzionamento per le eliche in flusso non assiale.*
3. *Assegnati i parametri e le grandezze fondamentali di un elicottero stimare la potenza necessaria al volo per  $\mu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ .*

# Capitolo 7

## Il rotore articolato

### 7.1 Necessità del rotore articolato

Nel capitolo precedente è stato messo in luce che, in volo traslato, la pala che avanza ( $0^\circ < \psi < 180^\circ$ ) vede una corrente a velocità maggiore della pala che arretra; questo fatto comporta chiaramente che la pressione dinamica e, quindi, le forze aerodinamiche variano ciclicamente durante la rotazione della pala, con un massimo ed un minimo, rispettivamente nelle fasi di avanzamento e arretramento. La portanza, in particolare, genera un momento, rispetto al mozzo, che varia ciclicamente. Questo fenomeno è dannoso per due motivi fondamentali:

1. la coppia variabile generata dalla portanza, trasmessa attraverso il mozzo alla fusoliera genera una rotazione intorno all'asse di rollio che pregiudica le caratteristiche di qualità di volo dell'elicottero;
2. i rotori degli elicotteri sono caratterizzati da elevato raggio e bassa solidità che comportano elevati momenti flettenti alla radice; un momento flettente che varia ciclicamente. complica ulteriormente la progettazione strutturale del mozzo.

La soluzione classica adottata per risolvere questi problemi consiste nell'inserire nel mozzo una cerniera (e quindi un'articolazione) che lascia la pala libera di ruotare sotto l'azione della portanza (nel piano che contiene l'asse del rotore e la pala stessa). In questo modo il momento dovuto alla portanza non viene più trasmesso al resto della struttura eliminando così il rollio della macchina e la sollecitazione strutturale ciclica del mozzo.

Questo moto della pala viene detto di *flappeggio* e la cerniera intorno alla quale avviene la rotazione viene detta *cerniera di flappeggio*; la posizione della pala rispetto al piano del rotore è individuata dall'angolo di flappeggio  $\beta$ .

Il piano di flappeggio, (che contiene la pala durante il flappeggio stesso) ruota con velocità angolare  $\Omega$  intorno all'asse del rotore per cui il moto di flappeggio avviene in un riferimento non inerziale.

Se indichiamo con  $\underline{V}_r$  la velocità, rispetto a questo riferimento, di un elemento di pala di massa  $dm$  posto a distanza  $r$  dal mozzo ( $\underline{V}_r$  è dovuta solo al moto di flappeggio) nasce una forza di Coriolis data da  $d\underline{F}_{Cor} = 2\underline{\Omega} \times \underline{V}_r dm$ , dove il vettore  $\underline{\Omega}$  ha intensità pari a  $\Omega$  ed è diretto come l'asse di rotazione del rotore.  $d\underline{F}_{Cor}$  è perpendicolare al piano di flappeggio e si oppone al moto di rotazione

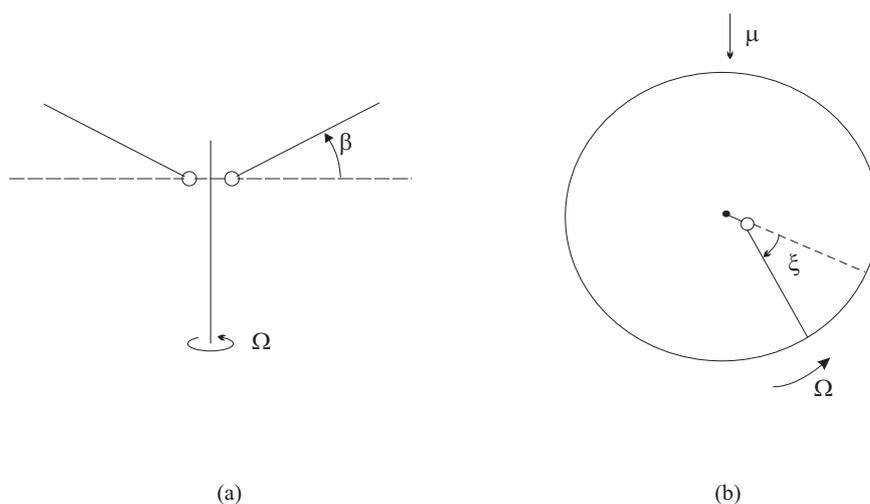


Figura 7.1: Definizione degli angoli di flappeggio  $\beta(a)$  e arretramento  $\zeta(b)$  della pala.

principale della pala (quello cioè con velocità  $\Omega$ ) quando la pala sale (in avanzamento). Nasce così un nuovo momento ciclico, che, anche se di entità inferiore, può portare allo stesso tipo di inconvenienti che hanno richiesto l'introduzione della cerniera di flappeggio. Per le stesse ragioni quindi, viene introdotta una *cerniera di arretramento* che lascia la pala libera di *arretrare* sotto l'azione delle forze di Coriolis; il moto (nel piano di rotazione principale del rotore) viene detto moto di *arretramento* e l'angolo che individua la posizione della pala in questo moto è detto angolo di *arretramento*. (vedi figura 7.1)

La presenza del moto di flappeggio e arretramento non può non avere influenza sulle prestazioni del rotore che, infatti, dipendono fondamentalmente dalla velocità relativa tra pala e flusso d'aria.

La presenza delle cerniere di flappeggio e arretramento rende notevolmente complessa e difficile la progettazione e realizzazione del mozzo del rotore, ulteriormente complicato, come vedremo, dalla presenza dei meccanismi di variazione del passo ciclico e collettivo che consentono il controllo dell'elicottero. Il mozzo del rotore diventa quindi una delle parti fondamentali e più complesse dell'elicottero, vedi figura 7.2. Il rotore articolato con cerniere di flappeggio e arretramento e con dispositivo a *cuscinetti* per il controllo del passo ciclico e collettivo costituisce la soluzione classica adottata nel mozzo degli elicotteri. Esistono però diverse soluzioni alternative; basti pensare alla soluzione limite mozzo *senza cerniere* in cui il moto di flappeggio e arretramento viene ottenuto mediante la costruzione di una pala *flessibile*.

## 7.2 Passo ciclico e collettivo

La forza aerodinamica varia notevolmente se cambia l'angolo d'attacco a cui lavora l'elemento di pala per cui un sistema conveniente per il controllo dell'elicottero consiste nel consentire al pilota di variare l'angolo di calettamento

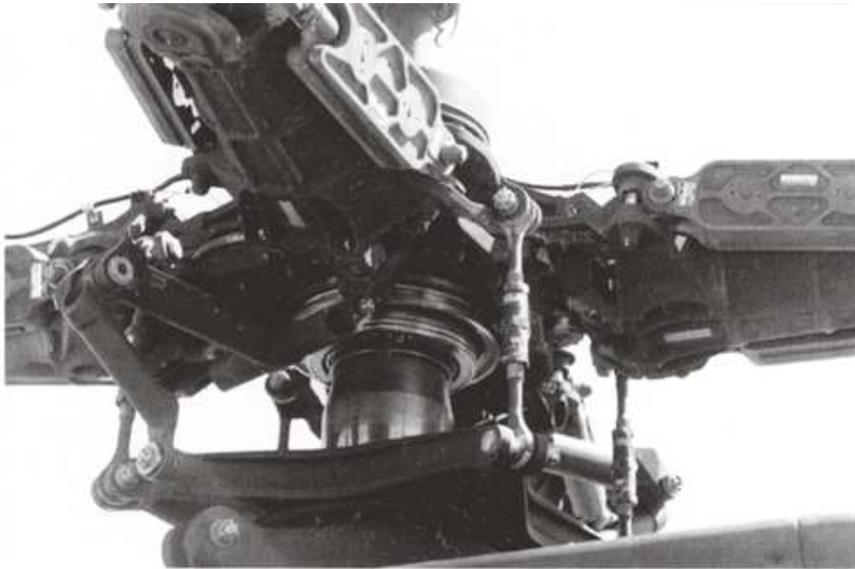


Figura 7.2: Il mozzo dell'elicottero AH-64 (Leishman (2000)).

(il passo) della pala. Questo sistema risulta ulteriormente vantaggioso perchè i momenti che si debbono contrastare per la variazione del passo (i momenti aerodinamici) sono piccoli, addirittura nulli se si utilizza un profilo simmetrico incernierato a  $1/4$  della corda.

Per controllare il volo di un elicottero non è necessario solo far variare il modulo della spinta ma anche la sua direzione in quanto la componente orizzontale della spinta può essere usata a scopi propulsivi (contrastare la resistenza aerodinamica di tutto l'elicottero). È evidente però che ruotare il mozzo per far ruotare la spinta non è il sistema più semplice e conveniente.

Indichiamo con il termine *piano del mozzo* il piano perpendicolare all'asse meccanico (albero) del rotore. È possibile cambiare la direzione della spinta dando la possibilità di variare il passo della pala ciclicamente durante una rotazione. Infatti se il passo varia ciclicamente rispetto al piano del mozzo, esisterà un piano rispetto al quale il passo non varia (questo risultato è esattamente valido se la variazione ciclica del passo è di sola prima armonica), la direzione della spinta sarà sostanzialmente normale a questo piano, detto *piano senza passo ciclico*.

Il meccanismo di variazione ciclica del passo, comandato dal pilota, consiste in una piastra collegata all'albero in grado di inclinarsi rispetto all'albero stesso. Questa piastra però non ruota; su di essa è appoggiata, tramite cuscinetti, una ralla che ruota solidale con le pale del rotore, collegata ad esse attraverso un sistema di leve, che fanno variare l'incidenza della pala.

Se, invece di inclinarsi, la piastra viene alzata o abbassata: essa trasmette una rotazione identica a tutte le pale e permette quindi di variare non ciclicamente ma collettivamente il passo delle pale, cioè si garantisce, oltre alla variazione del passo ciclico, la possibilità di variare il La figura 7.4 illustra schematicamente il sistema di controllo dell'elicottero (si noti la particolare cerniera

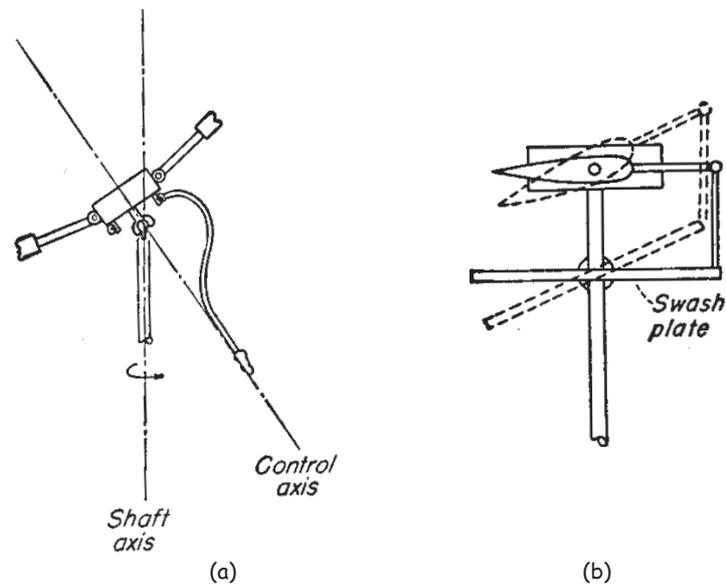


Figura 7.3: Schema di funzionamento del sistema di controllo del passo ciclico. (a): mozzo rotante; (b): sistema con ralla (Gessow & Myers (1952)).

di flappeggio rappresentata *ad altalena*, teeter-hub, classica soluzione utilizzata negli elicotteri Bell a 2 pale). Il piano individuato dalla piastra piano senza passo ciclico viene definito *piano di controllo*. In generale piano di controllo e piano senza passo ciclico sono diversi a causa del possibile moto accoppiato flappeggio-variazione del passo.

Se si considera un moto di flappeggio di prima armonica l'estremità della pala descrive esattamente un cerchio che definisce quindi un piano detto *piano di non flappeggio* in quanto un osservatore solidale a questo piano vede la pala non flappeggiare. Il moto della pala può quindi essere descritto rispetto ad un qualsiasi di questi piani:

1. piano dell'orizzontale terrestre,
2. piano del mozzo,
3. piano di controllo,
4. piano senza passo ciclico,
5. piano di non flappeggio.

Al variare del tipo di problema può risultare conveniente riferirsi ad un piano piuttosto che ad un altro. In particolare risulta conveniente studiare il moto di flappeggio rispetto al piano di controllo. Infatti questo coincide con il piano senza passo ciclico in assenza di moto accoppiato flappeggio-variazione del passo. Inoltre il piano di controllo risulta conveniente rispetto all'orizzontale o al piano del mozzo perchè il passo è costante e quindi abbiamo una variabile in meno nell'analisi delle prestazioni.

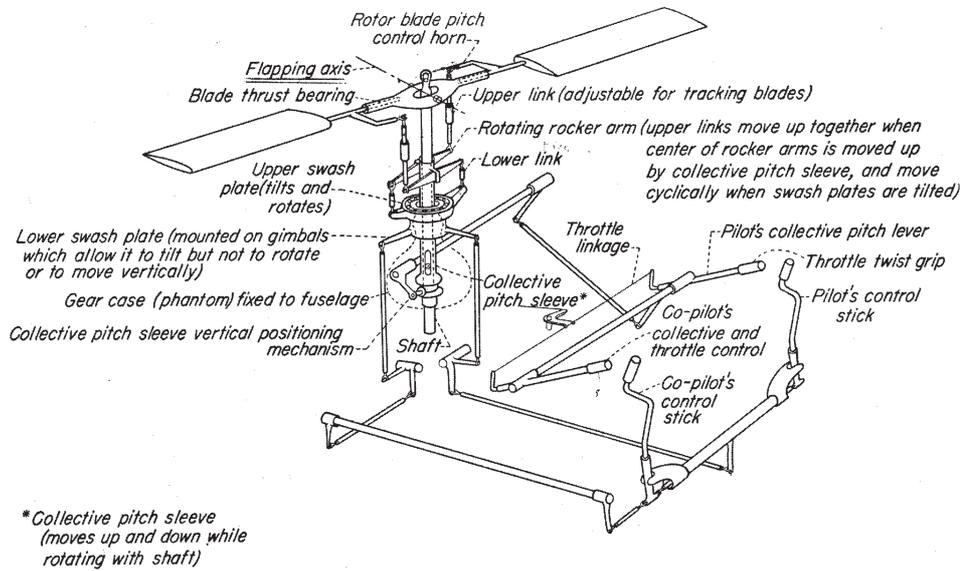


Figura 7.4: Schema del sistema di controllo dell'elicottero (Gessow & Myers (1952)).

Una strada alternativa potrebbe essere riferire la dinamica della pala al piano di non flappeggio e considerare come variabile fondamentale il passo mentre il flappeggio risulta, ovviamente, nullo.

### 7.3 La dinamica della pala

Nello studio che si propone si faranno le seguenti ipotesi:

1. rotazione della pala a velocità costante ( $\Omega = cost$ );
2.  $V_\infty$  costante e poco inclinata rispetto al piano di controllo;
3. angolo di flappeggio massimo piccolo;
4. arretramento nullo ( $\zeta = 0$ );
5. eccentricità del flappeggio nulla, si pone cioè la cerniera di flappeggio sull'asse del rotore.

La dinamica della pala è quindi nota una volta determinata la legge  $\beta(t)$  ( $t$  è il tempo). Per l'ipotesi 1 è equivalente conoscere la legge  $\beta(\psi)$  in quanto  $\psi = \Omega t$ . Se si sviluppa in serie di Fourier  $\beta$  rispetto  $\psi$  si ottiene:

$$\beta = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \beta_{nc} \cos(n\psi) + \beta_{ns} \sin(n\psi) \right], \quad (7.1)$$

dove

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\psi) d\psi; \\ \beta_{nc} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\psi) \cos(n\psi) d\psi; \\ \beta_{ns} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\psi) \sin(n\psi) d\psi.\end{aligned}\tag{7.2}$$

$\beta_0$ ,  $\beta_{nc}$  e  $\beta_{ns}$  vengono chiamati *coefficienti di flappeggio*.  $\beta_{nc}$  e  $\beta_{ns} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ ; per studiare le prestazioni del rotore è sufficiente considerare solo la prima armonica (non è così nell'acustica o nell'analisi vibrazionale del rotore) per cui assumerebbero

$$\beta(\psi) \approx \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi.\tag{7.3}$$

La dinamica della pala intorno alla cerniera di flappeggio dipende dalle forze aerodinamiche e dalle forze inerziali che agiscono su di essa; l'equazione del moto della pala si ottiene imponendo l'equilibrio dei momenti intorno alla cerniera di flappeggio  $\sum M_i = 0$ .

Si consideri una pala nel suo moto di rotazione intorno all'asse di controllo (normale al piano di controllo) e di flappeggio.

Su un elemento di pala di massa  $dm$  posto a distanza  $r$  dalla cerniera di flappeggio agiscono le seguenti forze.

1. La forza aerodinamica (sostanzialmente portanza) dovuta ad un angolo d'attacco dell'elemento di pala  $\alpha_e = \theta - \varphi$ , dove  $\theta$  è il passo alla stazione  $r$  e  $\varphi$  l'angolo di inflow del flusso; nel sistema dinamico in analisi questa forza costituisce la forzante esterna. Il momento totale rispetto alla cerniera ( $M_L > 0$  per convenzione) si ottiene integrando il momento elementare lungo la pala.
2. La forza aerodinamica dovuta all'angolo d'attacco causato dal moto relativo dell'elemento di pala  $V_r = \dot{\beta}r$  ( $\dot{\beta} = d\beta/dt$ ). L'angolo d'attacco che genera la forza è proporzionale a  $\dot{\beta}$  e, per  $\dot{\beta} > 0$  (la pala sale), è negativo, per cui la forza aerodinamica che si genera è uno smorzamento in quanto  $M_{\dot{\beta}} = -k\dot{\beta}$  con  $k > 0$ .
3. La forza d'inerzia  $-dm\ddot{\beta}r$  che genera un momento totale pari a  $M_{\ddot{\beta}} = -\int \ddot{\beta}r^2 dm = -I\ddot{\beta}$  dove  $I$  è il momento d'inerzia della pala nel piano di flappeggio rispetto alla cerniera di flappeggio.
4. La forza centrifuga  $dF_c = \Omega^2 r \cos \beta dm$  che genera un momento totale  $M_{\beta} = -\int \Omega^2 r^2 \cos \beta \sin \beta dm \approx -I\Omega^2 \beta$ , che costituisce una forza di natura elastica.
5. La forza peso  $g dm$  che genera un momento totale  $M_W = -\int gr \cos \beta dm \approx -\int gr dm$  ed è quindi indipendente da  $\psi$  per  $\beta$  piccoli; è un termine costante che può essere aggiunto alla forzante esterna.
6. La forza di Coriolis  $d\underline{F}_{Cor} = 2\underline{\Omega} \times \underline{V}_r dm$  che genera un momento totale nullo nel piano di flappeggio.

L'equilibrio dei momenti porta quindi all'equazione della dinamica della pala

$$I\ddot{\beta} + k\dot{\beta} + I\Omega^2\beta = M_L - M_W. \quad (7.4)$$

Questa equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti è ben nota e studiata.

In particolare si genera un moto di prima armonica se la forzante è di prima armonica. La frequenza fondamentale della forzante esterna è chiaramente  $\Omega$ , mentre la frequenza naturale del sistema è data da  $\omega_n = \sqrt{I\Omega^2/I} = \Omega$  per cui, il sistema lavora in *risonanza* per la forzante di prima armonica.

Esistono due proprietà fondamentali dei sistemi in risonanza:

1. le forze d'inerzia sono equilibrate da quelle elastiche  $I\ddot{\beta} = -k_e\beta$  ( $k_e$  è la costante elastica, nel nostro caso  $k_e = I\Omega^2$ );
2. la forzante esterna è in anticipo di fase di  $90^\circ$  rispetto allo spostamento generalizzato  $\beta$ .

## 7.4 Interpretazione fisica dei coefficienti di flappeggio

La linearità dell'equazione (7.4) consente l'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti per cui ad ogni armonica, individuata da un coefficiente di flappeggio, è associabile la forzante esterna causa di quel moto.

$$\beta = \beta_0$$

Questa soluzione si ottiene se la forzante esterna è costante con  $\psi$ , cioè in hovering,  $\beta_0$  è quindi l'angolo che la pala forma con il piano di controllo in hovering; la pala è in equilibrio sotto l'azione della forzante aerodinamica, forza centrifuga e forza peso (ed ovviamente della reazione vincolare della cerniera).  $\beta_0$  viene detto conicità della pala.  $\beta_0$  non può essere troppo grande perchè porterebbe ad un degrado delle prestazioni del rotore (per  $\beta \rightarrow 90^\circ$  l'area del rotore tende a 0). All'aumentare della massa della pala, la forza centrifuga aumenta e, per  $F_c \rightarrow \infty$ ,  $\beta_0 \rightarrow 0$ .

$$\beta = \beta_{1c} \cos \psi$$

$\beta_{1c}$  individua l'angolo di flappeggio per  $\psi = 0^\circ$  ( $\beta = \beta_{1c}$ ) e per  $\psi = 180^\circ$  ( $\beta = -\beta_{1c}$ ) e viene detto coefficiente di flappeggio longitudinale.

Essendo, in pratica  $\beta_{1c} < 0$ , il flappeggio longitudinale è massimo per  $\psi = 180^\circ$ . Poichè il sistema lavora in risonanza, la forzante causa di questo moto è in anticipo di fase di  $90^\circ$ , cioè è massima a  $\psi = 90^\circ$ . Questa forzante non può che essere l'incremento di portanza dovuta all'aumento della pressione dinamica in volo traslato che è appunto massima per  $\psi = 90^\circ$ .

La causa di questo moto di flappeggio è solo aerodinamica,  $\beta_{1c} \neq 0$  anche per una pala di massa infinita.

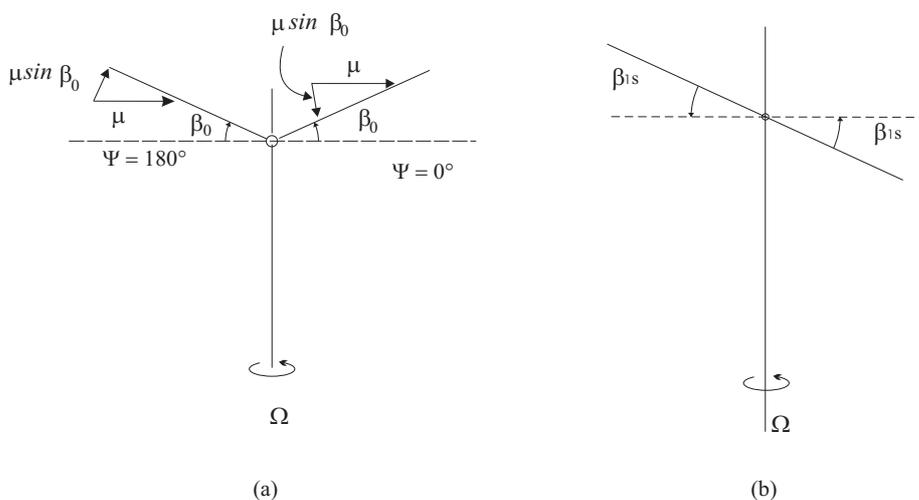


Figura 7.5: Interpretazione fisica del flappeggio laterale.

$$\beta = \beta_{1s} \sin \psi$$

In modo analogo al caso precedente si verifica che  $\beta_{1s}$  identifica l'angolo di flappeggio a  $\psi = 90^\circ$  ed ad  $\psi = 270^\circ$  e viene quindi definito coefficiente di flappeggio laterale. Anche  $\beta_{1s} < 0$ , per cui la forzante che genera il flappeggio laterale è massima a  $\psi = 180^\circ$ .

La genesi di questa forzante può essere facilmente compresa con l'ausilio della figura 7.5. In volo traslato la presenza della conicità fa sì che a  $\psi = 180^\circ$  una componente  $V_\infty \sin \beta_0$  incrementi l'angolo d'attacco effettivo a cui lavora l'elemento di pala mentre al contrario lo riduce a  $\psi = 0^\circ$ . Questa variazione di angolo d'attacco genera quindi una variazione di portanza massima e positiva a  $\psi = 180^\circ$ , minima e negativa a  $\psi = 0^\circ$  che è appunto la forzante esterna sfasata di  $90^\circ$  causa del flappeggio laterale.

Si nota che la forzante è solo di natura aerodinamica ma poiché  $\beta_0 \rightarrow 0$  per masse infinite, il flappeggio laterale dipende indirettamente dalle forze d'inerzia. Quindi, per distribuzioni di massa infinite:  $\beta = \beta_{1c} \cos \psi$ , il flappeggio non scompare e diventa puro flappeggio longitudinale.

## 7.5 La velocità effettiva sull'elemento di pala

In volo traslato la velocità effettiva sull'elemento di pala è data dalla composizione di diversi moti.

La velocità si assumerà adimensionalizzata rispetto a  $\Omega R$ ,  $u_R$  è la componente radiale e tangente al piano di controllo (positiva se uscente),  $u_T$  la componente tangenziale nel piano di controllo (positiva se diretta verso il bordo di attacco dell'elemento di pala),  $u_P$  è la componente *perpendicolare alla pala* (positiva se diretta verso il basso). Si ha che

$$u_R = \mu \cos \psi \quad , \quad u_T = \bar{r} + \mu \sin \psi \quad , \quad u_P = \lambda + \bar{r} \frac{\dot{\beta}}{\Omega} + \beta \mu \cos \psi, \quad (7.5)$$

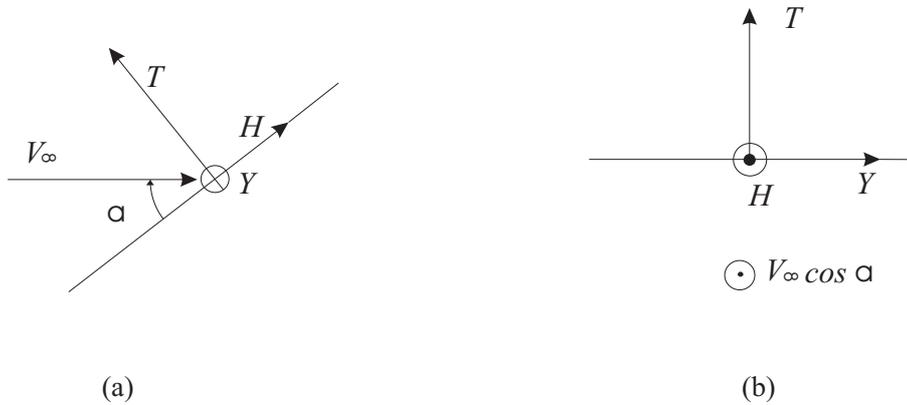


Figura 7.6: Schema delle forze aerodinamiche sul rotore.

in cui si è assunto  $\beta \ll 1$ .

L'angolo d'attacco effettivo a cui lavora l'elemento di pala è dato da

$$\alpha_e = \theta - \varphi, \quad (7.6)$$

dove  $\varphi = \arctan(u_P/u_T)$ .

In questa trattazione si assumerà che l'induzione sul rotore è uniforme ( $\lambda_i = \cos t$ ,  $\lambda = \cos t$ ) ed ottenibile dalla teoria impulsiva per eliche in flusso non assiale formole, (6.1) e (6.2). Questa ipotesi costituisce una notevole approssimazione in quanto in volo traslato i vortici liberi vengono convetti a valle ed in particolare nella fase di transizione ( $\mu < 0.1$ ), il campo indotto sul disco del rotore diventa fortemente variabile. Comunque si assumerà nel seguito

$$\lambda_i = \frac{T_c}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}, \quad \lambda = \mu \tan \alpha + \frac{T_c}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}. \quad (7.7)$$

## 7.6 Le forze aerodinamiche sul rotore

La spinta  $T$  è la componente della forza aerodinamica totale perpendicolare al piano di controllo (positiva verso l'alto), la resistenza  $H$  del rotore è la componente che giace sul piano di controllo ed è allienata con la proiezione su di esso di  $V_\infty$ ,  $Y$  è la forza laterale che giace sul piano di controllo ed ha verso tale che la terna  $H, Y, T$  sia levogira (vedi figura 7.6). Per ottenere queste forze totali occorre considerare le forze (per unità di lunghezza) che agiscono sull'elemento di pala  $F_x, F_r, F_z$ , dove  $F_x$  è la componente della forza aerodinamica che giace nel piano di controllo ed è perpendicolare alla pala,  $F_z$  è perpendicolare a  $F_x$  e giacente nel piano dell'elemento di pala,  $F_r$  la componente radiale sul piano di controllo (vedi figura 7.7).

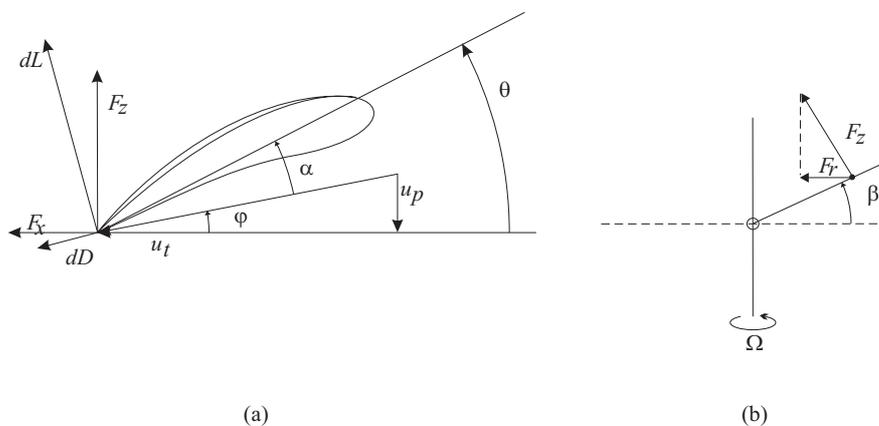


Figura 7.7: Forze aerodinamiche agenti su un elemento di pala, per un rotore in volo traslato.

$$\begin{aligned}
 F_x &= \frac{dL}{dr} \sin \varphi + \frac{dD}{dr} \cos \varphi, \\
 F_z &= \frac{dL}{dr} \cos \varphi - \frac{dD}{dr} \sin \varphi, \\
 F_r &= -F_z \sin \beta.
 \end{aligned}
 \tag{7.8}$$

$dL/dr$  e  $dD/dr$  sono date da

$$\frac{dL}{dr} = C_l \frac{1}{2} \rho_\infty V_e^2 c, \quad \frac{dD}{dr} = C_d \frac{1}{2} \rho_\infty V_e^2 c;
 \tag{7.9}$$

dove  $V_e^2 = \Omega^2 R^2 (u_t^2 + u_p^2)$ .

La spinta, la resistenza, la forza laterale e la coppia istantanea che agiscono su una pala sono quindi date da

$$\begin{aligned}
 T' &= \left( \int_0^R F_z dr \right) \cos \beta, \\
 H' &= \int_0^R (F_x \sin \psi + F_r \cos \psi) dr, \\
 Y' &= \int_0^R (-F_x \cos \psi + F_r \sin \psi) dr, \\
 Q' &= \left( \int_0^R r F_x dr \right) \cos \beta.
 \end{aligned}
 \tag{7.10}$$

Infine le forze totali medie nel tempo si ottengono mediando le forze istantanee

in una rotazione della pala e moltiplicando per il numero di pale:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R F_z \cos \beta dr d\psi, \\
 H &= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (F_x \sin \psi + F_r \cos \psi) dr d\psi, \\
 Y &= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (-F_x \cos \psi + F_r \sin \psi) dr d\psi, \\
 Q &= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R r F_x \cos \beta dr d\psi.
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Delle formule più semplici si ottengono nell'ipotesi, che ora facciamo, di angoli piccoli ed elemento di pala che lavora nella parte lineare della curva di portanza. Infatti, in queste condizioni:  $\cos \beta \approx 1$ ,  $\sin \beta \approx \beta$ ,  $\varphi \approx u_P/u_T$ ,  $V_e \approx \Omega R u_T$ ,  $F_z \approx dL/dr$ ,  $F_x \approx dL/dr \varphi + dD/dr$ ,  $C_l = C_{l_\alpha}(\theta - u_P/u_T)$ , con il calettamento  $\theta$  misurato rispetto alla retta di portanza nulla.

In forma adimensionale, la forza che agisce sull'elemento di pala ha componenti

$$\begin{aligned}
 \frac{F_z}{C_{l_\alpha} c \rho_\infty \Omega^2 R^2} &= \frac{1}{2} u_T^2 \alpha_e &= \frac{1}{2} (u_T^2 \theta - u_P u_T), \\
 \frac{F_x}{C_{l_\alpha} c \rho_\infty \Omega^2 R^2} &= u_T^2 \left( \frac{\alpha_e}{2} \varphi + \frac{C_d}{2C_{l_\alpha}} \right) &= \frac{1}{2} (u_P u_T \theta - u_P^2) + \frac{C_d}{2C_{l_\alpha}} u_T^2, \\
 \frac{F_r}{C_{l_\alpha} c \rho_\infty \Omega^2 R^2} &= -\beta \frac{F_z}{C_{l_\alpha} c \rho_\infty \Omega^2 R^2}.
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Ipotizzando, come nella maggior parte dei rotori, che la corda e quindi la solidità sono costanti lungo la pala, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{T_c}{\sigma C_{l_\alpha}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} (u_T^2 \theta - u_P u_T) d\bar{r} d\psi, \\
 \frac{H_c}{\sigma C_{l_\alpha}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \sin \psi \left[ \frac{1}{2} (u_P u_T \theta - u_P^2) + \frac{C_d}{2C_{l_\alpha}} u_T^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. - \beta \cos \psi \left[ \frac{1}{2} (u_T^2 \theta - u_P u_T) \right] \right\} d\bar{r} d\psi, \\
 \frac{Y_c}{\sigma C_{l_\alpha}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ -\cos \psi \left[ \frac{1}{2} (u_P u_T \theta - u_P^2) + \frac{C_d}{2C_{l_\alpha}} u_T^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. - \beta \sin \psi \left[ \frac{1}{2} (u_T^2 \theta - u_P u_T) \right] \right\} d\bar{r} d\psi, \\
 \frac{Q_c}{\sigma C_{l_\alpha}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{r} \left[ \frac{1}{2} (u_P u_T \theta - u_P^2) + \frac{C_d}{2C_{l_\alpha}} u_T^2 \right] d\bar{r} d\psi..
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Risulta conveniente dividere  $H_c$ ,  $Y_c$ ,  $Q_c$  nei contributi parassiti o di profilo  $H_{cO}$ ,  $Y_{cO}$ ,  $Q_{cO}$ , associati cioè all'azione della resistenza aerodinamica dell'elemento di pala, e nei contributi indotti  $H_{ci}$ ,  $Y_{ci}$ ,  $Q_{ci}$ , associati all'azione della portanza. Essi sono dati da

$$\begin{aligned}
H_{cO} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sigma C_d}{2} \sin \psi u_T^2 d\bar{r} d\psi, \\
Y_{cO} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sigma C_d}{2} \cos \psi u_T^2 d\bar{r} d\psi, \\
Q_{cO} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sigma C_d}{2} \bar{r} u_T^2 d\bar{r} d\psi, \\
H_{ci} &= \frac{\sigma C_{l\alpha}}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( u_T \theta - u_P \right) \left( u_P \sin \psi - u_T \beta \cos \psi \right) d\bar{r} d\psi, \\
Y_{ci} &= \frac{\sigma C_{l\alpha}}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( u_T \theta - u_P \right) \left( -u_P \cos \psi - u_T \beta \sin \psi \right) d\bar{r} d\psi, \\
Q_{ci} &= \frac{\sigma C_{l\alpha}}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{r} \left( u_P u_T \theta - u_P^2 \right) d\bar{r} d\psi.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Assumendo, oltre alla forma in pianta rettangolare, che il calettamento sia lineare (soluzione classica negli elicotteri),  $\theta(\bar{r}) = \theta_0 + \bar{r}\theta_{tw}$  gli integrali possono essere risolti analiticamente.

Per quanto riguarda  $T_c$ , conviene effettuare prima l'integrazione in  $d\psi$ . Essendo  $\frac{\beta}{\Omega} = \frac{d\beta}{d\psi}$ , si ha che

$$\int_0^{2\pi} \left( \bar{r}^2 \frac{d\beta}{d\psi} + \bar{r}\mu \frac{d\beta}{d\psi} \sin \psi + \bar{r}\mu\beta \cos \psi \right) d\psi = \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\psi} \left( \bar{r}^2 \beta + \bar{r}\mu\beta \sin \psi \right) d\psi = 0. \tag{7.15}$$

Inoltre, ipotizzando un moto di flappeggio di prima armonica:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_P u_T d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \lambda + \bar{r} \frac{d\beta}{d\psi} + \mu\beta \cos \psi \right) \left( \bar{r} + \mu \sin \psi \right) d\psi = \lambda \bar{r}. \tag{7.16}$$

Quindi

$$T_c = \frac{\sigma C_{l\alpha}}{2} \int_0^1 \left[ \left( \theta_0 + \bar{r}\theta_{tw} \right) \left( \bar{r}^2 + \frac{\mu^2}{2} \right) - \lambda \bar{r} \right] d\bar{r}. \tag{7.17}$$

Risolvendo anche questo integrale si ottiene

$$\frac{2T_c}{\sigma C_{l\alpha}} = \frac{\theta_0}{3} \left( 1 + \frac{3}{2}\mu^2 \right) + \frac{\theta_{tw}}{4} \left( 1 + \mu^2 \right) - \frac{\lambda}{2}. \tag{7.18}$$

Questa relazione mostra l'importante risultato che *la spinta non dipende dai coefficienti di flappeggio* se è riferita al piano di controllo e nell'ipotesi di  $\beta \ll 1$ .

In modo analogo si procede per gli altri coefficienti, tenendo anche conto delle relazioni

$$\begin{aligned} u_P \sin \psi - u_T \beta \cos \psi &= \lambda \sin \psi + \bar{r} \frac{d\beta}{d\psi} \sin \psi - \bar{r} \beta \cos \psi, \\ u_P \cos \psi + u_T \beta \sin \psi &= \lambda \cos \psi + \bar{r} \frac{d\beta}{d\psi} \cos \psi + \bar{r} \beta \sin \psi + \mu \beta. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Si ottiene, per quanto riguarda i termini indotti ( $Q_{c_i}$  verrà discusso in seguito):

$$\begin{aligned} \frac{2H_{c_i}}{\sigma C_{l_\alpha}} &= \theta_0 \left( -\frac{1}{3} \beta_{1c} + \frac{1}{2} \mu \lambda \right) + \theta_{tw} \left( -\frac{1}{4} \beta_{1c} + \frac{1}{4} \mu \lambda \right) \\ &+ \frac{3}{4} \lambda \beta_{1c} + \frac{1}{6} \beta_0 \beta_{1s} + \frac{1}{4} \mu \left( \beta_0^2 + \beta_{1c}^2 \right), \\ -\frac{2Y_{c_i}}{\sigma C_{l_\alpha}} &= \theta_0 \left[ \frac{3}{4} \mu \beta_0 + \frac{1}{3} \beta_{1s} \left( 1 + \frac{3}{2} \mu^2 \right) \right] + \theta_{tw} \left[ \frac{1}{2} \mu \beta_0 + \frac{1}{4} \beta_{1s} \left( 1 + \mu^2 \right) \right] \\ &- \frac{3}{4} \lambda \beta_{1s} + \beta_0 \beta_{1c} \left( \frac{1}{6} - \mu^2 \right) - \frac{3}{2} \mu \lambda \beta_0 - \frac{1}{4} \beta_{1c} \beta_{1s}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

Per quanto riguarda i coefficienti parassiti, considerando il coefficiente di resistenza del profilo costante lungo la pala e pari a  $\bar{C}_d$  si ha

$$\begin{aligned} H_{c_0} &= \frac{\sigma \bar{C}_d}{4} \mu, \\ Y_{c_0} &= 0, \\ Q_{c_0} &= \frac{\sigma \bar{C}_d}{8} (1 + \mu^2). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Si nota che  $Q_{c_o} + \mu H_{c_o} = \frac{\sigma \bar{C}_d}{8} (1 + 3\mu^2) = P_{c_o}$  così come ottenuto nella (6.19).

## 7.7 La potenza in volo traslato

Anche in volo traslato la relazione tra coppia e potenza è data da

$$P = Q\Omega, \quad (7.23)$$

per cui

$$P_c = Q_c. \quad (7.24)$$

Questa relazione è valida solo per coppia e potenza totali, in quanto abbiamo già visto che  $P_{c_0} \neq Q_{c_0}$ . In questo paragrafo analizziamo più in dettaglio i vari componenti della potenza e della coppia in volo traslato.

Il coefficiente di coppia istantaneo che agisce sulla singola pala ha la componente indotta data da ( $C_z = \frac{dL}{dr} / (\rho_\infty \Omega^2 R^2 \pi R)$ ):

$$Q'_{c_i} = \int_0^1 C_z \varphi \bar{r} d\bar{r}. \quad (7.25)$$

Analogamente il coefficiente di resistenza istantaneo indotto della pala è dato

$$H'_{c_i} = \int_0^1 (\varphi \sin \psi - \beta \cos \psi) C_z d\bar{r}. \quad (7.26)$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} Q'_{c_i} + \mu H'_{c_i} &= \int_0^1 \left( \frac{u_P}{u_T} \bar{r} + \mu \frac{u_P}{u_T} \sin \psi - \beta \mu \cos \psi \right) C_z d\bar{r} \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{u_P}{u_T} (\bar{r} + \mu \sin \psi) - \mu \beta \cos \psi \right] C_z d\bar{r} \\ &= \int_0^1 (u_P - \mu \beta \cos \psi) C_z d\bar{r} \\ &= \int_0^1 \left( \lambda + \bar{r} \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \right) C_z d\bar{r}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

L'equazione della dinamica della pala può essere scritta come

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta = \bar{\gamma} \int_0^1 \bar{r} C_z d\bar{r}, \quad (7.28)$$

dove  $\bar{\gamma} = \rho_\infty \Omega^2 R^5 \pi / I^1$ . Utilizzando questa relazione si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{r} \dot{\beta} C_z d\bar{r} d\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\beta} \left( \int_0^1 \bar{r} C_z d\bar{r} \right) d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\dot{\beta}}{\bar{\gamma}} (\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Omega^3}{2\bar{\gamma}} \frac{d}{d\psi} \left[ \left( \frac{d\beta}{d\psi} \right)^2 + \beta^2 \right] d\psi = 0; \end{aligned} \quad (7.29)$$

cioè il lavoro compiuto dalla forza aerodinamica nel moto di flapping è nullo. Risulta allora

$$Q_{c_i} + \mu H_{c_i} = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \lambda C_z d\bar{r} = \lambda T_c, \quad (7.30)$$

Il coefficiente di potenza può essere quindi espresso come

$$\begin{aligned} P_c &= Q_c = Q_{c_i} + Q_{c_0} + \mu H_{c_i} + \mu H_{c_0} - \mu H_c \\ &= \lambda T_c + Q_{c_0} + \mu H_{c_0} - \mu H_c. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Le equazioni di equilibrio del moto di un elicottero in volo traslato, orizzontale uniforme e piccolo angolo d'attacco sono:

$$T \approx W, \quad T \sin \alpha = D_{fus} + H; \quad (7.32)$$

per cui

$$\alpha \approx (D_{fus} + H)/T. \quad (7.33)$$

<sup>1</sup>Si noti che  $C_z$  contiene sia la forzante esterna che lo smorzamento aerodinamico.

Essendo:

$$\lambda = \lambda_i + \mu\alpha = \lambda_i + \mu \frac{D_{fus}}{W} + \mu \frac{H_c}{T_c}, \quad (7.34)$$

si ottiene, in definitiva:

$$P_c = Q_c = \lambda_i T_c + \mu \frac{D_{fus}}{W} T_c + Q_{c_0} + \mu H_{c_0}; \quad (7.35)$$

cioè il coefficiente di potenza è dato dalla somma del coefficiente di potenza indotta  $P_{c_i} = \lambda_i T_c$ , dal coefficiente di potenza assorbito dalla resistenza della fusoliera  $P_{c_{fus}} = \mu \frac{D_{fus}}{W} T_c$  e dal coefficiente di potenza parassita del rotore  $P_{c_0} = Q_{c_0} + \mu H_{c_0}$ .

Si nota che anche *nell'espressione del coefficiente di potenza non compaiono i coefficienti di flappeggio, la potenza è ottenibile ipotizzando il rotore rigido* e si ottengono risultati identici a quelli discussi nel paragrafo 6.4. Risulta inoltre più semplice determinare il coefficiente di coppia indotta  $Q_{c_i}$  sottraendo  $Q_{c_0}$  a  $Q_c$  evitando così, inutili integrazioni.

## 7.8 Calcolo dei coefficienti di flappeggio

L'equazione della dinamica del flappeggio può essere scritta come

$$I\ddot{\beta} + I\Omega^2\beta = \int_0^R F_z r \, dr, \quad (7.36)$$

oppure in termini adimensionali, tenendo conto che

$$\int_0^R F_z r \, dr = C_{l_\alpha} \rho_\infty \Omega^2 R^4 c \int_0^1 \frac{1}{2} (\theta - \varphi) u_T^2 \bar{r} \, d\bar{r}, \quad (7.37)$$

si ottiene

$$\frac{d^2\beta}{d\psi^2} + \beta = \gamma \int_0^1 \frac{1}{2} (\theta u_T^2 - u_P u_T) \bar{r} \, d\bar{r} = \gamma M_F, \quad (7.38)$$

dove  $\gamma = C_{l_\alpha} \rho_\infty R^4 c / I$  è detto numero di Lock e misura l'importanza relativa tra le forze aerodinamiche e d'inerzia agenti sulla pala. Tipicamente, per un rotore articolato  $\gamma = 8 - 10$ , per un rotore senza cerniere  $\gamma = 5 - 7$ .

Per ottenere un moto di flappeggio di prima armonica anche le forzante deve essere di prima armonica; con questa ipotesi si ottiene<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \theta u_T^2 &\approx \theta_0 \left( \bar{r}^2 + \frac{\mu^2}{2} \right) + \theta_{tw} \left( \bar{r}^3 + \bar{r} \frac{\mu^2}{2} \right) + (2\bar{r}\mu\theta_0 + 2\bar{r}^2\mu\theta_{tw}) \sin \psi \\ u_P u_T &\approx \lambda \bar{r} + \left( \bar{r}^2 \beta_{1s} + \mu \bar{r} \beta_0 + \mu^2 \frac{\beta_{1s}}{4} \right) \cos \psi + \left( \lambda \mu - \bar{r}^2 \beta_{1c} + \mu^2 \frac{\beta_{1c}}{4} \right) \sin \psi. \end{aligned} \quad (7.39)$$

<sup>2</sup>Si ricorda che data, una funzione  $f(\psi)$  periodica di periodo  $2\pi$ , lo sviluppo in serie di Fourier è dato da  $f(\psi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_{c_n} \cos(n\psi) + f_{s_n} \sin(n\psi) \right]$  con  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi$ ,  $f_{c_n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi$ ,  $f_{s_n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin(n\psi) d\psi$ .

Queste relazioni sono state ottenute tenendo conto che

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x}{4} \left( \sin^2 x - \frac{1}{2} \right) + \frac{x}{8} \quad (7.40)$$

per cui  $\sin \psi \cos^2 \psi \approx \sin \psi / 4$  e  $\sin^2 \psi \cos \psi \approx \cos \psi / 4$  nell'approssimazione di forzante di sola prima armonica.

Effettuando l'integrazione in  $\bar{r}$  si ha

$$M_F \approx M_{F0} + M_{F1c} \cos \psi + M_{F1s} \sin \psi, \quad (7.41)$$

dove:

$$M_{F0} = \frac{\theta_0}{8}(1 + \mu^2) + \frac{\theta_{tw}}{2} \left( \frac{1}{5} + \frac{\mu^2}{6} \right) - \frac{\lambda}{6}$$

$$M_{F1c} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu\beta_0}{3} + \frac{\beta_{1s}}{4} \left( 1 + \frac{\mu^2}{2} \right) \right] \quad (7.42)$$

$$M_{F1s} = \frac{1}{3}\mu\theta_0 + \frac{1}{4}\mu\theta_{tw} + \frac{\beta_{1c}}{8} \left( 1 - \frac{\mu^2}{2} \right) - \frac{\lambda}{4}\mu.$$

Nell'ipotesi di moto di prima armonica si ottiene

$$\frac{d^2\beta}{d\psi^2} + \beta = \beta_0 \quad (7.43)$$

per cui l'equazione (7.38) è risolta se e soltanto se

$$\beta_0 = \gamma M_{F0}, \quad M_{F1c} = 0, \quad M_{F1s} = 0, \quad (7.44)$$

relazioni soddisfatte per

$$\beta_0 = \gamma \left[ \frac{\theta_0}{8}(1 + \mu^2) + \frac{\theta_{tw}}{10} \left( 1 + \frac{5}{6}\mu^2 \right) - \frac{\lambda}{6} \right],$$

$$\beta_{1c} = 2\mu \frac{\left( \frac{4}{3}\theta_0 + \theta_{tw} - \lambda \right)}{\left( 1 - \frac{\mu^2}{2} \right)}, \quad (7.45)$$

$$\beta_{1s} = -\frac{4}{3}\mu \frac{\beta_0}{\left( 1 + \frac{\mu^2}{2} \right)}.$$

Si ritrova il risultato che  $\beta_0$  e  $\beta_{1c}$  dipendono dalla distribuzione delle masse (cioè dipendono dal numero di Lock) al contrario  $\beta_{1s}$ .

## 7.9 Rateo di salita

L'Equazione dell'equilibrio di un elicottero in salita di un angolo  $\mathcal{X}$  sono:

$$T \cos \alpha + H \sin \alpha = W \cos \mathcal{X} \quad (7.46)$$

$$T \sin \alpha - H \cos \alpha - W \sin \mathcal{X} - D_{fus} = 0.$$

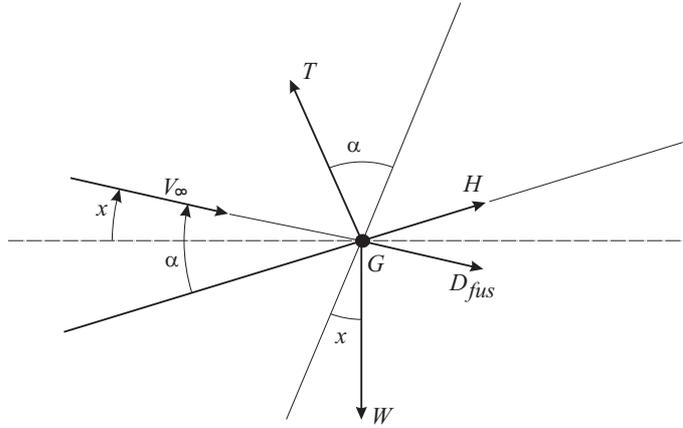


Figura 7.8: Schema delle forze agenti su un elicottero in salita di un angolo  $\mathcal{X}$

Da queste relazioni è possibile ricavare l'angolo  $\mathcal{X}$ . Nell'ipotesi di angoli piccoli  $W = T$  per cui:

$$\sin \mathcal{X} = \sin \alpha - \frac{H}{T} \cos \alpha - \frac{D_{fus}}{T}. \quad (7.47)$$

Indicando con  $\lambda_c = V_\infty \sin \mathcal{X} / (\Omega R)$ , il rateo di salita, si ottiene

$$\lambda_c = \mu \tan \alpha - \frac{H_c}{T_c} \mu - \frac{1}{2T_c} \frac{f}{A} \frac{\mu^3}{\cos^3 \alpha}. \quad (7.48)$$

Il rateo di salita può essere legato direttamente al coefficiente di potenza notando che, nell'ipotesi di angoli piccoli ed in virtù delle (7.46):

$$\sin \alpha = \frac{H_c}{T_c} + \sin \mathcal{X} + \frac{D_{fus}}{W}, \quad (7.49)$$

per cui la (7.34) diventa

$$\lambda = \lambda_i + \lambda_c + \mu \frac{H_c}{T_c} + \mu \frac{D_{fus}}{W}, \quad (7.50)$$

ottenendo, ancora una volta dalla (7.31)

$$P_c = \lambda_i T_c + \lambda_c T_c + \mu \frac{D_{fus}}{W} T_c + P_{c0}, \quad (7.51)$$

con  $\lambda_i \approx T_c / (2\mu)$  valida per per  $\mu > 0, 1$ .

## 7.10 Procedura per il calcolo delle prestazioni del rotore

### Funzionamento normale

È nota la geometria del rotore, insieme con le prestazioni aerodinamiche del profilo della pala, è inoltre noto  $\Omega R$ , e la resistenza della fusoliera ( $f$ ), il peso dell'elicottero  $W$  ed il numero di Lock del rotore  $\gamma$ .

Il calcolo può essere effettuato iterativamente assumendo inizialmente  $\alpha = 0^0$ .

1. Si assegna la velocità  $V_\infty$ , per cui è noto  $\mu = V_\infty \cos \alpha / (\Omega R)$ .
2. Dall'equilibrio  $T = W$  si calcola  $T_c = W / (\rho_\infty \Omega^2 R^2 A)$ .
3.  $\lambda_i \approx T_c / (2\mu) \Rightarrow \lambda = \mu \tan \alpha + \lambda_i$ . Nelle successive interazioni si potrà usare  $\lambda_i = T_c / (2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2})$ .
4. La relazione (7.18) consente il calcolo di  $\theta_0$ , il passo collettivo.
5. Noto il rateo di salita  $\lambda_c$ , si può calcolare con la (7.51) il coefficiente di potenza; oppure dato  $P_c$  si può calcolare  $\lambda_c$ .
6. Le relazioni (7.45) consentono il calcolo dei coefficienti di flappeggio  $\beta_0, \beta_{1c}, \beta_{1s}$ .
7. È quindi possibile calcolare la resistenza del rotore e la forza laterale con le (7.20), (7.21), (7.22).  
Si ricalcola  $\alpha$  dalle (7.7) e si reitera la procedura.

### Autorotazione

In questo caso l'incognita fondamentale è  $\Omega$ . Per determinare le prestazioni in autorotazione si può procedere seguendo i seguenti passi.

1. Si assegna  $\mu$ .
2. Dalla (7.31), ponendo  $P_c = 0$  si ottiene una relazione  $\theta_0 = \theta_0(\lambda)$ ; sono quindi note le relazioni  $T_c = T_c(\lambda)$ ,  $H_c = H_c(\lambda)$  ed anche  $\alpha = \alpha(\lambda)$  (dalla (7.7)).
3. Si assegna  $\lambda_c$  e quindi (dalla (7.51), ovviamente con  $P_c = 0$ ) si possono calcolare  $\lambda_i$  e  $\lambda$ .
4. Si possono ora calcolare tutti i coefficienti di forza, in particolare  $T_c$ .
5. Dall'equilibrio  $T_c \rho_\infty \Omega^2 R^2 A = W$  è possibile calcolare  $\Omega$ .
6. Si calcola  $\alpha$  e quindi  $V_\infty$ .

Se le prestazioni vengono calcolate per una matrice di condizioni di volo risulta molto più conveniente lavorare in modo inverso, assegnando  $\lambda$  e determinando poi le altre grandezze.

## 7.11 Ricapitolazione delle assunzioni effettuate

1. Si è utilizzata la teoria dell'elemento di pala limitata nella sua applicabilità in prossimità delle estremità delle pale.
2. Il moto sulla pala si è assunto di puro flappeggio con variazione del passo ciclico e collettivo. I gradi di libertà associati con l'arretramento e con le variazioni elastiche del passo sono importanti per lo studio di vibrazioni, carichi ed aeroelasticità, ma, in genere possono essere trascurati nell'analisi delle prestazioni e nel controllo.

3. Considerazioni simili possono essere fatte per le armoniche superiori del flappeggio che sono state trascurate. In genere  $\beta_{nc}$  e  $\beta_{ns}$  sono di ordine  $\mu^n/n^2$  per  $n \geq 2$ .
4. È stata trascurata la presenza della zona di flusso inverso, (valida in genere fino a  $\mu \approx 0.5$ ).
5. Si è assunto l'induzione  $\lambda_i$  costante sia lungo la pala che al variare di  $\psi$ . L'ipotesi è tanto più valida quante è maggiore  $\mu$ , ma in genere porta ad una previsione approssimativa del flappeggio laterale.
6. Si è assunta forma in pianta della pala rettangolare e variazione del calettamento lineare che, comunque, sono classiche scelte progettative.
7. Si è trascurata l'eccentricità della cerniera di flappeggio.
8. Si è trascurato l'effetto della comprimibilità.
9. Si è assunto  $C_{l_\alpha} = \text{cost}$  con  $\psi$  ed  $\alpha_e$ , non si è tenuto conto del possibile stallo del profilo della pala.

## 7.12 Lo stallo del rotore

Determinate le prestazioni di un rotore in assegnate condizioni di  $T_c$  e  $\mu$ , è possibile determinare la mappa dell'angolo di attacco  $\alpha_e = \alpha_e(\bar{r}, \psi)$  a cui lavora l'elemento di pala durante la rotazione della pala.

Sempre mantenendo l'ipotesi di angoli piccoli:

$$\alpha_e = \theta - \frac{u_P}{u_T}, \quad (7.52)$$

quindi, per una data legge di calettamento (che tende a far diminuire  $\alpha_e$  verso l'estremità della pala) dipende da  $u_P$  e da  $u_T$ .

$u_T$  è dato da 2 contributi, uno proporzionale al raggio che quindi porta ad un aumento di  $\alpha_e$  verso l'estremità della pala, ed uno che dipende da  $\mu \sin \psi$  che porta ad aumenti o diminuzioni di  $\alpha_e$  in dipendenza del segno di  $u_P$ .

In definitiva l'effetto più significativo su  $\alpha_e$  è dato da  $u_P$  ed in particolare da  $\dot{\beta}\bar{r}$  che comporta i valori più elevati  $\alpha_e$  per  $\psi \approx 270^\circ$  e  $\bar{r} \approx 1$ :

$$\alpha_{e_{270^\circ}} = \theta(\bar{r}) - \frac{\beta_{1c}\bar{r}/\Omega + \lambda}{\bar{r} - \mu}. \quad (7.53)$$

Si nota che  $\alpha_{e_{270^\circ}}$  cresce all'aumentare di  $\mu$ ; questa caratteristica comporta l'importante risultato che *lo stallo della pala limita la velocità massima di volo dell'elicottero* al contrario dei velivoli ad ala fissa in cui lo stallo limita la velocità minima.

Prendendo come riferimento gli angoli di stallo bidimensionali degli elementi di pala è quindi possibile determinare un *sentiero* di stallo al variare di  $T_c$  e, soprattutto,  $\mu$ .

Quando la zona stallata è troppo estesa la condizione di volo non è più mantenibile (la pala entra ed esce dallo stallo ad elevate frequenze) pregiudicando le qualità di volo con, inoltre, un inevitabile decadimento delle prestazioni del rotore in termini di  $T_c$  e  $P_c$ .

Un sentiero di stallo così determinato, in base alle caratteristiche *statica* di portanza, soffre di approssimazioni addirittura maggiori del caso dell'ala fissa a causa del complesso fenomeno dello *stallo dinamico*.

### 7.13 Stallo dinamico

Fino ad ora si è assunto che le prestazioni aerodinamiche del profilo della pala siano quelle determinate in condizioni stazionarie, l'unico effetto instazionario di cui si è tenuto conto è quello associato alla variazione di angolo d'attacco dovuto alla velocità di flappeggio della pala ( $\dot{\beta}$ ). Un regime in cui questa ipotesi è valida viene detto regime quasi-stazionario. Nella realtà il profilo si trova a lavorare in un regime in cui sia l'angolo di attacco che la velocità asintotica variano periodicamente con frequenza angolare  $\Omega$ , la velocità di rotazione della pala. Il numero caratteristico che controlla questo fenomeno è la frequenza ridotta  $f_r = \Omega c / (2V_{eff})$ , reciproco del numero di Strouhal. L'approssimazione di regime quasi-stazionario è valida in genere per  $f_r < 0.05$ ; 0.05 è proprio l'ordine di grandezza di  $f_r$  nel caso dei rotori di elicotteri. Quando gli angoli di attacco assumono valori inferiori all'angolo distallo *statico*, cioè l'angolo di stallo in condizioni stazionarie, l'effetto fondamentale della instazionarietà è lo sfasamento tra la forza aerodinamica e l'angolo d'attacco relativo in quanto occorre tenere conto dell'inerzia con cui il flusso segue le variazioni dell'angolo di attacco. Questo effetto è prevedibile con teorie linearizzate, valide nell'ipotesi di piccoli disturbi (teoria di Theodorsen).

**Parte III**

**AERODINAMICA DEGLI  
AEROMOTORI**



## Capitolo 8

# Aeromotori ad asse orizzontale

### 8.1 Generalità

Quando la discussione della possibilità di conversione dell'energia eolica è limitata alla fluidodinamica, solo uno degli aspetti fondamentali viene analizzato; uno studio completo richiede l'analisi di diversi fattori tra cui:

- meteorologia,
- aerodinamica,
- strutture (aerolelasticità),
- conversione dell'energia (per esempio energia meccanica in energia elettrica o termica),
- conservazione dell'energia,
- distribuzione,
- economia,
- effetti ambientali.

Fra questi è utile, in questo contesto, accennare brevemente all'influenza degli aspetti meteorologici. L'energia cinetica dell'atmosfera terrestre è enorme. Sebbene sia un problema aperto a che rateo questa energia possa essere estratta senza modificare il sistema meteorologico, è evidente che una parte molto interessante di questa energia è disponibile.

Purtroppo questa analisi ottimistica viene raffreddata dal fatto che, in pratica, è possibile sfruttare solo una certa aliquota di questa energia perchè è attualmente pensabile sfruttare solo l'energia degli strati di atmosfera fino a 100 – 150 *m* dal suolo. Un'ulteriore riduzione è causata dal gradiente verticale di velocità dovuto allo strato limite terrestre. Questo strato, dell'ordine delle centinaia di metri (dipende essenzialmente dalla “rugosità” terrestre), limita ulteriormente l'energia sfruttabile.

Indicando con  $V_\infty$  la velocità del vento ad una certa quota,  $\frac{1}{2}\rho V_\infty^3$  rappresenta il flusso disponibile di energia cinetica. Se  $\bar{f}$  specifica il valore medio di una grandezza fisica nell'intervallo di tempo  $T$ , il flusso medio di energia cinetica risulta proporzionale a

$$\overline{V_\infty^3} = \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{V_\infty} + u)^3 dt, \quad (8.1)$$

dove  $u$  rappresenta la fluttuazione istantanea di velocità. Integrando si ottiene

$$\overline{V_\infty^3} = \overline{V_\infty}^3 \left( 1 + 3 \frac{\overline{u^2}}{\overline{V_\infty}^2} + \frac{\overline{u^3}}{\overline{V_\infty}^3} \right). \quad (8.2)$$

La differenza tra  $\overline{V_\infty^3}$  e  $\overline{V_\infty}^3$  dipende fortemente dal valore utilizzato per  $T$ . Per piccoli intervalli di tempo ( $T \approx 1 - 2 \text{ min}$ ), il contributo principale alle fluttuazioni di velocità deriva dalla turbolenza di alta frequenza e l'ultimo termine dell'equazione (8.2) diventa trascurabile, per cui, nell'ipotesi plausibile di turbolenza atmosferica del 20% si ottiene

$$\overline{V_\infty^3} = \overline{V_\infty}^3 [1 + 3(0.2)^2] = 1.12 \overline{V_\infty}^3. \quad (8.3)$$

Al contrario per valori di  $T$  dell'ordine dell'anno anche il terzo termine diventa significativo ed il rapporto tra  $\overline{V_\infty^3}$  e  $\overline{V_\infty}^3$  raggiunge valori di 3-4.

Come esempio prendiamo i Paesi Bassi, il paese ventoso per antonomasia. Su scala annuale ed ad una quota di 15 metri, la velocità media del vento risulta essere di  $6 - 7 \text{ m/s}$  con un valore di flusso di energia medio pari a circa  $0.47 \text{ kW/m}^2$  che rappresenta una stima della potenza teorica ottenibile per metro quadro.

## 8.2 Le caratteristiche delle turbine

Anche per le turbine eoliche è definibile un rapporto di funzionamento, cioè il parametro fondamentale caratterizzante il funzionamento della turbina:

$$\lambda = \frac{\Omega R}{V_\infty}, \quad (8.4)$$

con  $\Omega$  la velocità angolare di rotazione della turbina e  $R$  una sua lunghezza di riferimento.

L'*output* fondamentale è costituito dalla coppia e dalla potenza aerodinamica ottenibili, che vengono indicati rispettivamente con  $Q$  e  $P = Q\Omega$ . In termini adimensionali, i coefficienti di potenza e coppia sono definiti come

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2} V_\infty^3 S_{ref}}, \quad C_Q = \frac{Q}{\frac{1}{2} V_\infty^2 S_{ref} R}, \quad (8.5)$$

con  $S_{ref}$  una superficie di riferimento. I due coefficienti sono legati tra loro dalla relazione

$$C_P = \lambda C_Q. \quad (8.6)$$

Le curve  $C_P(\lambda)$  rappresentano le caratteristiche fondamentali di funzionamento della turbina eolica. Chiaramente, una volta nota  $C_P(\lambda)$ , la relazione (8.6) consente facilmente di ricavare  $C_Q(\lambda)$ .

## 8.3 Classificazione

L'orientazione dell'asse di rotazione delle turbine eoliche consente la classificazione fondamentale in turbine ad *asse orizzontale* ed ad *asse verticale*.

Le turbine ad asse orizzontale si dividono sostanzialmente in tre classi:

- mulini a vento classici,
- turbine lente,
- turbine veloci.

I mulini a vento, macchine antichissime, assolvono il più delle volte compiti di pompaggio; sono caratterizzati da valori di  $C_P \approx 0.3$  medio-bassi.

Le turbine lente hanno valori ottimali del rapporto di funzionamento pari a  $\lambda_{opt} \approx 1$ . Sono caratterizzate da un alto valore della solidità ed un elevato numero di pale. Le potenze ottenibili sono basse, ma l'elevato valore della coppia allo spunto ( $C_Q(\lambda = 0)$ ) le rende molto pratiche consentendo una semplice e facile partenza.

Le turbine veloci ( $\lambda_{opt} \approx 5$ ) hanno invece un basso numero di pale (1 – 4) e bassi valori della solidità. I maggiori valori del coefficiente di potenza ( $C_P \approx 0.4$ ) e gli elevati valori di  $\Omega$  di funzionamento le rendono convenienti come generatori di corrente elettrica.

Le turbine ad asse verticale dette ad *azione differenziale* sfruttano come forza propulsiva, sembra quasi un controsenso, la resistenza aerodinamica. Ne è un classico esempio l'anemometro a coppe di Papillon, utilizzato per la misura della velocità del vento. La coppia motrice viene generata sfruttando la differenza di resistenza tra due bracci che girano intorno al proprio asse (vedi figura 8.1).

Esistono però turbine ad asse verticale molto più sofisticate, tipo Darrieus oppure il tipo Savonius, che risultano competitive rispetto ai modelli ad asse orizzontale. Il punto di forza fondamentale delle turbine ad asse verticale è la loro simmetria che ne rende il funzionamento indipendente dalla direzione del vento; al contrario le turbine ad asse orizzontale richiedono l'allineamento, attivo o passivo, del loro asse alla direzione della corrente asintotica, cioè del vento.

## 8.4 Il limite di Betz

Una turbina eolica ad asse orizzontale può essere schematizzata come un disco attuatore attraverso il quale una corrente di velocità asintotica  $V_\infty$  subisce un salto negativo di pressione  $-\Delta p$ . Ipotizzando un flusso incomprimibile, non viscoso è possibile applicare la teoria impulsiva semplice sviluppata nel paragrafo 1.2. Questa volta la corrente decelererà alla velocità  $V_\infty - w$  sul disco ed al valore  $V_\infty - 2w$  infinitamente a valle; in corrispondenza, il tubo di flusso che attraversa il disco di area  $A$ , caratterizzato dalla portata  $\dot{m}$ , sarà divergente (cfr. figura 8.2).

In questo caso sul disco agirà una forza resistente  $D_r$  (invece di una spinta) data da

$$D_r = 2\rho A(V_\infty - w)w . \quad (8.7)$$

Questa forza resistente non è per noi di particolare interesse, essa viene bilanciata dalla reazione vincolare della struttura che sostiene la turbina; la sua

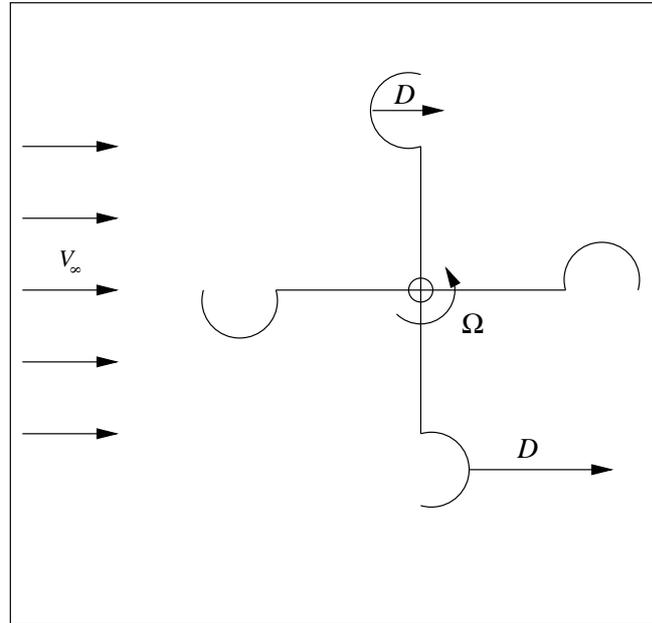


Figura 8.1: Schema di funzionamento di un anemometro a coppe di Papillon.

determinazione è importante solo per il dimensionamento strutturale. È invece interessante notare che la portata d'aria che attraversa il disco subisce una diminuzione di energia cinetica; il bilancio energetico ci garantisce la possibilità di ottenere, nel limite teorico del modello utilizzato, una potenza utile pari proprio alla variazione di energia cinetica:

$$P = \dot{m} \frac{1}{2} [V_\infty^2 - (V_\infty - 2w)^2] = 2\rho A (V_\infty - w)^2 w . \quad (8.8)$$

Utilizzando  $A$  come superficie di riferimento ed indicando anche in questo caso con  $a = w/V_\infty$  il fattore di interferenza assiale si ottiene la *formula di Betz* che esprime il coefficiente di potenza in termini del fattore di interferenza assiale:

$$C_P = 4a(1 - a)^2 . \quad (8.9)$$

Calcolando ed uguagliando a 0 la derivata  $\frac{dC_P}{da}$ , si ottiene il valore di  $a$  per cui  $C_P$  risulta massimo:  $a = \frac{1}{3}$ . Sostituendo nella relazione (8.9) abbiamo:

$$C_{P_{max}} = \frac{16}{27} \approx 0.593 \quad (8.10)$$

che rappresenta il limite massimo raggiungibile dal coefficiente di potenza *nell'ambito di validità della teoria impulsiva semplice*. È importante evidenziare questo aspetto in quanto, come vedremo successivamente, questo limite teorico può essere superato rimuovendo alcune ipotesi alla base della teoria impulsiva (ad esempio considerando un flusso non più quasi-unidimensionale).

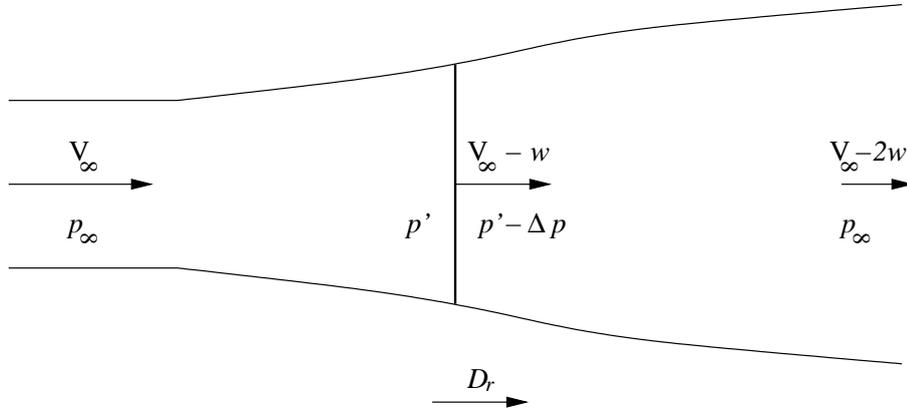


Figura 8.2: Il modello semplice di disco attuatore per una turbina eolica.

Questo limite comporta comunque un'ulteriore riduzione del flusso di energia cinetica del vento effettivamente sfruttabile.

Si nota infine che, mentre nel caso di eliche propulsive la teoria impulsiva è applicabile per un qualsiasi valore di  $a > 0$ , nel caso delle turbine l'ipotesi di quasi-unidimensionalità del flusso richiede  $a < \frac{1}{2}$  per evitare la presenza di zone di ricircolo del flusso nella scia.

## 8.5 Coppia e potenza ottime per un aeromotore ad asse orizzontale

Applichiamo la teoria impulsiva generale e differenziale ad una turbina eolica ad asse orizzontale schematizzata con un disco attuatore. Oltre al fattore di interferenza assiale  $a$  dobbiamo considerare il fattore di interferenza rotazionale  $a'$ . Come per l'induzione assiale, il verso della velocità indotta rotazionale è opposto a quello del caso elica propulsiva; comunque, continuando ad indicare con un numero positivo la coppia  $Q$  (motrice e non resistente nel caso di aeromotore), il segno di  $a'$  (così come quello di  $a$ ) rimarrà positivo anche in questo capitolo.

Le relazioni (1.37), (1.38) e (1.39) possono essere scritte in questo caso

$$dD_r = 4\pi\rho V_\infty^2 (1-a) a r dr ; \quad (8.11)$$

$$dQ = 4\pi\rho V_\infty \Omega (1-a) a' r^3 dr ; \quad (8.12)$$

$$dD_r V_\infty (1-a) = \Omega dQ + a' \Omega dQ . \quad (8.13)$$

La determinazione della condizione di ottimo è, nel caso di turbina eolica, più semplice rispetto al caso dell'elica, in quanto il problema non è di minimo vincolato (minimizzazione della potenza necessaria a parità di spinta), ma assoluto: massimizzazione della potenza utile. Qualunque sia la resistenza  $D_r$  della turbina, questa verrà bilanciata dalla reazione vincolare della struttura di supporto e non ci interessa vincolarla.

Se trascuriamo  $a'$  si ottiene (dalla (8.13))

$$P = 4\pi\rho V_\infty^3 \int_0^R (1-a)^2 a r dr . \quad (8.14)$$

Derivando l'integrando rispetto ad  $a$  ed uguagliando a 0 si ottiene  $a = \frac{1}{3}$ , cioè l'induzione assiale deve essere costante con  $r$  e pari al valore determinato nel paragrafo precedente che restituisce il limite di Betz.

Come nel caso di elica propulsiva, in assenza delle perdite rotazionali si è trovato che l'ottimo comporta una distribuzione uniforme del carico lungo il raggio del disco; però, mentre nel caso precedente il valore costante di  $a$  è variabile e dipende dalla spinta richiesta, per la turbina questo è fisso. Inoltre il valore  $\frac{1}{3}$  è lungi dall'essere un numero piccolo <sup>1</sup> e la turbina eolica risulta essere fortemente caricata nelle condizioni di ottimo, che implica una forte variazione dell'area del tubo di flusso e quindi una peggiore approssimazione della fisica con la teoria impulsiva.

È possibile determinare l'ottimo anche considerando  $a'$ . Le relazioni (8.11), (8.12) e (8.13) consentono di determinare una relazione che lega  $a'$  ed  $a$ :

$$a' = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(1-a)a}{\chi^2}} , \quad (8.15)$$

con  $\chi = \frac{\Omega r}{V_\infty}$ . L'espressione della potenza è, in questo caso:

$$P = 4\pi\rho V_\infty \Omega^2 \int_0^R (1-a)a' r^3 dr . \quad (8.16)$$

Questa relazione consente di determinare l'espressione generale del coefficiente di potenza nell'ambito della teoria impulsiva generale:

$$C_P = \frac{8}{\lambda^2} \int_0^\lambda (1-a)a' \chi^3 d\chi . \quad (8.17)$$

per cui, sostituendo la (8.15) nella (8.17), derivando ancora una volta l'integrando della potenza (8.16) rispetto ad  $a$  ed uguagliando a 0 si ottiene la nuova condizione di ottimo in presenza di effetti rotazionali:

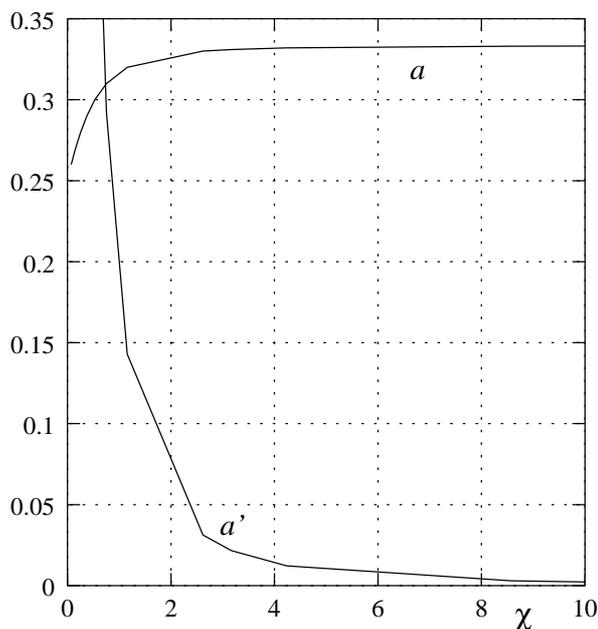
$$a' \chi^2 = (1-a)(4a-1) , \quad (8.18)$$

$$a' = \frac{1-3a}{4a-1} . \quad (8.19)$$

Nel caso di ottimo, la curva caratteristica  $C_P = C_P(\lambda)$  può essere determinata come segue. Le relazioni (8.18) e (8.19) consentono di compilare la tabella 8.1 costruita assegnando  $a$ . Gli andamenti dei fattori di interferenza al variare di  $\chi$  sono illustrati in figura 8.3; si vede come, ancora una volta, già la teoria impulsiva semplice consente di ottenere una soluzione ottima molto vicina a quella della teoria impulsiva generale. Con i valori così determinati possiamo calcolare  $C_P$  al variare di  $\lambda$  utilizzando la relazione (8.17); la curva ottenuta in questo modo è presentata in figura 8.4. Si vede come rapidamente, all'aumentare di  $\lambda$ ,

<sup>1</sup>Si ricorda che nel caso di elica conviene scegliere un piccolo valore di  $a$  per massimizzare il rendimento

$a$	$a'\chi^2$	$a'$	$\chi$
0.26	0.0296	5.5	0.0734
0.28	0.0864	1.3333	0.2546
0.30	0.1400	0.5000	0.5292
0.32	0.1904	0.1429	1.1545
0.33	0.2214	0.0030	8.5743

Tabella 8.1: Valori di  $a'$  e  $\chi$  nelle condizioni di ottimo al variare di  $a$ .Figura 8.3: Diagrammi di  $a$  ed  $a'$  ottimi al variare di  $\chi$ .

si raggiunge il valore asintotico dato dal limite di Betz. In particolare

$$\begin{aligned} \lambda = 1 &\Rightarrow \frac{C_P}{C_{P_{max}}} = 0.75 ; \\ \lambda = 4 &\Rightarrow \frac{C_P}{C_{P_{max}}} = 0.95 ; \\ \lambda = 10 &\Rightarrow \frac{C_P}{C_{P_{max}}} = 0.987 . \end{aligned}$$

È però da ricordare che questo è un comportamento ideale avendo trascurato, nel nostro modello teorico, le perdite viscose.

Il risultato illustrato in figura 8.4 mostra però un importante risultato progettuale: *per massimizzare il coefficiente di potenza è conveniente lavorare con alti valori del rapporto di funzionamento*. Abbiamo quindi ritrovato il risultato

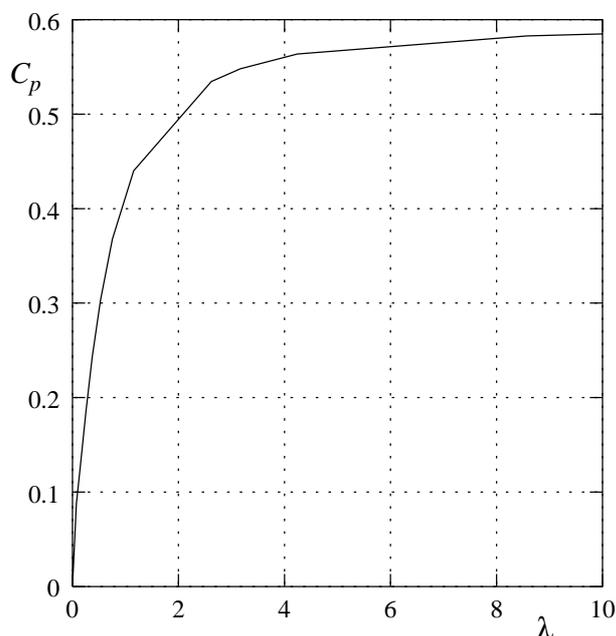


Figura 8.4: Coefficiente di potenza massimo ottenibile al variare di  $\lambda$ .

anticipato nel paragrafo 8.3 e cioè che gli aeromotori veloci sono caratterizzati da maggiori valori di  $C_P$  rispetto agli aeromotori lenti.

## 8.6 Coppia ottima allo spunto

Le espressioni del coefficiente di potenza (8.17) e del coefficiente di coppia  $C_Q = C_P/\lambda$  sono singolari per  $\lambda = 0$ . Mentre è chiaro che la potenza è nulla per  $\Omega = 0$ , risulta meno evidente il comportamento allo spunto della coppia ed in particolare del coefficiente di coppia nelle condizioni di ottimo (8.18) e (8.19). Quest'ultimo può essere ottenuto analizzando il comportamento locale di  $C_P$  e  $C_Q$  per  $\lambda \rightarrow 0$ .

Applicando il teorema dell'Hospital risulta

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} C_P = \frac{4}{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \int_0^\lambda (1-a)a'\chi^3 d\chi = 4\lambda^2[1-a(\lambda)]a'(\lambda), \quad (8.20)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} C_Q = \frac{8}{3}\lambda[1-a(\lambda)]a'(\lambda), \quad (8.21)$$

dove  $a(\lambda)$  e  $a'(\lambda)$  sono date dalle (8.18) e (8.19) sostituendo  $\lambda$  al posto di  $\chi$ .

Dall'analisi delle relazioni (8.18) e (8.19) si evince che  $a(0) = \frac{1}{4}$  e  $a'(0) = \infty$ ; poniamo allora  $a \approx \frac{1}{4} + c_1\lambda^\nu$ , con  $c_1$  e  $\nu$  costanti da determinare imponendo che le relazioni (8.18) e (8.19) (in cui si è sostituito  $\lambda$  al posto di  $\chi$ ) siano soddisfatte per  $\lambda \rightarrow 0$ . In particolare, sostituendo l'espressione approssimata di

$a$  nell'equazione (8.18) si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4} - 3c_1\lambda^\nu\right)\lambda^2 &= 16\left(\frac{1}{4} + c_1\lambda^\nu - \frac{1}{4}\right)^2\left(1 - \frac{1}{4} - c_1\lambda^\nu\right) \\ &= 16\left(\frac{3}{4}c_1^2\lambda^{2\nu} - c_1^3\lambda^{3\nu}\right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Trascurando i termini di ordine superiore è facile verificare che quest'espressione è soddisfatta se e soltanto se  $\nu = 1$  e  $c_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$ . Con l'espressione locale trovata per  $a$ , dalla relazione (8.19) si ricava infine che  $a' \approx \frac{\sqrt{3}}{4\lambda}$ .

Sostituendo i comportamenti locali di  $a$  ed  $a'$  nelle espressioni (8.20) e (8.21) si ottiene in conclusione

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} C_P = 0; \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} C_Q = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (8.23)$$

È quindi possibile, con un accurato progetto, ottenere elevate coppie allo spunto con turbine ad asse orizzontale.

## 8.7 Geometria della pala

Ancora una volta abbiamo determinato una condizione di ottimo senza aver definito la forma geometrica effettiva delle pale. Per ottenerla è necessario, come nel caso delle eliche, descrivere l'effettiva interazione aerodinamica delle pale con il flusso, utilizzando la teoria generale dell'elemento di pala. Infatti, così come per le teorie impulsive, la teoria sviluppata nel paragrafo 2.3 è direttamente applicabile nel presente caso; unica accortezza è quella di prestare attenzione ai segni dei coefficienti di induzione assiale e rotazionale ed a quelli di coppia e potenza che sono cambiati nella convenzione utilizzata in questo capitolo.

In figura 8.5 è illustrato un elemento di pala di una turbina eolica insieme con tutte le velocità coinvolte nella descrizione del suo funzionamento. Si lascia al lettore la derivazione, con queste convenzioni, della teoria ripetendo esattamente il procedimento illustrato nel paragrafo 2.3. Si vuole invece qui derivare la forma ottima della pala nel caso in cui vengano trascurate gli effetti viscosi; si suppone cioè per tutti gli elementi  $c_d = 0$ . In questo caso si ottiene

$$dD_r = \frac{1}{2}Nc\rho V_e^2 c_l \cos \varphi dr, \quad (8.24)$$

$$dQ = \frac{1}{2}Ncr\rho V_e^2 c_l \sin \varphi dr, \quad (8.25)$$

con

$$\tan \varphi = \frac{1}{\chi} \frac{1-a}{1+a'}. \quad (8.26)$$

Uguagliando le (8.24) e (8.25) rispettivamente alle (8.11) e (8.12) e tenendo conto che  $V_e = \frac{\Omega r(1+a')}{\cos \varphi}$  si ottiene

$$\frac{a}{1-a} = \frac{\sigma c_l \cos \varphi}{4 \sin^2 \varphi}, \quad \frac{a'}{1+a'} = \frac{\sigma c_l}{4 \cos \varphi}. \quad (8.27)$$

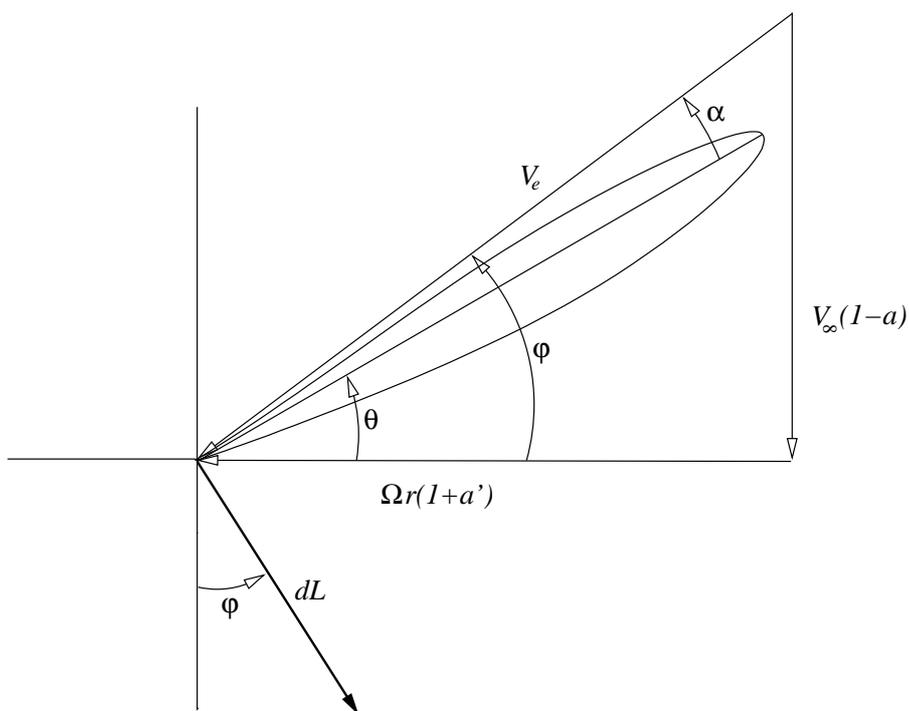


Figura 8.5: Schema di un elemento di pala pre una turbina eolica.

Sostituendo queste relazioni nella (8.26) abbiamo

$$\chi(4 \sin^2 \varphi + \sigma c_l \cos \varphi) = \sin \varphi(4 \cos \varphi - \sigma c_l). \quad (8.28)$$

Sostituendo ancora le (8.27) nella condizione di ottimo (8.19) e risolvendo l'equazione di II grado in  $\sigma c_l$  risulta

$$\sigma c_l = 4(1 - \cos \varphi). \quad (8.29)$$

Questa relazione fornisce  $\sigma c_l = \sigma c_l(\varphi)$  nelle condizioni di ottimo. Sostituita nella (8.28) si ottiene invece la relazione  $\varphi = \varphi(\chi)$ :

$$\chi = \frac{\sin \varphi(2 \cos \varphi - 1)}{(1 + 2 \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)}. \quad (8.30)$$

Essendo  $\sigma c_l = \frac{1}{\chi} \frac{N c c_l}{2\pi V_\infty}$  possiamo scrivere in conclusione la relazione

$$\frac{N c \Omega c_l}{2\pi V_\infty} = \frac{4 \sin \varphi(2 \cos \varphi - 1)}{1 + 2 \cos \varphi}, \quad (8.31)$$

diagrammata in figura 8.6.

Nel caso in cui gli elementi di pala lavorino tutti allo stesso  $c_l$ , la curva di figura 8.6 rappresenta la forma in pianta della pala che consente di ottenere

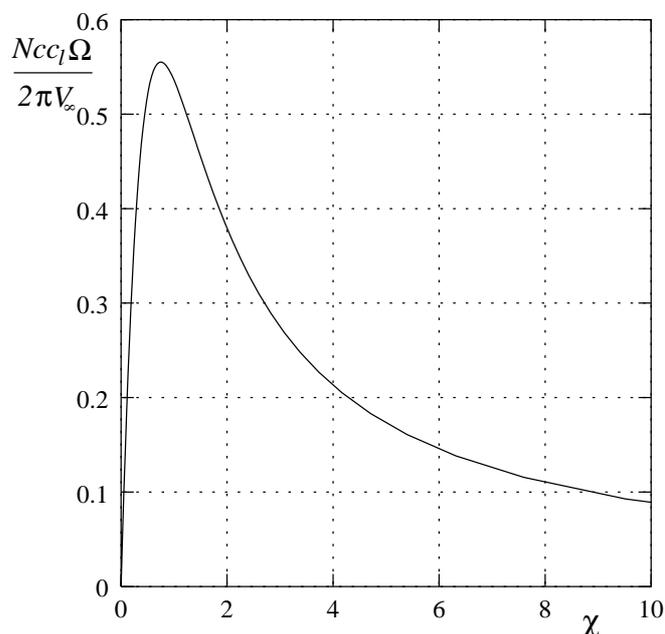


Figura 8.6: Diagramma di  $\frac{Nc_l\Omega}{2\pi V_\infty}$  in funzione di  $\chi$  nel caso di ottimo.

il funzionamento ottimo della turbina.  $\chi$  varia nell'intervallo  $(0, \lambda)$ , per cui gli aeromotori lenti sono caratterizzati da rapporti di rastremazione  $> 1$ ; al contrario le turbine veloci devono essere molto rastremate per ottimizzare la potenza ottenibile. Nella figura 8.7 è invece presentato l'andamento di  $\varphi(\chi)$  nel caso di ottimo. Essendo  $\theta = \varphi - \alpha$ , questo diagramma è rappresentativo della legge di calettamento del profilo lungo la pala che deve essere imposta per ottenere la condizione di ottimo.

Ponendo

$$S = \int_0^R N c d r \quad (8.32)$$

e supponendo  $c_l$  costante lungo la pala, si ottiene

$$S = \frac{2\pi V_\infty^2}{\Omega^2 c_l} \int_0^\lambda \frac{N c \Omega c_l}{2\pi V_\infty} d\chi . \quad (8.33)$$

È possibile allora introdurre una definizione della solidità della turbina:

$$\sigma_0 = \frac{S}{\pi R^2} = \frac{2}{\lambda^2 c_l} \int_0^\lambda \frac{N c \Omega c_l}{2\pi V_\infty} d\chi . \quad (8.34)$$

I valori di solidità della turbina nel caso in cui si utilizzi la distribuzione ottima delle corde (8.31) sono tabulati nella tabella 8.2. La tabella mostra la seconda notevole differenza tra turbine lente e turbine veloci: *le turbine lente sono caratterizzate da elevati valori della solidità che, al contrario, è molto bassa nelle turbine veloci.*

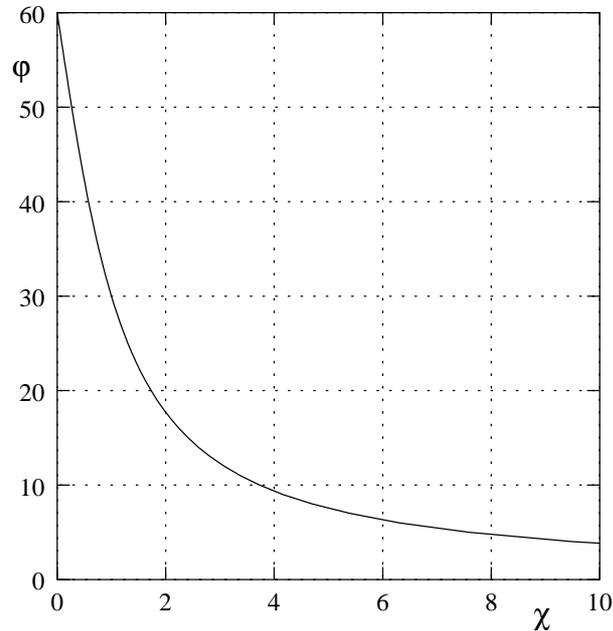


Figura 8.7: Diagramma di  $\phi$  in funzione di  $\chi$  nel caso di ottimo.

$\lambda$	1	2	3	4	5
$\sigma_0 c_l$	0.88	0.48	0.29	0.19	0.14

Tabella 8.2: Valori ottimi della solidità di una turbina eolica al variare del rapporto di funzionamento.

## 8.8 Concentratori di vento

Introduciamo a valle di una turbina eolica, schematizzata con un disco attuatore, un diffusore che obblighi la scia del disco a seguire una forma assegnata, come schematizzato in figura 8.8, fino alla totale ricomprensione alle condizioni ambiente. Applicando il teorema di Bernoulli a monte ed a valle del disco, sottraendo membro a membro e tenendo conto della conservazione della massa a monte ed a valle del diffusore si ottiene

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \left[ 1 - \frac{1}{K_V^2} \left( \frac{V_R}{V_\infty} \right)^2 \right], \quad (8.35)$$

dove  $V_R$  indica la velocità sul disco, mentre  $K_V = \frac{A_e}{A} = \frac{V_R}{V_e}$ , con  $A$  l'area del disco e  $A_e$  e  $V_e$ , rispettivamente l'area finale del diffusore e la velocità all'uscita del diffusore. Valutando ancora la potenza ottenibile come la variazione di energia cinetica che subisce la portata d'aria trattata dal disco possiamo determinare

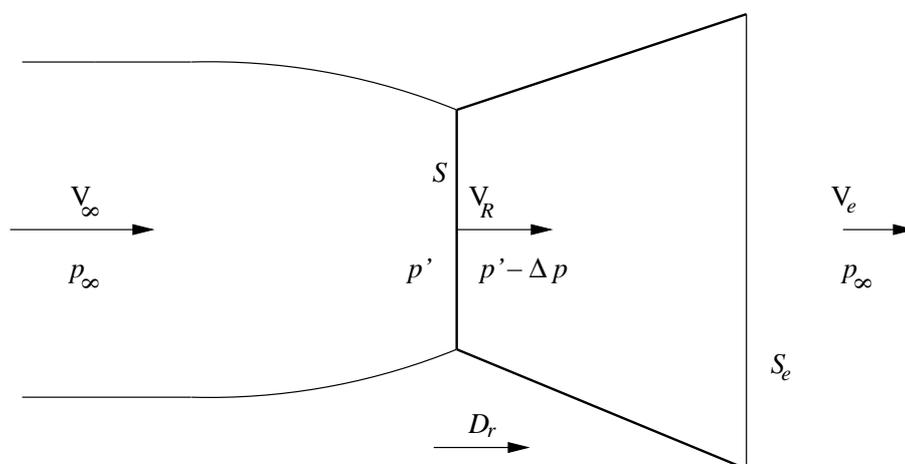


Figura 8.8: Schema di funzionamento di una turbina eolica con diffusore.

il coefficiente di potenza:

$$C_P = \frac{V_R}{V_\infty} \left[ 1 - \frac{1}{K_V^2} \left( \frac{V_R}{V_\infty} \right)^2 \right]. \quad (8.36)$$

Il massimo di questa funzione si ottiene per  $\frac{V_R}{V_\infty} = \frac{K_V}{\sqrt{3}}$  ed è pari a  $C_{P_{max}} = \frac{2}{3} \frac{K_V}{\sqrt{3}}$ .

Dalla formula di Betz, il massimo nel caso di turbina senza diffusore si ottiene per  $V_R = \frac{2}{3}V_\infty$  e  $V_e = \frac{1}{3}V_\infty$ , cioè per  $K_V = 2$ . Con questo stesso valore la turbina con diffusore dà un valore di  $C_{P_{max}} = \frac{2}{3} \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 0.7698$ : aggiungendo il diffusore siamo stati in grado di superare il limite di Betz! Questa affermazione richiede però una certa cautela; infatti se consideriamo una turbina ottima senza diffusore, ma con lo stesso ingombro frontale (cioè con area  $A_e$ ) otteniamo una potenza pari a  $C_{P_{Betz}} \frac{A_e}{A} \approx 0.593 \cdot 2 = 1.186$  di gran lunga superiore alla potenza ottenibile con la turbina con diffusore.

Questo esempio mostra però che quello di Betz non è un limite invalicabile; in particolare quando non sono più valide le ipotesi con il quale è stato ottenuto.

Un modo più efficace per superare il limite di Betz si ottiene utilizzando il dispositivo già introdotto nel paragrafo 3.1, cioè intubando il rotore della turbina. Come nel caso dell'elica è conveniente utilizzare una carenatura negativa del tipo illustrato in figura 3.2(a). La circolazione indotta dalla carenatura, che non è altro che un'ala ad anello, comporta essenzialmente un aumento di portata e quindi un aumento del diametro effettivo del rotore.

Così come nel caso dell'elica possiamo scomporre la resistenza della turbina in  $D_t = D_R + D_S$ , con  $D_R$  la resistenza del rotore e  $D_S$  la resistenza della carenatura. Quest'ultima, come abbiamo già visto, può essere non nulla anche in un flusso ideale in presenza del rotore funzionante.

La teoria impulsiva semplice fornisce

$$D_t = \rho V_R A (V_\infty - V_e), \quad (8.37)$$

$$D_R = \Delta p A = \frac{1}{2} \rho (V_\infty^2 - V_e^2) A. \quad (8.38)$$

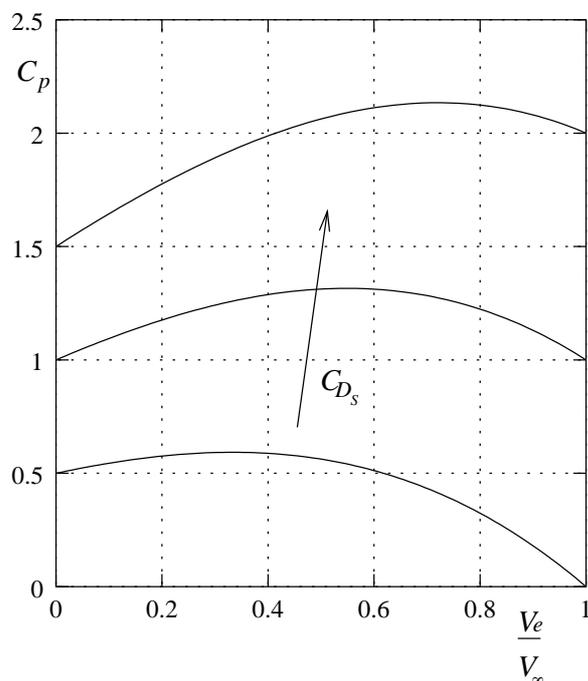


Figura 8.9: Diagramma della relazione (8.40) per  $C_{D_S} = 0, 1, 2$ .

Combinando queste due relazioni otteniamo

$$V_R = \frac{1}{2}(V_\infty + V_e) + \frac{D_S}{\rho A(V_\infty - V_e)}. \quad (8.39)$$

Il primo termine è presente anche nel caso senza schermatura, per cui ritroviamo che, per aumentare la portata è necessario che  $D_S > 0$ . Utilizzando queste relazioni otteniamo, per il coefficiente di potenza:

$$C_P = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{V_e}{V_\infty}\right)^2 \left(1 - \frac{V_e}{V_\infty}\right) + \frac{1}{2} C_{D_S} \left(1 + \frac{V_e}{V_\infty}\right), \quad (8.40)$$

dove con  $C_{D_S} = \frac{D_S}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A}$  si è indicato il coefficiente di resistenza della carenatura. Questa relazione è diagrammata in figura 8.9 per diversi valori di  $C_{D_S}$ . Come si vede dal grafico si possono ottenere valori massimi del  $C_P$  molto elevati ed ancora una volta il limite di Betz viene superato via via che aumenta il contributo alla resistenza della carenatura.

La relazione (8.40) fornisce potenze non nulle anche quando  $V_e = V_\infty$ , cioè quando la variazione di energia cinetica della portata d'aria è nulla. Questo deriva dalla singolarità di queste condizioni di funzionamento in quanto  $V_R \rightarrow \infty$  quando  $V_e \rightarrow V_\infty$ .

Come al solito, derivando la relazione (8.40) rispetto a  $V_e$  ed uguagliando a

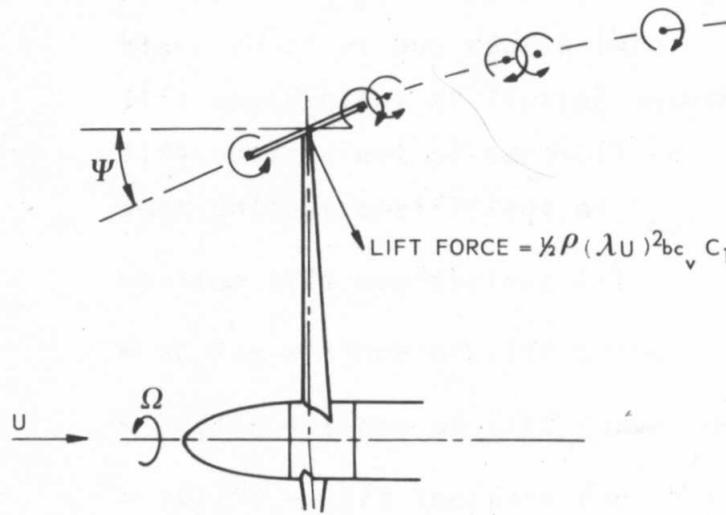


Figura 8.10: Aletta di estremità (de Vries, 1979).

zero, si ottiene la  $V_e$  ottima:

$$\left(\frac{V_e}{V_\infty}\right)_{opt} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{1 + \frac{3}{4}C_{D_s}}. \quad (8.41)$$

Poiché  $V_e < V_\infty$ , questa relazione implica che  $C_{D_s} < 4$ .

Per una effettiva determinazione delle forze che agiscono sulla carenatura è necessario studiare l'aerodinamica dell'ala ad anello come ad esempio illustrato nel paragrafo 3.1.

I vantaggi dell'utilizzazione di una schermatura sono diversi; si riducono le perdite di estremità, si riduce la sensibilità del flusso alla non assialità del flusso, si ottiene un leggero smorzamento delle fluttuazioni di velocità, aumenta la velocità angolare di funzionamento ottimo della turbina.

Al contrario, l'ingombro della carenatura e, soprattutto, l'aumento dei costi ne limitano l'applicazione.

## 8.9 Alette di estremità

Le alette di estremità (in inglese *tip vane*) consentono di ottenere aumenti della portata effettiva, e quindi della potenza, simili a quelli ottenibili con una schermatura della turbina, senza i grossi limiti di ingombro e costo.

L'aletta di estremità consiste appunto in una piccola ala posta all'estremo della pala, con la corda del profilo diretta nel senso di rotazione della turbina, la portanza dell'aletta è quindi diretta radialmente, verso il centro dell'asse della turbina (cfr. figura 8.10).

Il suo principio di funzionamento può essere meglio compreso con l'aiuto della figura 8.11 e schematizzando il comportamento aerodinamico dell'aletta con un vortice a staffa di intensità  $\Gamma_v$ . Nella figura la superficie cilindrica della scia della turbina è stata aperta nel piano per cui le alette funzionano in

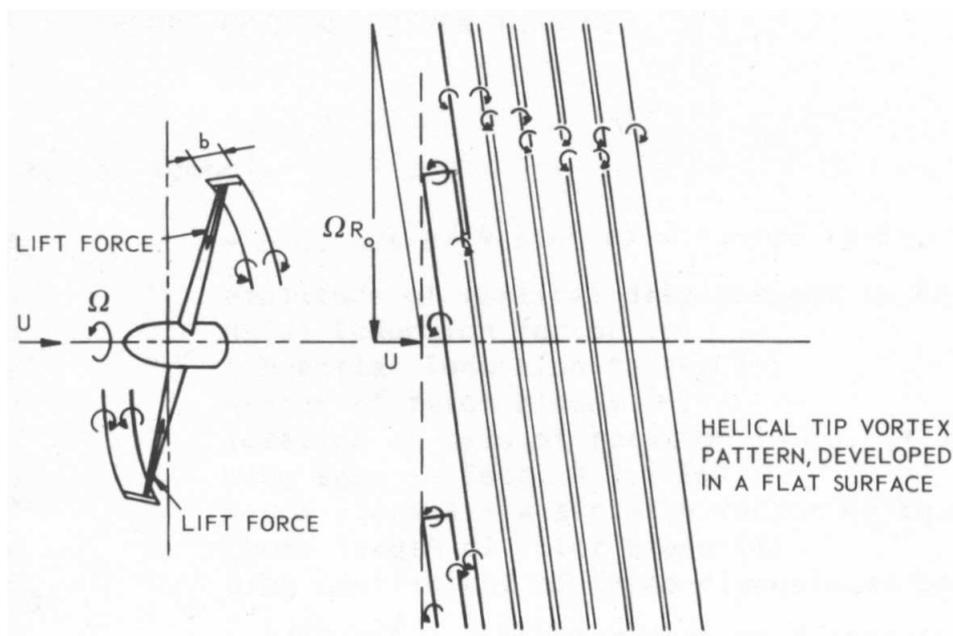


Figura 8.11: Schema di funzionamento di un'ala di estremità (de Vries, 1979).

*schiera*; si noti inoltre che il passo della schiera di alette è stato scelto in modo da far sovrapporre il vortice libero sinistro di un'ala con il vortice libero destro dell'ala successiva di intensità uguale ed opposta (cioè  $\lambda = \frac{2\pi R}{Nb}$ , con  $b$  l'apertura dell'ala), in questo modo le induzioni dei vortici sovrapposti si cancellano, e l'effetto globale delle alette è quello di aumentare la portata trattata dalla turbina in maniera simile alla schermatura.

Ipotizzando  $\lambda \gg 1$  abbiamo che la velocità a cui lavora l'ala è dell'ordine di  $\Omega R$  e  $\Gamma_v \propto \Omega R c_v$ , con  $c_v$  la corda media dell'ala, mentre nel caso di schermatura convenzionale  $\Gamma_s \propto V_\infty c_s$  con  $c_s$  la lunghezza della carenatura. Rapportando le circolazioni si ottiene  $\frac{\Gamma_v}{\Gamma_s} = \lambda \frac{c_v}{c_s}$ , per cui, nel caso di turbine veloci, è possibile ottenere delle circolazioni e quindi delle portate, comparabili a quelle che si ottengono con una turbina schermata pur utilizzando alette di dimensioni molto ridotte. In particolare, a parità di circolazione si ottiene che il rapporto tra la superficie totale delle alette e quella della schermatura è dato da  $\frac{N c_v b}{c_s 2\pi R} = \lambda^{-2}$ .

Le perdite introdotte dalle alette sono dovute alla potenza che viene dissipata dal sistema di vortici liberi (dovute alla resistenza indotta delle alette) ed a quelle legate alla resistenza di profilo. Le perdite indotte possono essere molto piccole se l'ala viene progettata accuratamente; infatti abbiamo visto che se si fanno sovrapporre i vortici di estremità, una buona parte della circolazione libera si cancella. Per quanto riguarda le perdite di profilo, indicando con  $C_{D_p}$  il coefficiente di resistenza di profilo dell'ala, si ottiene che la diminuzione del coefficiente di potenza conseguente alle perdite di profilo è pari a

$$\Delta C_P = -C_{D_p} \frac{N b c_v}{A} \lambda^3, \quad (8.42)$$

varia cioè con il cubo del rapporto di funzionamento per cui, purtroppo, le perdite di profilo diventano significative per  $\lambda \gg 1$ .

Fino ad ora la scia della turbina è stata approssimata con una superficie cilindrica; in realtà proprio in prossimità del rotore il tubo di flusso è fortemente divergente (al contrario delle eliche le turbine eoliche sono fortemente caricate); per ottimizzare la mutua cancellazione dei vortici liberi conviene inclinare le alette di un angolo  $\psi$  allineandole alla direzione locale del tubo di flusso (cfr. figura 8.10); in questo caso è allora possibile descrivere in modo alternativo il funzionamento dell'aletta. Infatti, nel paragrafo 8.8 abbiamo associato l'aumento di potenza conseguente alla schermatura alla presenza di una resistenza additiva dovuta alla schermatura. Le alette inclinate funzionano in modo analogo, la portanza, non più radiale, dà anch'essa un contributo di resistenza additiva. Indicando con  $C_L$  il coefficiente di portanza dell'aletta si ottiene il coefficiente di resistenza equivalente alla schermatura pari a

$$C_{D_s} = C_L \sin \psi \lambda^2 \frac{N c_v b}{A}. \quad (8.43)$$

Per minimizzare le perdite risulta conveniente che  $C_{D_p} \rightarrow 0$  e  $\frac{N c_v b}{A} \rightarrow 0$ , per cui  $C_{D_s}$  elevati (e quindi  $C_P$  maggiori) richiedono elevati valori di  $\psi$  e  $C_L$ . La scelta di  $\psi$  è sostanzialmente imposta dalla forma del tubo di flusso (cioè da quanto è caricato il rotore), rimane  $C_L$  l'unico parametro con cui si può controllare l'efficienza del sistema. In definitiva è fondamentale la scelta del profilo e del calettamento dell'aletta che deve essere ad alta portanza e bassa resistenza.

Le relazioni (8.40), (8.41) e (8.43) consentono di diagrammare il coefficiente di potenza ottimo ottenibile con aletta di estremità al variare di  $\lambda$ , fissati  $\frac{N c_v b}{A}$ ,  $C_L$  e  $C_{D_p}$ . Poiché deve essere  $C_{D_s} < 4$ , queste curve hanno un limite superiore in  $\lambda$  che dipende dai valori assegnati ai parametri, in ogni caso è possibile ottenere valori di  $C_P \gg 1$ .

È da notare che  $C_{D_s}$  dipende da  $\psi$  che a sua volta dipende da  $V_e$  per cui  $C_{D_s}$  non è indipendente da  $V_e$  e, quindi, il precedente calcolo dell'ottimo risulta approssimato.



## Capitolo 9

# Aeromotori ad asse verticale

### 9.1 Turbine ad azione differenziale

La differenza fondamentale dell'aerodinamica nelle turbine ad asse orizzontale e verticale è data dall'apparizione, in quest'ultime, di fenomeni instazionari. Infatti, una rotazione del rotore di una turbina ad asse verticale in presenza di un vento costante, la direzione del flusso e le velocità relative (rispetto alla pala) variano ciclicamente, al contrario del caso di turbine ad asse orizzontale in cui rimangono costanti.

Come visto nell'esempio dell'anemometro di Papillon, le turbine ad azione differenziale sono caratterizzate dall'utilizzo della resistenza aerodinamica come forza propulsiva. In figura 9.1 è illustrato lo schema di funzionamento di un panemone articolato. Esso è un cilindro di altezza  $H$ , le due basi circolari di raggio  $R$  sono collegate fra loro da  $N$  aste (scontri) e da  $N$  pale (battenti), che sono dei pannelli rettangolari di base  $c$ , incernierati e quindi liberi di ruotare intorno ad uno dei lati.

Andiamo ad introdurre un modello semplificato che ci consentirà di ottenere una facile e veloce stima (conservativa) delle prestazioni del panemone. Sempre con riferimento alla figura 9.1 nella parte inferiore (angoli di azimut  $\pi < \phi < 2\pi$ ) i battenti sono liberi di ruotare e si dispongono secondo la direzione locale del vento; la resistenza da loro offerta è trascurabile ed in questa regione i battenti non offrono contributo alla coppia. Nella parte superiore ( $0 < \phi < \pi$ ) i battenti sono premuti sugli scontri da una forza aerodinamica se la velocità relativa, data dalla composizione di  $V_\infty$  con  $\Omega R$ , è diretta verso destra, cioè

$$|\sin \phi| \geq \frac{\Omega R}{V_\infty} = \lambda, \quad (9.1)$$

in queste condizioni forniscono una coppia motrice; al contrario, quando la relazione (9.1) non è soddisfatta, non viene fornita coppia motrice. Dall'analisi della (9.1) risulta che è possibile ottenere una coppia motrice solo se  $\lambda < 1$ : il panemone articolato è certamente un aeromotore lento. Un'altra ipotesi, molto grossolana, che andiamo a fare è che il campo di moto all'interno del panemone sia uniforme ( $V = V_\infty$ ) e che le mutue interferenze tra i pannelli

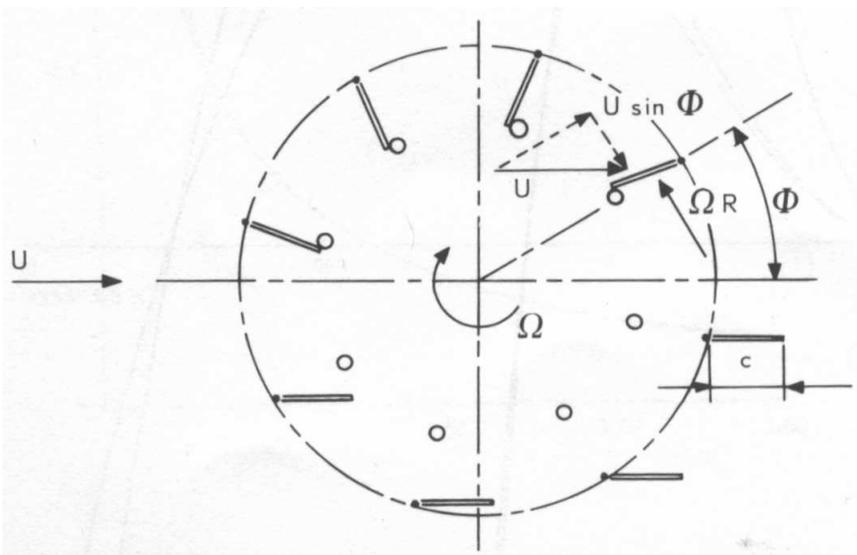


Figura 9.1: Schema di funzionamento di un panemone articolato (de Vries, 1979).

siano trascurabili, questo risulta vero, al limite, solo per solidità molto basse:  $\sigma = \frac{Nc}{R} \rightarrow 0$ .

Nella zona in cui la relazione (9.1) è soddisfatta, la forza aerodinamica che agisce sul singolo battente è data da

$$D = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 C_D c H (|\sin \phi| - \lambda)^2, \quad (9.2)$$

con  $C_D \approx 2$ . È quindi possibile determinare la coppia media che agisce, durante un'intera rotazione, su una singola pala

$$Q = \frac{2}{2\pi} \int_{\bar{\phi}}^{\frac{\pi}{2}} D R d\phi = \frac{1}{2\pi} \rho V_{\infty}^2 C_D c H R F(\lambda), \quad (9.3)$$

con  $\bar{\phi} = \arcsin \lambda$  e

$$F(\lambda) = \left( \frac{\pi}{2} - \bar{\phi} \right) \left( \frac{1}{2} + \lambda^2 \right) - \frac{3}{2} \lambda \cos \bar{\phi}. \quad (9.4)$$

È quindi possibile ricavare il coefficiente di potenza ( $P = NQ\Omega$ ) e di coppia utilizzando  $2RH$  come superficie di riferimento:

$$C_P = \frac{\sigma}{2\pi} C_D \lambda F(\lambda), \quad C_Q = \frac{\sigma}{2\pi} C_D F(\lambda). \quad (9.5)$$

Le caratteristiche del panemone articolato così ottenute sono diagrammate nelle figure 9.2 e 9.3 al variare di  $\sigma$ . Si noti come l'elevata coppia allo spunto ( $\lambda = 0$ ) si paghi con valori del coefficiente di potenza molto bassi; inoltre, a parte le basse prestazioni, il forte rumore e l'usura generati dall'urto dei battenti sugli scontri ne limitano il suo utilizzo.

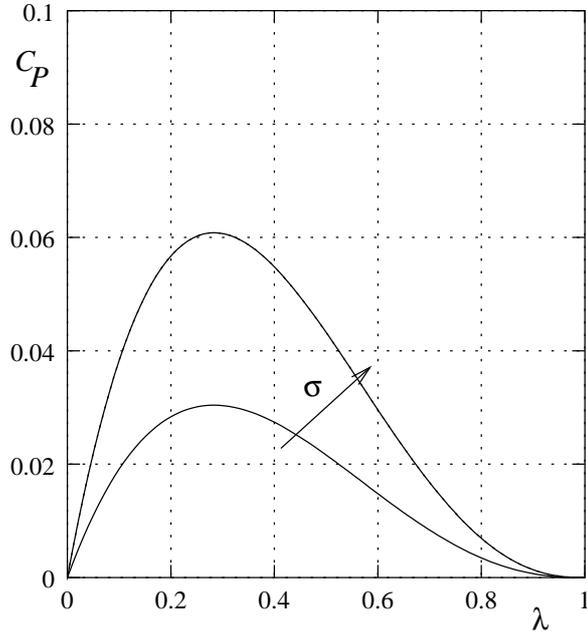


Figura 9.2: Panemone articolato, coefficiente di potenza in funzione di  $\lambda$  per  $\sigma = 1, 2$ , ( $C_D = 2$ ).

## 9.2 Turbine tipo Darrieus

Descriveremo il funzionamento di questa turbina utilizzando un modello bidimensionale. La turbina è schematizzata in figura 9.4. Abbiamo un'ala infinita con profilo simmetrico che ruota a velocità angolare  $\Omega$  intorno ad un asse a distanza  $R$ ; la posizione del profilo è identificata dall'angolo di azimut  $\phi$ . La velocità effettiva di funzionamento del profilo è data dalla composizione della velocità di rotazione  $\Omega R$  con una certa aliquota della corrente uniforme  $(1-a)V_\infty$ :

$$\frac{V}{V_\infty} = \sqrt{[\lambda + (1-a)\sin\phi]^2 + (1-a)^2\cos^2\phi}, \quad (9.6)$$

mentre l'angolo di attacco è pari a

$$\alpha = \arctan \frac{(1-a)\cos\phi}{\lambda + (1-a)\sin\phi}. \quad (9.7)$$

Nel limite di  $\lambda \rightarrow \infty$  queste due relazioni danno

$$\frac{V}{V_\infty} \rightarrow \lambda + (1-a)\sin\phi, \quad \alpha \rightarrow \frac{(1-a)\cos\phi}{\lambda}. \quad (9.8)$$

La portanza che agisce sul profilo, perpendicolare a  $V$ , ha sempre, durante tutta la rotazione del profilo, una componente motrice. Assumiamo che  $a$  sia indipendente dall'angolo di azimut  $\phi$  (teoria a *singolo tubo di flusso*) e che sia valida

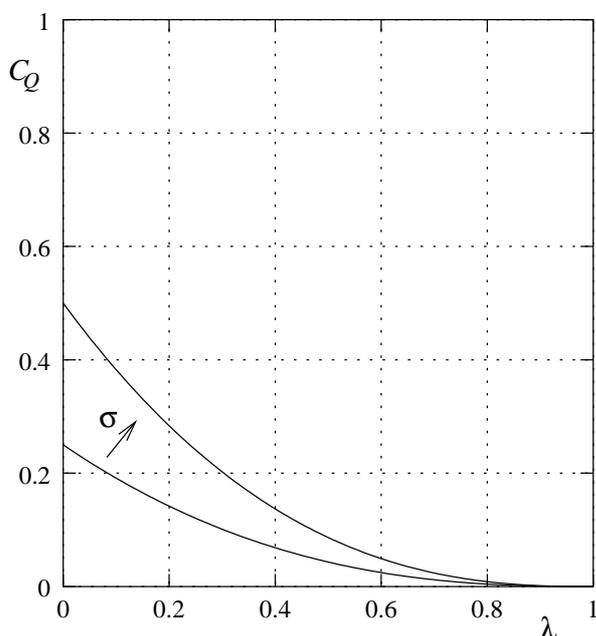


Figura 9.3: Panemone articolato, coefficiente di coppia in funzione di  $\lambda$  per  $\sigma = 1, 2$ , ( $C_D = 2$ ).

la teoria impulsiva semplice, cioè che su scala molto grande, questa macchina si comporti come un disco attuatore con un'induzione all'infinito a valle pari al doppio di quella sul disco. Utilizzando la teoria impulsiva semplice la forza resistente che agisce sul rotore è data da

$$D_R = 2R\rho V_\infty^2 2a(1-a) , \quad (9.9)$$

mentre calcolando direttamente l'azione aerodinamica media sul profilo, ipotizzando il flusso non viscoso e considerando  $N$  pale:

$$D_R = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho V^2 c C_l \cos(\phi + \alpha) d\phi , \quad (9.10)$$

con  $C_l$  il coefficiente di portanza del profilo e  $c$  la sua corda. Uguagliando queste due relazioni si ottiene

$$a(1-a) = \frac{1}{8} \frac{Nc}{R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{V}{V_\infty} \right)^2 C_l \cos(\phi + \alpha) d\phi . \quad (9.11)$$

Le relazioni (9.6), (9.7) e (9.11) consentono di determinare  $a$ . Questo risulta ancora più semplice (non si rende necessaria alcuna procedura iterativa) se si

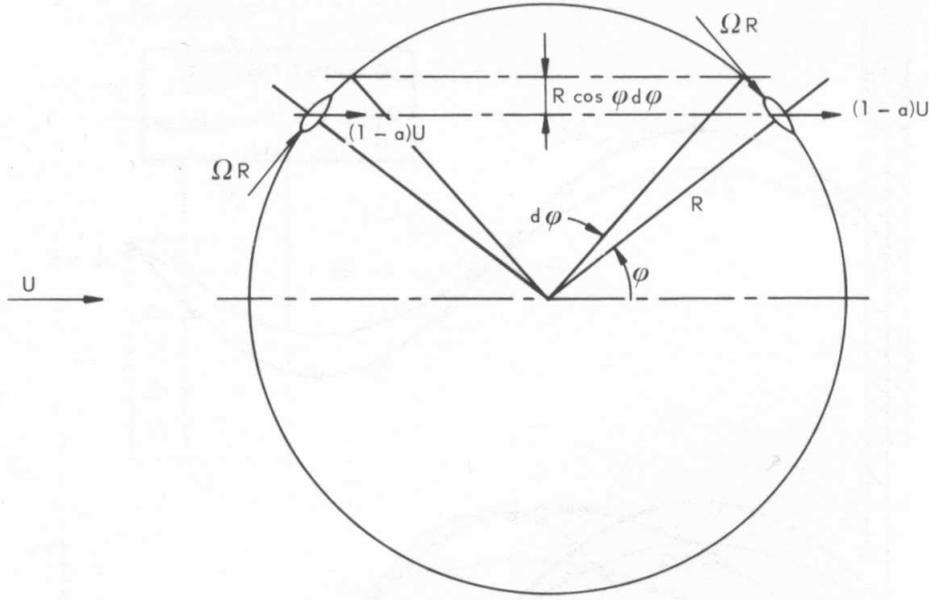


Figura 9.4: Schema di funzionamento di una turbina Darrieus (de Vries, 1979).

pone  $y = \lambda/(1 - a)$ , per cui l'equazione (9.11) diventa, dopo semplici passaggi

$$\frac{1}{1 - a} = 1 + \frac{1}{8} \frac{Nc}{R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ (y + \sin \phi)^2 + \cos^2 \phi \right] \cdot C_l \cos \left( \phi + \arctan \frac{\cos \phi}{y + \sin \phi} \right) d\phi, \quad (9.12)$$

$$\text{con} \quad C_l = C_{l\alpha} \arctan \frac{\cos \phi}{y + \sin \phi}.$$

La relazione (9.12) consente di determinare  $a$  una volta nota la geometria ( $\frac{Nc}{R}$ ) e, quindi,  $\lambda = y(1 - a)$ .

Calcolando la forza aerodinamica tangenziale che agisce sul profilo è possibile determinare la coppia e quindi la potenza ottenibile

$$P = \Omega R \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho V^2 (C_l \sin \alpha - C_d \cos \alpha) d\phi, \quad (9.13)$$

avendo inserito anche le perdite viscosse del profilo ( $C_d$ ). Il corrispondente coefficiente di potenza (per unità di lunghezza) è

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 2R} = \frac{1}{4\pi} \frac{Nc}{R} \lambda \int_0^{2\pi} \left( \frac{V}{V_\infty} \right)^2 C_l \sin \alpha \left( 1 - \frac{C_d}{C_l} \cot \alpha \right) d\phi. \quad (9.14)$$

Il calcolo della potenza, o equivalentemente del  $C_P$  richiede una procedura numerica; una semplice previsione del suo comportamento può essere ottenuta con un'analisi asintotica nel caso limite di  $\lambda \rightarrow \infty$ . Infatti, in queste condizioni, utilizzando i termini principali nelle (9.8) ed essendo  $\alpha \ll 1$ , dalla (9.12) si

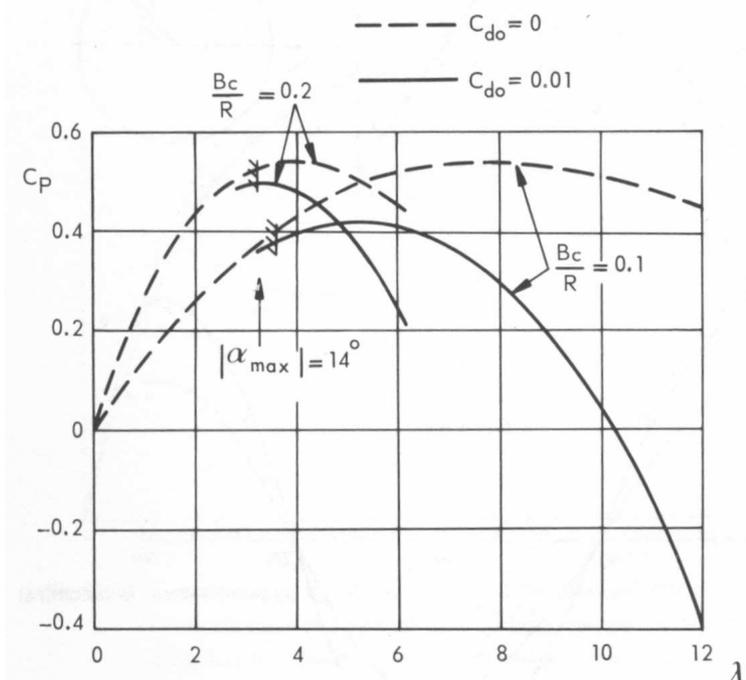


Figura 9.5: Curve caratteristiche per una turbina Darrieus (de Vries, 1979).

ottiene

$$a = \frac{1}{16} \frac{Nc}{R} C_{l\alpha} \lambda . \quad (9.15)$$

Inoltre, con  $C_d \approx C_{d0}$  la relazione (9.14) diventa

$$C_P = 4a(1-a)^2 - \frac{1}{2} \frac{Nc}{R} C_{d0} \lambda^3 . \quad (9.16)$$

La formula (9.16) con la (9.15) consente di esprimere il coefficiente di potenza in funzione di  $\lambda$  al variare di  $\frac{Nc}{R}$  e  $C_{d0}$  come illustrato in figura 9.5. Si noti che, come c'era da aspettarsi, per  $C_{d0} = 0$ , la (9.16) coincide con la formula di Betz (8.9). In questo caso, al variare della solidità, il massimo coincide con il limite di Betz (la sua posizione varia però con  $\sigma$ ), mentre, ovviamente, diminuisce all'aumentare di  $C_{d0}$ . Le curve non sono valide per tutti i valori di  $\lambda$ ; esiste un valore minimo per  $\alpha = \alpha_{max}$ , cioè quando il profilo stalla, mentre  $\lambda_{max}$  si ottiene imponendo che la turbina debba fornire potenza, cioè  $a < \frac{1}{2}$ .

La teoria a singolo tubo di flusso può essere facilmente estesa al caso  $a$  non costante con  $r$ ; in queste nuove ipotesi viene denominata teoria a tubo di flusso multiplo. Assumendo  $a = a(r)$  con  $r = R \sin \varphi$ , l'induzione assiale al variare di  $r$  viene determinata uguagliando la relazione

$$dD_R = 2\rho V_\infty^2 (1-a) a R \cos \varphi d\varphi, \quad (9.17)$$

ottenuta dalla teoria impulsiva semplice differenziale alla

$$dD_R = \frac{1}{2} \rho V^2 c C_l \cos(\varphi + \alpha) d\varphi, \quad (9.18)$$

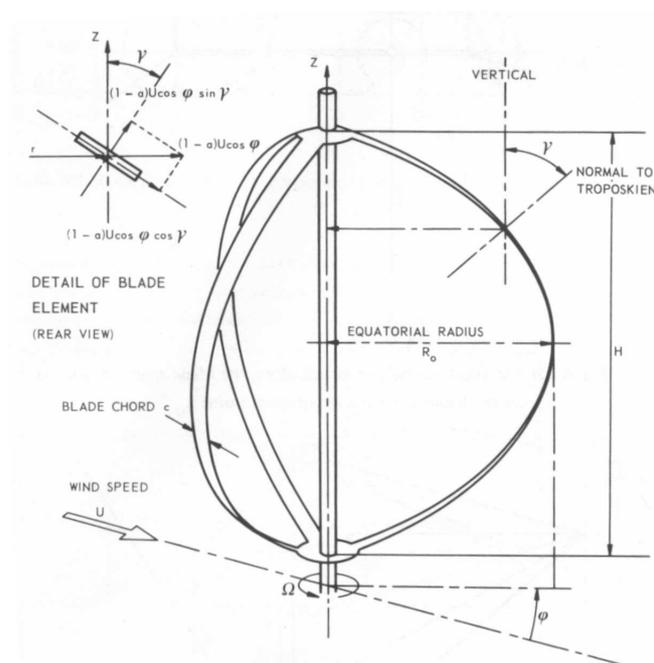


Figura 9.6: Schema di funzionamento di una turbina Darrieus (de Vries, 1979).

come al solito determinata dall'analisi delle forze agenti sul singolo elemento di pala. Ovviamente, coppia e potenza possono essere poi ottenute integrando le forze agenti sull'elemento durante una sua rotazione come nella teoria a singolo tubo di flusso.

Come ultima considerazione sul modello teorico introdotto, possiamo notare che, poichè la portanza del profilo varia nel tempo, questo genera una scia su cui la circolazione varia periodicamente, la sua forma, dovendo seguire la traiettoria delle particelle fluide è una cicloide di forma piuttosto complessa; una teoria più aderente alla realtà richiede, oltre a considerare  $a$  funzione dell'angolo di azimut  $\phi$ , di tenere conto di questi vortici liberi (teoria vorticoso).

Dal punto di vista aerodinamico, la turbina Darrieus 2D, ottenuta mediante pale di forma rettilinea, è la più efficiente, ma la sua applicazione pratica risulta difficile per problemi di tipo dinamico-strutturale in quanto risultano molto elevati i momenti flettenti dovuti alle forze centrifughe. La soluzione classica utilizzata nelle installazioni funzionanti richiede l'utilizzo di pale di forma curva come illustrato in figura 9.6.

Il notevole vantaggio di queste turbine di non richiedere un riallineamento con la direzione del vento è limitato dalle scarse prestazioni per  $\lambda$  piccoli; infatti l'intervallo di  $\varphi$  in cui il profilo lavora in stallo aumenta sempre di più al diminuire di  $\lambda$ . Non solo la turbina Darrieus non parte da sola, ma deve essere portata ad alti  $\lambda$  per poter raggiungere un regime di funzionamento autonomo.



## Appendice A

# Determinazione del minimo di un funzionale

### Estremo semplice

In questa appendice si introduce brevemente il problema fondamentale del calcolo variazionale. Per una trattazione rigorosa si rimanda a testi specifici sull'argomento, ad esempio Smirnov (1980).

Sia  $\mathcal{F}(x, y, y')$  una funzione continua rispetto alle sue 3 variabili.

Si indichi con  $y(x)$  una generica funzione, continua con la sua derivata prima, definita nell'intervallo  $(a, b)$ .

Per ogni funzione  $y(x)$  si definisce un funzionale  $F(y)$  nel seguente modo

$$F(y) = \int_a^b \mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] dx. \quad (\text{A-1})$$

Sia  $y_0(x)$  una funzione tale che  $y_0(a) = \alpha$ ,  $y_0(b) = \beta$ ; si dice che  $y_0(x)$  è un minimo per il funzionale  $F(y)$ , se  $\forall y(x)$  continua in  $(a, b)$  con la sua derivata prima e  $y(a) = \alpha$ ,  $y(b) = \beta$

$$F(y) \geq F(y_0), \quad (\text{A-2})$$

comunque si sceglie  $y(x)$ .

Sia  $\eta(x)$  una funzione continua con la sua derivata prima in  $(a, b)$  e  $\eta(a) = 0$ ,  $\eta(b) = 0$ ; si ponga

$$y(x) = y_0(x) + t\eta(x); \quad (\text{A-3})$$

allora se  $F(y)$  ha un minimo in  $y_0$  deve risultare

$$\forall \eta(x) \quad F[y_0(x) + t\eta(x)] \geq F(y_0). \quad (\text{A-4})$$

Si definisca la funzione  $\phi(t)$ :

$$\phi(t) = F[y_0(x) + t\eta(x)], \quad (\text{A-5})$$

se  $F(y)$  ha un minimo in  $y_0(x)$ , allora  $\phi(t)$  ha un minimo per  $t = 0$  e quindi

$$\phi'(0) = 0 \quad e \quad \phi''(0) \geq 0. \quad (\text{A-6})$$

Essendo

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \mathcal{F}(x, y, y') dx = \int_a^b \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \eta' \right) dx = \\ &= \int_a^b \eta \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \right) \right] dx,\end{aligned}\tag{A-7}$$

dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta risolvendo l'integrale per parti, allora condizione necessaria affinché la funzione  $y_0(x)$  sia punto di minimo per il funzionale  $F$  è che

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \right) = 0,\tag{A-8}$$

in quanto  $\int_a^b f(x)\eta dx = 0 \quad \forall \eta(x)$  continua con la sua derivata prima e  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  se e soltanto se  $f$  è identicamente nulla. L'equazione (A-8) si chiama equazione di Eulero.

$\delta F = \phi'(0)$  si chiama variazione prima del funzionale  $F$  in  $y_0$ .  $\delta y = \eta(x)$  con  $\eta$  qualsiasi si chiama variazione prima della funzione  $y$  in  $y_0$ , per cui la condizione necessaria di minimo del funzionale  $F$  in  $y_0$  può essere riscritta come

$$\delta F(y_0) = 0 \quad \forall \delta y.\tag{A-9}$$

## Minimo vincolato

Si cerchi il minimo  $y$  del funzionale  $F$  imponendo però che  $y$  soddisfi anche il vincolo

$$G(y) = \int_a^b \mathcal{G}(x, y, y') dx = c.\tag{A-10}$$

### Teorema di Eulero:

Se  $y$  è un estremo del funzionale  $F$  e  $y$  soddisfa il vincolo (A-10) allora esiste una costante  $\Lambda$  (moltiplicatore di Lagrange) tale che  $y$  è un estremo per il funzionale  $I(y) = F(y) + \Lambda G(y)$ .

# Bibliografia

- AMENDOLA, A., TOGNACCINI, R., BOERSTOEL, J. W, KASSIES, A., (1988), Validation of a Multi-Block Euler Flow Solver with Propeller-Slipstream Flows, AGARD CP 437, 2, pp. P1.1-P1.15, Lisboa.
- ANDERSON, J. D. JR., (1991), *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill.
- ASHLEY, H., LANDAHL, M., (1965), *Aerodynamics of Wings and Bodies*, Dover Publications.
- BETZ, A., (1920), Development of the inflow theory of the propeller, NACA TN-24.
- BRAMWELL, A. R. S., (1976), *Helicopter Dynamics*, Edward Arnold.
- BROUWER, H. H., (1992), On the Use of the Method of Matched Asymptotic Expansions in Propeller Aerodynamics and Acoustics, *J. Fluid Mech.*, 242, pp. 117-143.
- CONLISK, A. T., (1997), Modern Helicopter Aerodynamics, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 29, pp. 515-567.
- GESSOW, A., MYERS, G. C., (1952), *Aerodynamics of the Helicopter*, The Macmillan Company.
- GLAUERT, H., (1935), Airplane Propellers, in *Aerodynamic Theory*, ed. W.F. Durand, Vol. IV, pp. 169-360, Berlin Julius Springer.
- GLAUERT, H., (1947), *The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory*, Cambridge Science Classics.
- HANSEN, A. C., BUTTERFIELD, C. P., (1993), Aerodynamics of Horizontal-Axis Wind Turbines, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 25, pp. 115-149.
- HIRSCH, C., (1988), *Numerical Computation of Internal and External Flows*, John Wiley & Sons.
- JOHNSON, W., (1980), *Helicopter Theory*, Princeton University Press, Dover Publications (1984).
- JOHNSON, W., (1986), Recent Developments in Rotary-Wing Aerodynamic Theory, *AIAA J.*, 24, 8, pp. 1219-1242.
- LE GOURIERES, D., (1985), *Energia eolica*, Masson Italia Editori.

- LEISHMAN, J. G., (2000), *Principles of Helicopter Aerodynamics*, Cambridge Aerospace Series.
- LOSITO, V., (1967), *Teoria e metodi di Aerodinamica applicata*, manoscritto.
- MANZO, F., (1998), *Appunti del corso di Aerodinamica applicata*.
- MCCORMICK, B. W., (1967), *Aerodynamics of V/STOL Flight*, Academic Press.
- VON MISES, R., (1959), *Theory of Flight*, Dover Publications.
- NIKOLSKY, A. A., (1951), *Helicopter Analysis*, John Wiley & Sons.
- PAOLI, L., (2000), *La progettazione del mulino a vento*, Energie alternative, Collana a cura del CAST, Editrice Il Rostro.
- PARASCHIOVOIU, I., (2002), *Wind Turbine Design With Emphasis on Darrieus Concept*, Polytechchnic International Press, Montreal.
- PRANDTL, L., TIETJENS, O. G., (1934), *Applied Hydro- and Aeromechanics*, Dover Publications.
- SAFFMAN, P. G., (1992), *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press.
- SEDDON, J., NEWMAN S (2002), *Basic Helicopter Aerodynamics*, 2<sup>nd</sup> Edition, Blackwell Science.
- SHAPIRO, J., (1956), *Principles of Helicopter Engineering*, McGraw Hill Book Co..
- SMIRNOV, V. I. (1980), *Corso di matematica superiore IV*, Parte prima, Editori Riuniti.
- STEPNIEWSKI, W. Z., KEYS, C. N., (1984), *Rotary-Wing Aerodynamics*, Dover Publications.
- THEODORSEN, T., (1948), *Theory of Propellers*, McGraw-Hill.
- DE VRIES, O., (1979), *Fluid Dynamic Aspects of Wind Energy Conversion*, AGARD-AG-243.
- WALD, Q. R., (2006), The aerodynamics of propellers, *Progress in Aerospace Sciences.*, 42, pp. 85-128.
- WEICK, F. E., (1931), Full scale wind tunnel tests with a series of propellers of different diameters on a single fuselage, NACA TR-339.

## Ringraziamenti

Un sincero ringraziamento va alla Sig.ra Antonella Onofrio per l'efficiente e paziente collaborazione nella stesura in  $\text{\LaTeX}$  degli appunti.



# Indice

<b>I</b>	<b>AERODINAMICA DELL'ELICA</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Teorie impulsive</b>	<b>3</b>
1.1	Il modello di disco attuatore . . . . .	3
1.2	Teoria impulsiva semplice . . . . .	4
1.3	Distribuzione di carico ottima . . . . .	7
1.4	Teoria impulsiva generale . . . . .	8
1.5	Induzioni assiale e rotazionale ottime . . . . .	11
1.6	<i>Esercizi</i> . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Teorie dell'elemento di pala</b>	<b>13</b>
2.1	Il sistema vorticoso dell'elica . . . . .	13
2.2	Velocità assiale indotta da un vortice elicoidale . . . . .	16
2.3	Teoria generale dell'elemento di pala . . . . .	17
2.4	Regimi di funzionamento . . . . .	20
2.5	Perdite del mozzo . . . . .	21
2.6	Una condizione di ottimo approssimata . . . . .	22
2.7	Effetto del numero di pale finito . . . . .	24
2.8	Progetto dell'elica . . . . .	27
2.9	<i>Esercizi</i> . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Eliche intubate</b>	<b>31</b>
3.1	Analisi con la teoria impulsiva semplice . . . . .	31
3.2	Effetto della geometria della carenatura . . . . .	34
3.3	Profili a schiera . . . . .	38
3.4	<i>Esercizi</i> . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Effetti della comprimibilità</b>	<b>41</b>
4.1	La teoria impulsiva semplice in regime comprimibile . . . . .	41
4.2	Teoria impulsiva linearizzata . . . . .	42
4.3	Un modello numerico di disco attuatore in regime comprimibile . . . . .	45
<b>II</b>	<b>AERODINAMICA DEL ROTORE</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>Il rotore in hovering</b>	<b>51</b>
5.1	Teoria impulsiva per il rotore in hovering . . . . .	51
5.2	Teoria dell'elemento di pala per il rotore in hovering . . . . .	52
5.3	Il rotore ideale . . . . .	55

5.4	Il rotore ottimo . . . . .	55
5.5	Il rotore reale . . . . .	56
5.6	La cifra di merito . . . . .	56
5.7	Velocità di salita . . . . .	59
5.8	Autorotazione . . . . .	60
5.9	Curve di funzionamento in salita e discesa . . . . .	62
5.10	Effetto suolo in hovering . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Il rotore rigido in volo traslato</b>	<b>67</b>
6.1	Teoria impulsiva per le eliche in flusso non assiale . . . . .	67
6.1.1	Funzionamento a spinta costante . . . . .	68
6.1.2	Funzionamento a potenza costante . . . . .	69
6.2	Il rotore in volo traslato . . . . .	69
6.3	Potenza parassita in volo traslato . . . . .	71
6.4	Stima della potenza necessaria al volo traslato livellato . . . . .	73
6.4.1	Potenza indotta. . . . .	74
6.4.2	Potenza parassita del rotore. . . . .	74
6.5	Potenza parassita della fusoliera. . . . .	74
6.6	La zona di flusso inverso. . . . .	75
6.7	Effetto suolo in volo traslato. . . . .	76
6.8	<i>Esercizi</i> . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Il rotore articolato</b>	<b>77</b>
7.1	Necessità del rotore articolato . . . . .	77
7.2	Passo ciclico e collettivo . . . . .	78
7.3	La dinamica della pala . . . . .	81
7.4	Interpretazione fisica dei coefficienti di flappeggio . . . . .	83
7.5	La velocità effettiva sull'elemento di pala . . . . .	84
7.6	Le forze aerodinamiche sul rotore . . . . .	85
7.7	La potenza in volo traslato . . . . .	89
7.8	Calcolo dei coefficienti di flappeggio . . . . .	91
7.9	Rateo di salita . . . . .	92
7.10	Procedura per il calcolo delle prestazioni del rotore . . . . .	93
7.11	Ricapitolazione delle assunzioni effettuate . . . . .	94
7.12	Lo stallo del rotore . . . . .	95
7.13	Stallo dinamico . . . . .	96
<b>III</b>	<b>AERODINAMICA DEGLI AEROMOTORI</b>	<b>97</b>
<b>8</b>	<b>Aeromotori ad asse orizzontale</b>	<b>99</b>
8.1	Generalità . . . . .	99
8.2	Le caratteristiche delle turbine . . . . .	100
8.3	Classificazione . . . . .	101
8.4	Il limite di Betz . . . . .	101
8.5	Coppia e potenza ottime per un aeromotore ad asse orizzontale . . . . .	103
8.6	Coppia ottima allo spunto . . . . .	106
8.7	Geometria della pala . . . . .	107
8.8	Concentratori di vento . . . . .	110
8.9	Alette di estremità . . . . .	113

<b>INDICE</b>	<b>133</b>
<hr/>	
<b>9 Aeromotori ad asse verticale</b>	<b>117</b>
9.1 Turbine ad azione differenziale . . . . .	117
9.2 Turbine tipo Darrieus . . . . .	119
<b>Appendici</b>	<b>124</b>
<b>A Determinazione del minimo di un funzionale</b>	<b>125</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>127</b>