Note sulla teoria dei campi e del potenziale

Claudio Serpico
Corso di Elettrotecnica per Ingegneria Elettronica
Anno Accademico 2001-2002

7 gennaio 2002

1 Solenoidalità, Indivergenza, Conservatività e Irrotazionalità

1.1 Campi Solenoidali

Definizione 1. *Un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *si dice solenoidale in un dominio* Ω *quando:*

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \tag{1}$$

per ogni superfice chiusa Σ *contenuta in* Ω*.*

È facile mostrare che la definizione di solenoidalità appena data può essere formulata in maniera equivalente come segue

Definizione 2. *Un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *si dice solenoidale in un dominio* Ω *quando:*

$$\iint_{\Sigma'_\gamma} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_{\Sigma''_\gamma} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{2}$$

per ogni coppia di superfici Σ'_γ *e* Σ''_γ *contenute in* Ω *e con lo stesso orlo* γ[1]*.*

La dimostrazione dell'equivalenza delle definizioni 1 e 2 viene lasciata al lettore e si basa sul semplice fatto che una superfice chiusa può sempre essere vista come l'unione di due superfici aperte con lo stesso orlo.

Un conseguenza della proprietà dei campi solenoidali espressa nella Definizione 2 è che il flusso del campo attraverso una superfice aperta dipende solo dall'orlo della superfice e non dalla forma della stessa. Per questo motivo il flusso di un campo solenoidale attraverso una superfice aperta di orlo γ viene anche detto flusso *concatenato* con la linea chiusa γ. Questa circostanza è chiaramente espressa dal seguente teorema:

[1] Le normali alle superfici sono scelte in maniera coordinata con l'orientazione dell'orlo, utilizzando la regola della mano destra.

Teorema 1. *Se il campo* $\mathbf{v}$ *è solenoidale nel dominio* Ω *allora esiste un campo* $\mathbf{A}$ *definito nello stesso dominio tale che*

$$\iint_{\Sigma_\gamma} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \oint_\gamma \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl \tag{3}$$

dove γ *è una qualsiasi linea chiusa contenuta in* Ω *e* Σ_γ *è una qualsiasi superfice aperta contenuta in* Ω *che abbia per orlo* γ*.*

Il campo $\mathbf{A}$ che compare nel Teorema 1 viene detto *potenziale vettore* associato al campo $\mathbf{v}$. La dimostrazione del Teorema 1 viene tralascita, tuttavia la validità del teorema è abbastanza chiara dal punto di vista intuitivo. Infatti, se il flusso del campo attraverso le superfici aperte dipende solo dall'orlo, possiamo pensare di associare ad ogni orlo una grandezza scalare e poi descrivere il funzionale scalare risultante come integrale di linea di un potenziale vettore. Dal Teorema 1 discende immediatamente anche il seguente:

Corollario 1. *Se il campo* $\mathbf{v}$ *è solenoidale nel dominio* Ω *allora esiste un campo* $\mathbf{A}$ *definito nello stesso dominio tale che*

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{4}$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Stokes nell'Eq.(3) e sfruttare l'arbitrarietà della superfice Σ_γ per eseguire l'appropriato processo al limite che porta alla (4) $\diamondsuit$

L'inverso del corollario 1, cioè il fatto che un campo vettoriale esprimibile mediante un potenziale vettore sia solenoidale, è ovvio e la corrispondente dimostrazione si lascia al lettore. In definitiva, possiamo concludere che condizione necessaria e sufficiente perchè un campo vettoriale sia solenoidale è che essi sia il rotore di un altro campo vettoriale.

1.2 Campi Indivergenti

Definizione 3. *Un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *differenziabile si dice indivergente in un dominio* Ω *quando:*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

in ogni punto del dominio Ω*.*

È evidente che un campo solenoidale, nei punti in cui è differenziabile [2] è indivergente. Basta infatti applicare l'Eq.(1) intorno al punto in cui si vuole calcolare la divergenza e sfruttare l'arbitrarietà della superfice chiusa Σ per eseguire l'opportuno processo al limite che porta alla (5). Viceversa, non è vero che un campo indivergente è necessariamente solenoidale. Basti pensare, ad esempio, al campo elettrico

[2] supponiamo qui per semplicità che eventuali discontinuità possano essere approssimate con andamenti differenziabili. L'analisi si può comunque generalizzare al caso in cui siano presenti discontinuità introducendo le opportune condizioni di raccordo.

nella regione esterna alla zona dove sono contenute le cariche: esso è indivergente ma non solenoidale.

Per i campi indivergenti sussiste il seguente risultato:

Teorema 2. *(Principio di deformazione della superfice). Consideriamo un campo* $\mathbf{v}$ *indivergente in una certa regione* Ω*. Allora*

$$\oiint_{\Sigma'} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \oiint_{\Sigma''} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS \tag{6}$$

dove Σ' *e* Σ'' *sono due superfici chiuse contenute in* Ω *che possono essere deformate l'una nell'altra con una trasformazione continua senza mai uscire dalla regione* Ω*.*

Dimostrazione. Consideriamo per semplicità il caso in cui le due superfici Σ' e Σ'' siano contenute una nell'altra. La dimostrazione nei casi più complicati può essere portata avanti con ragionamenti simili.

Se le due superfici Σ' e Σ'' possono essere deformate l'una nell'altra con una trasformazione continua senza mai uscire dalla regione Ω allora la regione $\Omega_{\Sigma'\Sigma''}$ inclusa tra le due superfici deve essere tutta contenuta in Ω. Se ora teniamo presente che il campo vettoriale $\mathbf{v}$ è indivergente in Ω si ottiene che

$$\iiint_{\Omega_{\Sigma'\Sigma''}} \nabla \cdot \mathbf{v}\, dV = \oiint_{\Sigma'} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS - \oiint_{\Sigma''} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0\,, \tag{7}$$

e quindi che i flussi di $\mathbf{v}$ estesi alle due superfici Σ' e Σ'' coincidono. $\diamondsuit$

Dal principio di deformazione delle superfici è evidente che se un campo è indivergente in un dominio a connessione superficiale semplice, cioè un dominio nel quale ogni superfice chiusa può essere ricondotta ad un punto mediante una trasformazione continua senza mai uscire dal dominio, allora esso è in tale dominio solenoidale. Infatti, il flusso attraverso una superfice chiusa sarà pari al flusso attraverso una superfice piccola a piacere attorno ad un punto che è zero. Esempi notevoli di dominio a connessione superficiale semplice sono l'intero spazio tridimensionale oppure l'interno di una sfera o da qualsiasi superfice che si può ottenere come deformazione continua di essa.

L'analisi del legame tra campi indivergenti e solenoidali definiti in domini a connessione superficiale multipla può essere agevolmente portata avanti sfruttando il principio di deformazione della superfice. Quest'analisi viene lasciata al lettore.

1.3 Campi Conservativi

Un campo vettoriale $\mathbf{v}$ si dice conservativo in un dominio Ω quando:

Definizione 4.

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = 0 \tag{8}$$

per ogni linea chiusa γ *contenuta in* Ω*.*

È facile mostrare che la definizione 4 di conservatività è equivalente alla seguente definizione

Definizione 5. *Un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *si dice conservativo in un dominio* Ω *quando:*

$$\int_{\gamma'_{BA}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = \int_{\gamma''_{BA}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl \tag{9}$$

per ogni coppia di linee γ'_{BA} *e* γ''_{BA} *contenute in* Ω *e con gli stessi punti terminali* A *e* B[3].

La dimostrazione dell'equivalenza delle definizioni 4 e 5 viene lasciata al lettore e si basa sul semplice fatto che una linea chiusa può sempre essere vista come l'unione di due linee aperte con gli stessi punti terminali.

Una conseguenza della proprietà dei campi conservativi espressa dalla definizione 5 è che l'integrale di linea ("il lavoro") del campo lungo una linea aperta γ_{AB} dipende solo dai punti terminali A e B della linea e non dalla forma della stessa. Per questo motivo il lavoro di una campo conservativo su una linea aperta γ_{BA} viene anche detto differenza di potenziale tra i punti A e B. Questa circostanza è chiaramente espressa dal seguente teorema:

Teorema 3. *Se il campo* $\mathbf{v}$ *è conservativo nel dominio* Ω *allora esiste una funzione scalare* φ *definita nello stesso dominio tale che*

$$\int_{\gamma_{BA}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = \varphi(A) - \varphi(B) \tag{10}$$

dove γ_{BA} *è una qualsiasi linea aperta che congiunge i due punti* A *e* B *orientata da* A *verso* B*, contenuta in* Ω*.*

Dimostrazione. Si consideri la funzione

$$F(P, \gamma_{PO}) = C - \int_{\gamma_{PO}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl \ , \tag{11}$$

dove C è una costante fissata, O è un punto fissato appartenente al dominio Ω, mentre P è un punto variabile in tutto Ω. Per la conservatività del campo l'integrale a secondo membro non dipende dalla linea e quindi la funzione $F(P, \gamma_{PO})$ è in effetti una funzione del solo punto P. Se indichiamo tale funzione con $\varphi(P)$ si ottiene facilmente l'eguaglianza (10). $\diamondsuit$

Il campo scalare φ associato ad un campo conservativo $\mathbf{v}$ viene anche detto potenziale scalare del campo. Osserviamo che il fatto che l'integrale nell'eq.(10) è pari a $\varphi(A) - \varphi(B)$ invece di $\varphi(B) - \varphi(A)$ è un fatto puramente convenzionale e corrisponde alla convenzione secondo la quale le linee del campo $\mathbf{v}$ sono dirette dalle zone a potenziale più elevato a quelle a potenziale più basso.

Dal Teorema 3 discende immediatamente anche il seguente:

[3] Le orientazioni scelte sulle linee vanno sempre da A verso B

Corollario 2. *Se il campo* $\mathbf{v}$ *è conservativo nel dominio* Ω *allora esiste un campo scalare* φ *definito nello stesso dominio tale che*

$$\mathbf{v} = -\nabla\varphi \tag{12}$$

Dimostrazione. Basta applicare l'Eq.(10) ad un tratti di linea infinitesimi e ricordare la definizione di gradiente di una funzione scalare. $\diamondsuit$

L'inverso del corollario 2, cioè il fatto che un campo vettoriale che sia rappresentabile come gradiente di un campo scalare implichi che il campo sia conservativo, è ovvio e la corrispondente dimostrazione si lascia al lettore. In definitiva possiamo concludere che condizione necessaria e sufficiente perchè un campo vettoriale sia conservativo è che esso derivi dal gradiente di un campo scalare.

1.4 Campi Irrotazionali

Definizione 6. *Un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *differenziabile si dice irrotazionale in un dominio* Ω *quando:*

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \tag{13}$$

in ogni punto del dominio Ω*.*

È evidente che un campo conservativo differenziabile [4] è irrotazionale. Basta infatti applicare la definizione di rotore e osservare che l'integrale del campo su linee chiuse piccole a piacere è nullo. Viceversa, non è vero che un campo irrotazionale è necessariamente conservativo. Basti pensare, ad esempio, al campo magnetico nella regione esterna alla zona dove sono contenute le correnti: esso è irrotazionale ma non conservativo (infatti per linee chiuse che concatenano corrente l'integrale di linea è diverso da zero).

Per i campi irrotazionali sussiste il seguente risultato:

Teorema 4. *(Principio di deformazione del contorno). Consideriamo un campo* $\mathbf{v}$ *irrotazionale in una certa regione* Ω*. Allora*

$$\oint_{\gamma'} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = \oint_{\gamma''} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl \tag{14}$$

dove γ' *e* γ'' *sono due linee chiuse contenute in* Ω *che possono essere deformate l'una nell'altra con una trasformazione continua senza mai uscire dalla regione* Ω*.*

Dimostrazione. È facile rendersi conto che se le due linee chiuse γ' e γ'' possono essere deformate l'una nell'altra con una trasformazione continua senza mai uscire dalla regione Ω allora esiste almeno una superfice aperta $\Sigma_{\gamma'\gamma''}$ tutta contenuta in Ω

[4] supponiamo qui per semplicità, come nel caso dei campi solenoidali, che eventuali discontinuità possano essere approssimate con andamenti differenziabili. L'analisi si può comunque generalizzare al caso in cui siano presenti discontinuità introducendo le opportune condizioni di raccordo.

che abbia per orlo le due linee chiuse γ' e γ''. Se ora teniamo presente che il campo vettoriale $\mathbf{v}$ è irrotazionale in Ω si ottiene che

$$\iint_{\Sigma_{\gamma'\gamma''}} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \oint_{\gamma'} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl - \oint_{\gamma''} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = 0\,, \tag{15}$$

e quindi che gli integrali di linea di $\mathbf{v}$ estesi alle due curve chiuse γ' e γ'' coincidono. $\diamondsuit$

Dal principio di deformazione del contorno si ricava che un campo irrotazionale in un dominio a connessione lineare semplice, cioè un dominio dove ogni linea chiusa può essere ricondotta ad un punto con trasformazione continua senza mai uscire dal dominio, è ivi conservativo. Infatti l'integrale esteso ad una qualsiasi linea chiusa coincide con l'integrale esteso ad una linea chiusa infinitesima intorno ad un punto che è nullo.

L'analisi del legame tra campi irrotazionali e conservativi definiti in domini a connessione lineare multipla può essere agevolmente portata avanti sfruttando il principio di deformazione del contorno. Quest'analisi viene lasciata al lettore.

1.5 "Ortogonalità" dei campi solenoidali e conservativi

I campi solenoidali e i campi conservativi sono, dal punto di vista integrale, ortogonali. Questa affermazione è chiarita dal seguente risultato.

Teorema 5. *Consideriamo due campi vettoriali* $\mathbf{p}$ *e* $\mathbf{q}$ *definiti in tutto lo spazio* Ω_∞ *che verifichino le condizioni di normalità all'infinito*[5], *di cui il primo sia solenoidale ed il secondo conservativo. Allora sussiste il seguente risultato*

$$\iiint_{\Omega_\infty} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\, dV = 0\ . \tag{17}$$

Dimostrazione. (Nella dimostrazione si assumerà, per semplicità, che il campo solenoidale $\mathbf{p}$ sia anche differenziabile. La dimostrazione del caso generale richiederebbe un ragionamento più complesso che qui tralasciamo). Essendo $\mathbf{q}$ conservativo allora esiste un campo scalare ψ tale che $\mathbf{q} = \nabla\psi$. Tenendo presente la seguente identità,

$$\nabla \cdot (\psi\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \nabla\psi + \psi\nabla \cdot \mathbf{p}\,, \tag{18}$$

e che il campo $\mathbf{p}$ è indivergente (in quanto è solenoidale e differenziabile, come assunto per semplicità), si ottiene immediatamente, applicando il teorema della divergenza, che

$$\iiint_{\Omega_\infty} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\, dV = \iiint_{\Omega_\infty} \mathbf{p} \cdot \nabla\psi\, dV = \oint\!\!\oint_{\partial\Omega_\infty} \psi\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS \tag{19}$$

---

[5]Un campo vettoriale $\mathbf{v}$ verifica le condizioni di normalità all'infinito se

$$\lim_{r\to\infty} r^2\, \mathbf{v} < +\infty \tag{16}$$

dove r è la distanza dall'origine del sistema di riferimento dove con $\partial\Omega_\infty$ si intende una superfice di forma qualsiasi che viene fatta tendere all'infinito (ad esempio si può considerare una superfice sferica il cui raggio viene fatto tendere all'infinito). Ma se $\mathbf{p}$ verifica le condizioni di normalità all'infinito e ψ è il potenziale scalare di un campo che verifica le condizioni all'infinito (quindi tende a zero per $r \to \infty$ almeno come $1/r$) allora l'integrale di superfice in Eq.(19) tende a zero, ottenendo in questo modo la tesi. $\diamondsuit$

Osservazione. Si osservi come il principio di ortogonaliä appena illustrato è la versione, nella teoria dei campi, del teorema di Tellegen. In questa analogia il campo solenoidale $\mathbf{p}$ corrisponde all'insieme delle correnti di lato $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^b$(dove b è il numero di lati della rete) e il campo conservativo $\mathbf{q}$ all'insieme delle tensioni di lato $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^b$. Il teorema di Tellegen si può formulare come segue: se $\mathbf{i}$ soddisfa i principi di Kirchhoff alle correnti (analogo della condizione: "i flussi di $\mathbf{p}$ nulli attraverso superfici chiuse") e se $\mathbf{v}$ soddisfa i principi di Kirchhoff alle tensioni (analogo della condizione: "le circuitazioni di $\mathbf{q}$ nulle sulle linee chiuse") allora $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{i} = 0$ (l'apice T indica il trasposto).$\diamondsuit$

Osservazione. È utile anche discutere in che senso possiamo parlare in questo contesto di ortogonalità. A tal proposito indichiamo con $(L^2(\Omega_\infty))^3$ lo spazio dei campi vettoriali $\mathbf{p}$ per i quali

$$\iiint\limits_{\Omega_\infty} |\mathbf{p}|^2 \, dV \; < \; +\infty \tag{20}$$

cioè i campi con modulo quadro sommabile. Questo spazio è uno spazio di Hilbert (spazio dotato di prodotto scalare completo) rispetto al prodotto scalare

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q})_{(L^2(\Omega_\infty))^3} = \iiint\limits_{\Omega_\infty} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \, dV \, . \tag{21}$$

Una volta introdotto un prodotto scalare si può introdurre il concetto di ortogonalità: due campi vettoriali $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo. Possiamo concludere allora che in base alla discussione precedente il sottospazio dei campi solenoidali e quello dei campi conservativi sono tra loro ortogonali.$\diamondsuit$

1.6 Equazioni di campo stazionario in forma integrale: unicità della soluzione

Il principio di ortogonalià tra i campi conservativi e solenoidali è indirettamente una giustificazione del fatto che le equazioni di campo vengono generalmente espresse mediante la specificazione delle circuitazioni del campo lungo le linee chiuse e i flussi del campo (o di grandezze ad esso univocamente determinate mediante opportune relazioni costitutive) attraverso le superfici chiuse. In questo modo, il campo rimane determinato univocamente. Per essere più specifici, consideriamo i modelli di campo stazionario in cui le sorgenti del campo siano note e che quindi siano descritti dalle seguenti equazioni:

$$\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = c(\gamma) , \qquad \forall \gamma \subset \Omega_\infty \tag{22}$$

$$\oiint_\Sigma \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = f(\Sigma) , \qquad \forall \Sigma \subset \Omega_\infty \tag{23}$$

dove γ e Σ sono rispettivamente una linea ed una superfice chiusa e $c(\,\cdot\,)$ e $f(\,\cdot\,)$ due funzionali definiti sulle linee chiuse e superfice chiuse. Il campo $\mathbf{w}$ è invece una grandezza legata a $\mathbf{v}$ da una relazione costitutiva del tipo:

$$\mathbf{w}(P) = \mathcal{W}\left(P, \mathbf{v}(P)\right) \tag{24}$$

dove P è un punto generico dello spazio e $\mathcal{W}(P, \,\cdot\,)$ è una funzione (vettoriale) invertibile che descrive la relazione costitutiva del mezzo, possibilmente non omogeneo (per questo viene inclusa la dipendenza esplicita dal punto P).

Con l'ipotesi che i campi $\mathbf{v}(P)$ e $\mathbf{w}(P)$ siano normali all'infinito e con ipotesi abbastanza generali sulla funzione $\mathcal{W}(P, \,\cdot\,)$ si può mostrare che il modello (22)-(24) ha un unica soluzione. Prima di passare alla dimostrazione di questo risultato consideriamo alcuni esempi di modelli di campo del tipo (22)-(24) che ricorrono nell'elettromagnetismo.

Modello della magnetostatica.

$$\oint_\gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = I(\gamma) , \qquad \forall \gamma \subset \Omega_\infty \tag{25}$$

$$\oiint_\Sigma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0 , \qquad \forall \Sigma \subset \Omega_\infty \tag{26}$$

$$\mathbf{B}(P) = \mathcal{B}\left(P, \mathbf{H}(P)\right) \tag{27}$$

dove $I(\gamma)$ è la corrente *libera* concatenata con la linea γ e la (27) è la relazione costitutiva tra il campo magnetico $\mathbf{H}$ e il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$. Assumendo inoltre che tutte le correnti siano al finito, possiamo richiedere che i campi $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ siano normali all'infinito.$\diamondsuit$

Modello dell'elettrostatica.

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0 , \qquad \forall \gamma \subset \Omega_\infty \tag{28}$$

$$\oiint_\Sigma \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = Q(\Sigma) , \forall \Sigma \subset \Omega_\infty \tag{29}$$

$$\mathbf{D}(P) = \mathcal{D}\left(P, \mathbf{E}(P)\right) \tag{30}$$

dove $Q(\Sigma)$ è la carica *libera* contenuta nella superfice Σ e la (30) è la relazione costitutiva tra il campo elettrico $\mathbf{E}$ e il campo spostamento elettrico $\mathbf{D}$. Assumendo inoltre che tutte le cariche siano al finito, possiamo richiedere che i campi **E** e **D** siano normali all'infinito.$\diamondsuit$

Dimostriamo ora il risultato che avevamo anticipato, cioè che le equazioni (22)-(24) hanno una sola soluzione con opportune ipotesi sulla relazione costitutiva e di normalità all'infinito dei campi.

Teorema 6. *Le equazioni (22)-(24) ammettono un unica soluzione se i campi* $\mathbf{v}(P)$ *e* $\mathbf{w}(P)$ *sono normali all'infinito e la funzione invertibile* $\mathcal{W}(P,\,\cdot\,)$ *è monotona, cioè se verifica la seguente disequazione* [6]

$$(\mathcal{W}(P,\mathbf{v}_1)-\mathcal{W}(P,\mathbf{v}_2))\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\;>\;0\quad\forall\mathbf{v}_1\neq\mathbf{v}_2\,,\quad\forall P\in\Omega_\infty. \tag{31}$$

Dimostrazione. Supponiamo che le equazioni (22)-(24) ammettano due soluzioni $\mathbf{v}_1(P)$ and $\mathbf{v}_2(P)$. Siano allora $\mathbf{w}_1(P)=\mathcal{W}(P,\mathbf{v}_1)$ e $\mathbf{w}_2(P)=\mathcal{W}(P,\mathbf{v}_2(P))$. È facile rendersi conto che i campi vettoriali $\Delta\mathbf{v}(P)=\mathbf{v}_1(P)-\mathbf{v}_2(P)$, $\Delta\mathbf{w}(P)=\mathbf{w}_1(P)-\mathbf{w}_2(P)$, sono normali all'infinito e soddisfano le equazioni "omogenee associate" alle (22), (23):

$$\oint_\gamma \Delta\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl \;=\; 0\,,\qquad\forall\gamma\subset\Omega_\infty \tag{32}$$

$$\oiint_\Sigma \Delta\mathbf{w}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \;=\; 0\,,\qquad\forall\Sigma\subset\Omega_\infty. \tag{33}$$

Dalle (32), (33) si ricava che $\Delta\mathbf{v}(P)$ è un campo conservativo in Ω_∞, mentre $\Delta\mathbf{w}(P)$ è un campo solenoidale in Ω_∞ e quindi, dal teorema 5, che

$$\iiint_{\Omega_\infty}\Delta\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{w}\,dV=\iiint_{\Omega_\infty}(\mathbf{v}_1(P)-\mathbf{v}_2(P))\cdot(\mathcal{W}(P,\mathbf{v}_1)-\mathcal{W}(P,\mathbf{v}_2))\;dV=0\;. \tag{34}$$

L'integrando nella (34) è, per la monotonicità della relazione costitutiva (vedi Eq.(31)), una grandezza comunque positiva, ne consegue che l'integrale può effettivamente annullarsi solo se l'integrando è identicamente nullo. Ma questo può accadere solo quando $\mathbf{v}_1(P)=\mathbf{v}_2(P)$ identicamente, che contraddice l'ipotesi che $\mathbf{v}_1(P)$ e $\mathbf{v}_2(P)$ siano due soluzioni distinte del problema.$\diamondsuit$

Discussione. È necessario, prima di proseguire, fare alcune considerazione sul significato della condizione di monotonicità. Per capirne il significato facciamo riferimento a dei casi concreti. Consideriamo ad esempio il caso dell'elettrostatica. Che significa che la relazione costitutiva $\mathbf{D}=\mathcal{D}(P,\mathbf{E}(P))$ è monotona ? Guardiano più da vicino la disequazione corrispondente a questa proprietà: $(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)\cdot(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)>0$. Se guardiamo $(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)$ come una possibile variazione del campo **E** e $(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)$ la corrispondente variazione del campo **D**, la condizione di monotonicità impone

[6]La proprietà di monotonicità si può esprimere dicendo che il prodotto scalare $(\mathcal{W}(P,\mathbf{v}_1)-\mathcal{W}(P,\mathbf{v}_2))\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)$ è sempre positivo ed è nullo solo se $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$.

che le due variazioni formino un angolo acuto. In altri termini, impone che le variazioni di $\mathbf{E}$ e le variazioni di $\mathbf{D}$ avvengano in versi tendenzialmente concordi. Questa situazione è quello che ci si aspetta in un mezzo passivo.$\diamondsuit$

Un corollario abbastanza interessante del teorema 5 appena enunciato, è riportato di seguito

Corollario 3. *Un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *definito in tutto lo spazio, verificante le condizioni di normalità all'infinito, che sia contemporaneamente solenoidale e conservativo deve essere identicamente nullo*[7].

Dimostrazione. Basta applicare il principio di ortogonalità (17) con $\mathbf{p} = \mathbf{v}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{v}$. $\diamondsuit$

Da quest'ultimo corollario appare evidente che il principio di ortogonalità dei campi solenoidali e conservativi non sussiste in generale quando non consideriamo tutto lo spazio ma solo una sua porzione. Basti pensare al campo generato da un dipolo elettrico ideale all'esterno di una sfera di raggio arbitrario ma finito con centro nella posizione del dipolo ideale. All'esterno della sfera il campo è sia solenoidale che conservativo (verifica inoltre le condizioni di normalità all'infinito) ma è lungi dall'essere identicamente nullo. È possibile tuttavia generalizzare il principio di ortogonalità imponendo opportune condizioni al contorno sulla frontiera del dominio dove è definito il campo.

1.7 Modello della conduzione stazionaria: necessità dei campi elettromotori

Consideriamo in questa sottosezione il seguente modello dell elettromagnetismo stazionario:

Modello della conduzione stazionaria.

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0 \; , \qquad \forall \gamma \subset \Omega_\infty \tag{35}$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \; , \qquad \forall \Sigma \subset \Omega_\infty \tag{36}$$

$$\mathbf{J}(P) = \mathcal{J}\left(P, \mathbf{E}(P)\right) \tag{37}$$

dove l'ultima equazione è la relazione costitutiva tra il campo elettrico $\mathbf{E}$ e il campo densità di corrente $\mathbf{J}$. Anche in questo caso assumiamo che i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ siano normali all'infinito.

Il sistema di equazioni (35)-(37) è un caso speciale del sistema (22)-(24) e quindi, assunto che la (37) sia monotona, ha un unica soluzione. È evidente che se $\mathcal{J}(P, 0) = 0$, cioè se la relazione costitutiva è tale da dare una densità di corrente nulla per un campo elettrico stazionario nullo, allora $\mathbf{E}(P) = 0$, $\mathbf{J}(P) = 0$,

[7] Si noti l'analogia di questo risultato con quello valido per le funzioni analitiche definite in tutto il piano complesso. È noto in questo caso che le uniche funzioni che non tendono all'infinito sono le funzioni costanti e quindi le uniche che tendono a zero quelle identicamente nulle.

$\forall P \in \Omega_\infty$ (soluzione identicamente nulla) è una soluzione del problema. Segue dall'unicità che questa sarebbe l'unica soluzione. Arriviamo quindi alla conclusione che una soluzione non identicamente nulla del problema (35)-(37) è possibile solo se $\mathcal{J}(P,0) \neq 0$. Infatti, nel caso dei di conduttori Ohmici la relazione costitutiva è del tipo $\mathbf{J}(P) = \sigma(P)\,(\mathbf{E}(P) + \mathbf{E}_m)$ dove $\sigma(P)$ è la coducibilità (eventualmente non omogenea) del mezzo e $\mathbf{E}_m$ un campo elettromotore di natura non maxwelliana. La presenza di un campo elettromotore permette l'esistenza di un campo di corrente non identicamente nullo. Questa circostanza può essere ulteriormente illustrata con le seguenti osservazioni.

Dalle equazioni (35), (36), si ricava che

$$\iiint\limits_{\Omega_\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dV = 0\,. \tag{38}$$

Se $\mathbf{E}_m$ fosse zero allora si avrebbe

$$\iiint\limits_{\Omega_\infty} \eta J^2\, dV = 0\,, \tag{39}$$

che implica, a sua volta che $J = 0$ ovunque. Cioè non può esistere un vettore densità di corrente diverso da zero in presenza di conduttori ohmici sottoposti al solo campo elettrico stazionario.

Invece, nel caso in cui sia presente un campo elettromotore, $\mathbf{E}$ si può esprimere in termini di $\mathbf{J}$ come $\mathbf{E} = \eta\mathbf{J} - \mathbf{E}_m$, dove $\eta = 1/\sigma$ è la restività del mezzo, e dalla (38) si ricava che

$$\iiint\limits_{\Omega_\infty} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J}\, dV = \iiint\limits_{\Omega_\infty} \eta J^2\, dV\,, \tag{40}$$

e quindi che è possibile avere una soluzione non nulla del problema.

I risultati discussi sono abbastanza intuitivi dal punto di vista fisico se si osserva che $\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$ non è altro che la potenza per unità di carica ed unità di volume che il campo elettrico fornisce alle cariche. Da quanto si è ottenuto, questa potenza integrata su tutto lo spazio è nulla. Ma, essendo necessaria potenza diversa da zero per poter spingere le cariche in conduttori ohmici, se il campo elettrico è l'unico presente, l'unica possibilità è che la densità di corrente sia identicamente nulla. Una densità di corrente non nulla si può ottenere se affianco al campo elettrico stazionario $\mathbf{E}$ agisce un campo elettromotore $\mathbf{E}_m$ di natura non elettrostatica (per esempio generato nelle batterie) che eroga proprio la potenza dissipata per effetto joule. Infatti, l'equazione (40) può essere interpretata come conservazione delle potenze: la potenza fornita dai generatori è proprio pari alla potenza dissipata per effetto Joule.

1.8 Teorema di rappresentazione di Helmholtz

Finora abbiamo analizzato nel dettaglio due classi di campi vettoriali: quelli conservativi e quelli solenoidali. Viene da chiedersi cosa si può dire circa i campi che non siano nè conservativi nè solenoidali. A questo proposito sussiste un famoso teorema:

Teorema 7. *(Teorema di Helmholtz). Un campo vettoriale definito in tutto lo spazio Ω_∞ che sia normale all'infinito è decomponibile in un unico modo in un campo conservativo normale all'infinito e un campo solenoidale normale all'infinito.*

Dimostrazione. Consideriamo un campo generico $\mathbf{v}$ definito in Ω_∞ che verifichi le condizioni di normalità all'infinito. Di questo campo sono note le circuitazioni attraverso le linee chiuse γ e i flussi attraverso le superfici chiuse Σ:

$$\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = c_{\mathbf{v}}(\gamma)\ , \qquad \forall \gamma \subset \Omega_\infty \tag{41}$$

$$\oiint_\Sigma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = f_{\mathbf{v}}(\Sigma)\ , \qquad \forall \Sigma \subset \Omega_\infty \tag{42}$$

dove, come la solito, $c_{\mathbf{v}}(\,\cdot\,)$ e $f_{\mathbf{v}}(\,\cdot\,)$ sono due funzionali.

Consideriamo i seguenti due problemi di campo

$$\oint_\gamma \mathbf{v}_c \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = 0\ , \qquad \forall \gamma \subset \Omega_\infty \tag{43}$$

$$\oiint_\Sigma \mathbf{v}_c \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = f_{\mathbf{v}}(\Sigma)\ , \qquad \forall \Sigma \subset \Omega_\infty, \tag{44}$$

con $\mathbf{v}_c(P)$ verificante le condizioni di normalità all'infinito e

$$\oint_\gamma \mathbf{v}_s \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = c_{\mathbf{v}}(\gamma)\ , \qquad \forall \gamma \subset \Omega_\infty \tag{45}$$

$$\oiint_\Sigma \mathbf{v}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0\ , \qquad \forall \Sigma \subset \Omega_\infty, \tag{46}$$

con $\mathbf{v}_s(P)$ verificante le condizioni di normalità all'infinito.

Dal teorema 6 si ricava che i problemi di campo (43)-(44) e (45)-(46) ammettono un'unica soluzione. Inoltre dalla (43) e dalla (46) si ricava che $\mathbf{v}_c(P)$ è conservativo mentre $\mathbf{v}_s(P)$ è solenoidale. È evidente che il campo $\mathbf{v}_h(P) = \mathbf{v}_c(P)+\mathbf{v}_s(P)$ soddisfa proprio le equazioni (41)-(42) che ammettono come soluzione $\mathbf{v}$. Dall'unicità del problema (41)-(42) si ricava che non può che essere $\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}_h(P) = \mathbf{v}_c(P) + \mathbf{v}_s(P)$ e quindi la tesi del teorema.$\diamondsuit$

Osservazione. Il campo $\mathbf{v}_c$ è conservativo e quindi è esprimibile come $\mathbf{v}_c = -\nabla\phi$, il campo $\mathbf{v}_s$ è solenoidale e quindi è esprimibile come $\mathbf{v}_s = \nabla\times\mathbf{A}$. La tesi del teorema di Helmholtz si può anche esprimere sinteticamente con la seguente equazione

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \tag{47}$$

dove ϕ e $\mathbf{A}$ sono un opportuno campo scalare ed un opportuno campo vettoriale definiti in tutto lo spazio.$\diamondsuit$

Osservazione. Se non si richiede che $\mathbf{v}_c$ e $\mathbf{v}_s$ siano normali all'infinito la decomposizione di $\mathbf{v}$ in una parte conservativa $\mathbf{v}_c$ ed una solenoidale $\mathbf{v}_s$, non sarebbe unica. Basti infatti pensare che esistono campi, come quello uniforme, definiti in tutto lo spazio ed ivi conservativi e solenoidali. Allora se è data una decomposizione $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_s$ e $\mathbf{u}$ è un campo uniforme in tutto lo spazio, una seconda decomposizione è data da $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_c + \mathbf{u}) + (\mathbf{v}_s - \mathbf{u})$.$\diamondsuit$

2 Teoria del potenziale

2.1 Identità di Green

Teorema 8. *(Prima identità di Green). Consideriamo due funzioni ϕ e ψ regolari*[8]*. È valida la seguente identità*

$$\iiint_{\Omega} \phi \nabla^2 \psi \, dV = -\iiint_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, dV + \oiint_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS \,. \tag{48}$$

Dimostrazione. Consideriamo il campo vettoriale $\mathbf{v} = \phi \nabla \psi$ e la sua divergenza:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi \nabla^2 \phi \tag{49}$$

Integrando questa identità sul dominio Ω ed applicando il teorema della divergenza al primo membro, si ottiene immediatamente la (48). $\diamondsuit$

Teorema 9. *(Seconda identità di Green). Nelle stesse ipotesi della prima identità di Green, vale anche la seguente identità*

$$\iiint_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dV = \oiint_{\partial\Omega} (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) \, dS \,. \tag{50}$$

Dimostrazione. Si consideri la prima identità di Green due volte. La prima volta nella forma (48) e la seconda con i ruoli di ϕ e ψ scambiati. Sottraendo membro a membro le due identità così ottenute si ottiene la (50) $\diamondsuit$

2.2 Unicità dei problemi a valori al contorno per l'equazione di Poisson

Si consideri il seguente problema di valori al contorno per l'equazione di Poisson

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= f && \text{in} \quad \Omega && (51) \\ \phi &= g && \text{su } \partial\Omega_d && (52) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= h && \text{su } \partial\Omega_n && (53) \\ \phi & \text{ norm.} && \text{su } \partial\Omega_\infty && (54) \end{aligned}$$

[8] Col termine generico *regolari* intenderemo funzioni continue con le loro derivate prime e seconde in modo che sia lecito applicare gli operatori differenziali del primo e del secondo ordine

dove $\partial\Omega_d$, $\partial\Omega_n$ costituiscono una partizione della frontiera $\partial\Omega$ "al finito" di Ω [9] ($\partial\Omega_d \cap \partial\Omega_n = \emptyset$, $\partial\Omega_d \cup \partial\Omega_n = \partial\Omega$), f è una funzione definita in Ω mentre g, h due funzioni definite sulle porzioni di frontiera $\partial\Omega_d$ e $\partial\Omega_n$ rispettivamente. La condizione (54) ("norm." sta per normale) entra in gioco quando il dominio è illimitato e significa imporre che

$$\lim_{r\to\infty} r\phi < +\infty, \qquad \lim_{r\to\infty} r\frac{\partial\phi}{\partial r} < +\infty\,. \tag{55}$$

Domini illimitati vengono considerati quando si risolvono i cosiddetti problemi esterni, come ad esempio i casi in cui Ω è il dominio esterno ad un certo numero di superfici chiuse nello spazio.

La condizione (52), cioè l'assegnare il valore della funzione incognita sulla frontiera, viene anche detta condizione di Dirichelet. Se $\partial\Omega_n = \emptyset$, cioè se la (52) fosse imposta su tutta la frontiera il problema sarebbe un problema di Dirichlet. La condizione (53), cioè l'assegnare il valore della derivata normale della funzione incognita sulla frontiera, viene anche detta condizione di Neumann. Se $\partial\Omega_d = \emptyset$, cioè se la (53) fosse imposta su tutta la frontiera il problema sarebbe un problema di Neumann. I problemi di Dirichelet e di Neumann per l'equazione di Poisson sono casi particolari del problema ai valori al contorno (51)-(54) che possiamo definire un problema misto di Dirichelet-Neumann per l'equazione di Poisson.

Problemi ai valori al contorno del tipo (51)-(54) sorgono spesso nell'elettromagnetismo stazionario. Vale la pena allora fare alcuni esempi di problemi tipici dell'elettromagnetismo che possono essere formulati con un modello del tipo (51)-(54).

Problemi di potenziale nell'elettrostatica.

In elettrostatica il campo $\mathbf{E}$ è conservativo e quindi può essere fatto derivare da un potenziale scalare: $\mathbf{E} = -\nabla V$. Derivando $\mathbf{E}$ da un potenziale scalare l'equazione della conservatività di $\mathbf{E}$ è automaticamente soddisfatta e rimane da imporre la legge di Gauss che in forma locale si scrive come $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l$, dove ρ_l è la densità di carica libera. Ovviamente il problema si può risolvere se si specifica la relazione costitutiva tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$ che nel caso lineare, isotropo ed omogeneo si scrive come $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, dove ϵ è la costante dielettrica del mezzo. Inoltre, è necessario specificare le opportune condizioni al contorno. Ad esempio nel caso del problema elettrostatico di un insieme di conduttori (elettrodi) immersi in materiali dielettrici isolanti, le tipiche condizioni sono i valori dei potenziali sugli elettrodi. Quindi un caso tipico di problema elettrostatico è il seguente

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_l}{\epsilon} \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{56}$$

$$V = g \qquad \text{su } \partial\Omega \tag{57}$$

$$V(P) \ \text{norm.} \qquad \text{su } \partial\Omega_\infty \tag{58}$$

dove g è la funzione che specifica i valori di V sugli elettrodi.$\diamondsuit$

[9] eccetto cioè la parte all'infinito $\partial\Omega_\infty$

Problemi di conduzione stazionaria.

In conduzione stazionaria il campo $\mathbf{E}$ è conservativo e quindi può essere fatto derivare da un potenziale scalare: $\mathbf{E} = -\nabla V$. Derivando $\mathbf{E}$ da un potenziale scalare l'equazione della conservatività di $\mathbf{E}$ è automaticamente soddisfatta e rimane da imporre la legge di conservazione della carica che in condizioni stazionarie si scrive, in forma locale, come $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. La relazione costitutiva tra $\mathbf{J}$ e $\mathbf{E}$ per mezzi lineari, isotropi ed omogenei si scrive come $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ dove σ è la conducibilità del mezzo. Anche nei problemi di conduzioni stazionaria è tipica la presenza di elettrodi (zone a conducibilità molto elevata) che possono essere assunte a potenziale fissato. Su gli elettrodi vanno allora specificate opportune condizioni di Dirichlet. In questi problemi una parte della frontiera è spesso costituita dall'interfaccia tra un conduttore e un isolante. Su queste superfici la condizione al contorno è che la componente normale di $\mathbf{J}$ sia nulla. È evidente che tale condizione equivale a richiedere che la derivata normale del potenziale sia nulla e cioè imporre una condizione di Neumann. Per questo motivo un tipico problema di conduzione stazionaria può essere formulato come segue.

$$\nabla^2 V = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{59}$$

$$V = g \qquad \text{su } \partial\Omega_e \tag{60}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega_l \tag{61}$$

$$V(P) \ \text{norm.} \qquad \text{su } \partial\Omega_\infty \tag{62}$$

dove g è ancora la funzione che specifica i valori di V sugli elettrodi, $\partial\Omega_e$ la parte di frontiera costituita dagli elettrodi e $\partial\Omega_l$ la parte di frontiera costituita dalle superfici laterali dei conduttori all'interfaccia con mezzi isolanti.$\diamondsuit$

Torniamo ora al problema generale. Vogliamo studiare se l'equazioni (51)-(54) sono sufficienti a determinare univocamente la funzione ϕ. In altri termini, vogliamo studiare l'unicità del problema (51)-(54). Prima di trattare il problema dell'unicità bisognerebbe trattare il problema dell'esistenza delle soluzioni. Questo problema richiederebbe l'utilizzo di teoremi matematici abbastanza sofisticati e per questo motivo verrà tralasciato. L'esistenza, del resto, si può invocare su base fisica applicando il seguente argomento: se le condizioni (51)-(54) non sono contraddittorie dal punto di vista fisico (ad esempio in relazione ad un problema elettrostatico o magnetostatico) allora una soluzione esisterà sicuramente in quanto esiste nella realtà un campo (elettrico, magnetico, etc..) che soddisfa le leggi fisiche da cui scaturiscono le equazioni (51)-(54). Vedremo nel seguito che può verificarsi un caso di non esistenza proprio in virtù dell'incompatibilità che si può creare tra le equazioni in un caso particolare. L'importanza dell'unicità sta nel fatto che il suo verificarsi indica che le condizioni (51)-(54) sono quelle necessarie per trovare in maniera non ambigua la funzione ϕ.

Sussiste, in relazione all'unicità, il seguente teorema che si basa sulla prima identità di Green.

Teorema 10. . *Se il dominio è limitato e $\partial\Omega_d \neq \emptyset$, oppure se il dominio è illimitato* *(in questo caso $\partial\Omega_d$ può anche essere vuoto) allora il problema (51)-(54) ha un unica soluzione.*

Dimostrazione. Si assuma che il problema (51)-(54) ammetta due soluzioni $\phi_1(P)$ e $\phi_2(P)$ e si indichi la loro differenza con $\psi(P) = \phi_1(P) - \phi_2(P)$. È evidente che la funzione $\psi(P)$ soddisfa il problema "omogeneo associato" al problema (51)-(54):

$$\nabla^2\psi = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \ , \tag{63}$$

$$\psi = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega_d \ , \tag{64}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega_n \ , \tag{65}$$

$$\psi \ \text{ norm.} \qquad \text{su } \partial\Omega_\infty \ . \tag{66}$$

Si consideri ora la prima identità di Green per la funzione $\psi(P)$:

$$\iiint\limits_{\Omega} \psi\nabla^2\psi \, dV = -\iiint\limits_{\Omega} \nabla\psi \cdot \nabla\psi \, dV + \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega} \psi\frac{\partial\psi}{\partial n} \, dS + \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega_\infty} \psi\frac{\partial\psi}{\partial n} \, dS \ . \tag{67}$$

Il secondo integrale di superfice tende a zero perchè ψ è normale all'infinito, mentre il primo si può decomporre in due integrali di superfice rispettivamente estesi a $\partial\Omega_d$ e $\partial\Omega_n$,

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega} \psi\frac{\partial\psi}{\partial n} \, dS = \iint\limits_{\partial\Omega_d} \psi\frac{\partial\psi}{\partial n} \, dS + \iint\limits_{\partial\Omega_n} \psi\frac{\partial\psi}{\partial n} \, dS \ , \tag{68}$$

che sono anch'essi entrambi zero per le condizioni (64),(65). Infine, osservando che $\nabla^2\psi = 0$, dalla (67) si ricava che

$$\iiint\limits_{\Omega} |\nabla\psi|^2 \, dV = 0 \ , \tag{69}$$

che a sua volta implica $\nabla\psi = 0$. Da quest'ultima equazione si ottiene che (nell'ipotesi che il dominio sia connesso) $\psi(P)$ è una funzione identicamente costante. Tuttavia, questa costante non può che essere zero perchè, nel caso di domini illimitati ψ deve godere delle proprietà si normalità all'infinito, e nel caso di domini limitati c'è comunque una porzione di frontiera (abbiamo assunto per ipotesi che $\partial\Omega_d \neq \emptyset$) dove $\psi = 0$ e quindi qualsiasi costante diversa da zero violerebbe questa condizione.$\diamondsuit$.

Il teorema appena illustrato esclude dalle sue ipotesi il caso del problema di Neumann per domini limitati, anche detto problema di Neumann interno. La formulazione di questo problema è la seguente.

$$\nabla^2\phi = f \qquad \text{in} \quad \Omega \ , \tag{70}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = h \qquad \text{su } \partial\Omega \ . \tag{71}$$

$$\tag{72}$$

Se integriamo in Ω l'equazione (70) ed applichiamo il teorema della divergenza otteniamo immediatamente che

$$\iiint\limits_{\Omega} \nabla^2 \phi \, dV = \oiint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS \tag{73}$$

da cui si ricava che le funzione f e h nelle equazioni (70) e (71) non possono essere scelte arbitrariamente, ma devono soddisfare la seguente condizione aggiuntiva:

$$\iiint\limits_{\Omega} f \, dV = \oiint\limits_{\partial\Omega} h \, dS \, . \tag{74}$$

In altri termini se formuliamo un problema di Neumann interno, dobbiamo verificare che i "dati" del problema siano compatibili, cioè che rispettino la condizione (74).

Cosa si può dire sull'unicità del problema (70)-(71)? In effetti il ragionamento seguito nel Teorema 10 può essere ripetuto senza intoppi fino al punto in cui si è dedotto che la differenza tra due ipotetiche soluzioni del problem non può che essere una costante. L'ulteriore conclusione che questa costante non può che essere zero non è valida nel caso del problema (70)-(71). Si rimane quindi col risultato che il problema (70)-(71) ha infinite soluzioni che differiscono per una costante. Si osservi che in molti casi questo non è un problema dal punto di vista fisico in quanto la grandezza fisica misurabile è il campo che viene derivato dal potenziale ϕ mediante un gradiente ed è quindi indipendente da una costante additiva arbitraria. In altri termini, pur essendo il potenziale non individuato univocamente dallle equazioni (70)-(71), il campo ad esso associato è unico.

Osservazione. La necessità di verificare, nei problemi interni di Neumann, la condizione ausiliaria (74) ha un interpretazione fisica abbastanza intuitiva. Consideriamo il caso dell'elettrostatica in cui la funzione ϕ ha il significato di un potenziale elettrostatico. In questa situazione f è, a meno di costanti inessenziali in questa discussione, la densità di carica di volume, mentre la funzione h fissa la componente normale del campo elettrico ($\mathbf{E} = -\partial\phi/\partial n$). Ora, per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico attraverso la frontiera di Ω (cioè l'integrale di superfice della sua componente normale) deve essere pari (a meno di costanti inessenziali) alla carica totale contenuta in Ω, che sostanzialmente è fissata dall'integrale di volume della funzione f. Da questo appare evidente che f ed h devono in qualche modo essere scelti in maniera coordinata per evitare contraddizioni con la legge di Gauss.$\diamondsuit$

2.3 Proprietà del potenziale coloumbiano

Per potenziale coloumbiano (o anche newtoniano oppure gravitazionale) intendiamo la funzione $1/r$, dove r è la distanza di un punto generico dello spazio dall'origine del sistema di riferimento. Questa funzione, a parte costanti dipendenti dall'unità di misura, è il potenziale del campo elettrostatico (gravitazionale) di una carica (massa) puntiforme posta nell'origine del sistema di riferimento. Il fatto che in elettrostatica, così come nell'attrazione gravitazionale, le forze decadono con l'inverso del quadrato della distanza può essere anche espresso dicendo che il potenziale da cui derivano queste forze (che sono conservative) dipende dall'inverso della distanza. Per questo motivo lo studio del potenziale coloumbiano è uno degli argomenti classici della teoria del potenziale.

Si indichino con x_l, $l = 1, 2, 3$, le coordinate in un sistema cartesiano ortogonale. È evidente che in termini delle coordinate cartesiane x_l, r si può esprimere come

$$r^2 = \sum_{l=1}^{3} x_l^2 \,. \tag{75}$$

Derivando membro a membro la (75) per una delle variabili x_l è anche immediato ricavare che

$$\frac{\partial r}{\partial x_l} = \frac{x_l}{r} \,. \tag{76}$$

La formula (76) permette di ricavare agevolmente l'espressione delle derivate parziali del potenziale coloumbiano:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x_l} = -\frac{1}{r^2}\frac{x_l}{r} = -\frac{x_l}{r^3}\,, \tag{77}$$

e quindi l'espressione del suo gradiente

$$\nabla\frac{1}{r} = \sum_{l=1}^{3} \hat{\mathbf{e}}_l \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r} = -\frac{\hat{\mathbf{e}}_1 x_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 x_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 x_3}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{78}$$

dove con $\hat{\mathbf{e}}_l$ il versore dell'asse x_l e con $\hat{\mathbf{r}}$ il versore nella direzione radiale. Si osservi che, nonostante sia stato utilizzato un sistema di coordinate particolari (cartesiane), il risultato finale della formula (78) è espresso in maniera vettoriale (intrinseca) e quindi indipendente dal sistema di coordinate scelto.

Grazie alla formula (77) si possono ricavare le derivate parziali del potenziale coloumbiano di qualsiasi ordine. Di particolare interesse per quello che segue sono le derivate parziali del secondo ordine che sono date dalla seguente formula:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_l}\frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x_h}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{x_l}{r^3} = -\frac{\delta_{hl}}{r^3} - x_l\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{1}{r^3} = \\ &= -\frac{\delta_{hl}}{r^3} - x_l\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\right)\frac{\partial r}{\partial x_h} = \frac{3x_l x_h - r^2\delta_{hl}}{r^5}\end{aligned} \tag{79}$$

dove δ_{hl} indica il simbolo di Kronecker[10] .

Dalla formula (79) segue immediatamente il seguente risultato.

Proposizione 1. *($1/r$ è una funzione armonica in $\Omega_\infty - \{0\}$). La funzione $1/r$ soddisfa la seguente equazione*

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0 \qquad \forall r \neq 0\,. \tag{80}$$

Dimostrazione. Dalla (79) (valida per $r \neq 0$) si ricava immediatamente che

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \frac{1}{r} = 0\,. \qquad \diamondsuit \tag{81}$$

Rimane da studiare qual'è il comportamento di $1/r$ nell'origine. A tal scopo è utile sottolineare la seguente circostanza.

Teorema 11. *Sussiste la seguente eguaglianza*

$$\oiint_{\Sigma} \nabla \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \begin{cases} -4\pi & \textit{se } \Sigma \textit{ contiene l'origine,} \\ 0 & \textit{se } \Sigma \textit{ non contiene l'origine} \end{cases} \tag{82}$$

dove Σ è una qualsiasi superfice chiusa.

Dimostrazione. Si consideri il flusso di $\nabla(1/r)$ attraverso una superfice sferica $\Sigma(R, O)$ di raggio R e centro nell'origine O. Utilizzando l'espressione (78), e osservando che nel caso della sfera la normale è diretta nella direzione radiale $\hat{\mathbf{r}}$, si ricava facilmente che

$$\oiint_{\Sigma(R,O)} \nabla \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -\frac{1}{R^2} \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = -4\pi \tag{83}$$

Consideriamo ora una superfice chiusa Σ che contenga l'origine. Si osservi che il campo $\mathbf{q} = \nabla(1/r)$ di cui si fa il flusso nell'eguaglianza (82) è un campo indivergente nel dominio $\Omega_\infty - \{0\}$. Per rendersi conto di questo basta osservare che $\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla^2(1/r)$ ed applicare la (81). Poichè per i campi indivergenti vale il principio di deformazione della superfice e poichè Σ si può sempre trasformare in $\Sigma(R, O)$ con una trasformazione continua senza toccare l'origine, il flusso di $\mathbf{q} = \nabla(1/r)$ attraverso Σ e $\Sigma(R, O)$ coincidono.

Passiamo ora alla seconda parte della dimostrazione, cioè il caso in cui Σ non contiene l'origine. In questo caso, si può applicare il seguente risultato valido per le funzioni armoniche

Teorema 12. *Se ϕ è una funzione armonica in tutti i punti del dominio Ω allora*

$$\oiint_{\partial\Omega} \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oiint_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = 0 \tag{84}$$

[10] $\delta_{hl} = 1$ per $h = l$, $\delta_{hl} = 0$ per $h \neq l$

che deriva dalla prima identità di Green applicata nel dominio Ω con $\psi = 1$ identicamente e $\nabla^2\phi = 0$.

Grazie a questo teorema è facile ricavare che il flusso di $\nabla(1/r)$ attraverso una superfice chiusa che non contenga l'origine è zero in quanto $1/r$ è, in questo caso, armonica in *tutti* i punti del dominio delimitato dalla superfice.$\diamondsuit$

I risultati appena ottenuti si possono generalizzare al caso in cui la sorgente (cariche o masse) puntiforme di cui si considera il potenziale non è concentrata nell'origine ma in un generico punto della spazio Q. Siano infatti x_l e x'_l ($l = 1, 2, 3$), le coordinate di un sistema cartesiano ortogonale, del punto P e del punto Q, rispettivamente. Definiamo la distanza r_{PQ} dalla seguente identità

$$r_{PQ}^2 = |P - Q|^2 = \sum_{l=1}^{3}(x_l - x'_l)^2 \ . \tag{85}$$

Si osservi che r_{PQ} può essere vista come una funzione dei due punti P e Q. Seguendo un ragionamento analogo a quello seguito per $1/r$, si ottengono facilmente le identità

$$\nabla_P\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{e}}_{PQ}}{r_{PQ}^2} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{QP}}{r_{PQ}^2} \tag{86}$$

$$\nabla_Q\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{e}}_{QP}}{r_{PQ}^2} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{PQ}}{r_{PQ}^2} \tag{87}$$

$$\nabla_P^2\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) = 0 \qquad \forall P \neq Q \tag{88}$$

$$\nabla_Q^2\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) = 0 \qquad \forall P \neq Q \,. \tag{89}$$

dove con con la notazione ∇_M si indica che l'operatore differenziale agisce rispetto al punto M e con $\hat{\mathbf{e}}_{PQ}$ si è indicato il versore del segmento che congiunge Q con P, orientato nel verso che va da Q verso P.

In relazione al potenziale coloumbiano "centrato" in Q sussiste l'analogo del teorema 11:

Teorema 13. *Sussiste la seguente eguaglianza*

$$\oint\!\!\!\!\iint_{\Sigma} \nabla_P\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_P \, dS_P = \begin{cases} -4\pi & se\ Q \in \Omega_\Sigma, \\ 0 & se\ Q \in \Omega_\infty - \Omega_\Sigma \end{cases} \tag{90}$$

dove Ω_Σ *è il dominio racchiuso dalla superfice chiusa* Σ.

La dimostrazione di questo risultato viene lasciata al lettore in quanto immediatamente ricavabile dal Teorema 11.

A questo punto è abbastanza immediato generalizzare i risultati ottenuti al caso in cui il potenziale sia una sovrapposizione di potenziali coloumbiani. Consideriamo allora la funzione potenziale

$$\phi(P) = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_s}{r_{PQ_s}} \tag{91}$$

dove le a_s, $s = 1, \ldots, n$ sono le intensità di n sorgenti puntiformi poste nei punti Q_s. Si osservi come il potenziali $\phi(P)$ sia armonico ($\nabla^2\phi = 0$) nella regione $\Omega_\infty - \{Q_1, \ldots, Q_n\}$.

Applicando il Teorema 13 al potenziale (91) si ottiene facilmente il seguente ulteriore risultato:

Teorema 14. *(Teorema di Gauss per distribuzione di sorgenti puntiformi). Sussiste la seguente eguaglianza*

$$\phi(P) = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_s}{r_{PQ_s}} \quad \Longrightarrow \quad \oiint_{\Sigma} \nabla_P \phi(P) \cdot \hat{\mathbf{n}}_P \, dS_P = -4\pi \sum_{s=1}^{n} a_s \, \chi(\Omega_\Sigma, Q_s) \tag{92}$$

dove con $\chi(\Omega_\Sigma, Q)$ si è indicata la funzione caratteristica del dominio Ω_Σ, cioè la funzione che assume valore 1 *per $Q \in \Omega_\Sigma$ e* 0 *altrimenti. Con l'uso della funzione χ la sommatoria è nei fatti estesa solo ai valori di s corrispondenti a punti Q_s inclusi dalla superfice chiusa Σ.* [11]

Assieme alle distribuzioni di sorgenti puntiformi appaiono sovente nelle applicazioni le distribuzioni continue di sorgenti. Questo accade perchè le sorgenti puntiformi sono la rappresentazione matematica di particelle molto piccole, (come protoni, elettroni o molecole), e in pezzi di materia di dimensioni ordinarie ce ne sono cosi tante di queste particelle elementari che sarebbe poco agevole trattare le interazioni elettriche o gravitazionali mediante delle somme del tipo (91).

Consideriamo allora il potenziale generato da una distribuzione continua:

$$\phi(P) = \iiint_{\Omega_\infty} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} \, dV_Q \ , \tag{93}$$

dove ρ è una funzione continua e limitata del suo argomento. Si osservi come la (93) non è che una generalizzazione nel continuo della (91). Si osservi inoltre come l'integrando nella (93) è singolare nel punto P, tuttavia la singolarità e del primo ordine ed è quindi sommabile.

Il Teorema (92) si può generalizzare ai potenziali del tipo (93) infatti sussiste il teorema.

Teorema 15. *(Teorema di Gauss per distribuzione continue di sorgenti). Se ϕ è dato dalla (93), sussiste la seguente eguaglianza*

$$\oiint_{\Sigma} \nabla_P \phi(P) \cdot \hat{\mathbf{n}}_P \, dS_P = -4\pi \iiint_{\Omega_\infty} \rho(Q) \, \chi(\Omega_\Sigma, Q) \, dV_Q = -4\pi \iiint_{\Omega_\Sigma} \rho(Q) dV_Q \tag{94}$$

dove con $\chi(\Omega_\Sigma, Q)$ si è indicata la funzione caratteristica del dominio Ω_Σ, e come al solito con Ω_Σ il dominio incluso da Σ.

[11] Per semplicità si è assunto implicitamente che non ci sono punti Q_s appartenenti alla superfice Σ stessa. Il caso in cui ci siano punti appartenenti alla superfice può essere trattato opportunamente ma qui, per brevità, non verrà considerato.

Dimostrazione. Il gradiente di ϕ si può calcolare portando il segno di gradiente sotto il segno di integrale nella (93):

$$\nabla_P \phi(P) = \iiint\limits_{\Omega_\infty} \nabla_P \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} \, dV_Q = \iiint\limits_{\Omega_\infty} \rho(Q) \nabla_P \frac{1}{r_{PQ}} \, dV_Q \tag{95}$$

Questa fatto andrebbe dimostrato in quanto gli integrali coinvolgono funzioni singolari. La cosa può essere dimostrata abbastanza agevolmente ma qui per brevità non riportiamo i dettagli. Basti però osservare che, anche dopo il passaggio del gradiente sotto il segno di integrale, l'integrale rimane sommabile in quanto la singolarità è del secondo ordine. Grazie a questa circostanza, con opportuni processi al limite, si può mostrare la validità della (95).

Consideriamo ora il flusso del $\nabla\phi$ uscente da una superfice chiusa generica Σ. Per fare questo integriamo ambo i membri della (95) e scambiamo i segni di integrale di volume e di flusso:

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \left(\iiint\limits_{\Omega_\infty} \nabla_P \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} \, dV_Q \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_P \, dS_P = \iiint\limits_{\Omega_\infty} \left(\rho(Q) \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \nabla_P \frac{1}{r_{PQ}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_P \, dS_P \right) dV_Q \, . \tag{96}$$

Il flusso nell'ultimo integrale si può calcolare in base al teorema di Gauss e fornisce

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \nabla_P \frac{1}{r_{PQ}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_P \, dS_P = -4\pi \, \chi(\Omega_\Sigma, Q) \, , \tag{97}$$

che sostituita nella (96) ci permette di ottenere la tesi del teorema.$\diamondsuit$

Dal Teorema 94 si ricava anche il seguente importante risultato:

Teorema 16. *(Laplaciano del potenziale generato da sorgenti continue). Se ϕ è dato dalla (93), allora il suo laplaciano è dato da*

$$\nabla_P^2 \phi(P) = -4\pi \, \rho(P) \, . \tag{98}$$

Dimostrazione. Si dividano ambo i membri dell'identità (94) per il volume Ω_Σ e si passi al limite per $\Omega_\Sigma \to 0$ intorno ad un punto assegnato della spazio:

$$\lim_{\Omega_\Sigma \to 0} \frac{1}{\Omega_\Sigma} \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \nabla_P \phi(P) \cdot \hat{\mathbf{n}}_P \, dS_P = \lim_{\Omega_\Sigma \to 0} \frac{-4\pi}{\Omega_\Sigma} \iiint\limits_{\Omega_\Sigma} \rho(Q) dV_Q \tag{99}$$

Tenendo presente la definizione di divergenza si ottiene agevolmente la tesi.$\diamondsuit$

È interessante osservare che, data la (98), il potenziale (93) è soluzione dell'equazione di Poisson con termine noto $f = -4\pi\rho$ in tutto lo spazio. Se inoltre si assume che la ρ sia a supporto limitato (come accade tipicamente) è facile rendersi conto che ϕ gode delle proprietà di normalità all'infinito. Per quanto detto, il potenziale (93) è soluzione del problema

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \qquad \text{in} \quad \Omega_\infty \tag{100}$$

$$\phi \ \text{norm.} \qquad \text{su } \partial\Omega_\infty \tag{101}$$

che, come sappiamo dal Teorema (10), è unica.

2.4 Delta di Dirac e laplaciano del potenziale couloumbiano

Bisogna notare che, nel caso di sorgenti puntiformi, il laplaciano del potenziale è nullo ovunque tranne nei punti dove sono le sorgenti, ma in quei punti non è definito. Viceversa, nel caso di distribuzioni continue di sorgenti, il laplaciano è definito ovunque ed proprio pari a -4π per il valore locale della funzione di distribuzione ρ. Ci si può chiedere se è possibile definire in una maniera auto-consistente, il laplaciano ovunque anche quando siano presenti sorgenti puntiformi. Questo può essere ottenuto se si riguardano le sorgenti puntiformi come risultato di un processo a limite di opportune distribuzioni continue. Un modo per eseguire questo processo è quello di considerare la successione di funzioni continue e positive $\rho_n(P,Q)$ definita dalle due condizioni:

$$\rho_n(P,Q) = 0 \qquad \text{per } |P-Q| \geq \frac{1}{n}\,, \tag{102}$$

$$\iiint\limits_{\Omega_\infty} \rho_n(P,Q)\, dV_P = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{103}$$

Queste condizioni richiedono che il supporto delle $\rho_n(P,Q)$ sia contenuto in una sfera il cui raggio decresce inversamente ad n, mentre l'integrale delle $\rho_n(P,Q)$ rimane pari ad uno. Questo si può ottenere solo se l'intesità della ρ_n all'interno del supporto cresce mediamente come n^3. È facile rendersi conto che questo processo al limite non porta a nessuna funzione ordinaria del punto ma ad una funzione generalizzata (distribuzione) chiamata Delta di Dirac. L'introduzione della Delta di Dirac si basa sulla seguente osservazione. Il limite per $n \to \infty$ di $\rho_n(P,Q)$ non tende ad una funzione ordinaria mentre il limite della grandezza

$$\iiint\limits_{\Omega_\infty} \rho_n(P,Q)\psi(P)\, dV_P \;=\; \iiint\limits_{S(1/n,Q)} \rho_n(P,Q)\psi(P)\, dV_P \tag{104}$$

dove ψ è una qualsiasi funzione regolare e $S(1/n,Q)$ è la sfera di raggio $1/n$ e centro Q, é ben definito. Infatti applicando il secondo teorema della media si ottiene

$$\iiint\limits_{S(1/n,Q)} \rho_n(P,Q)\psi(P)\, dV_P \;=\psi(\xi_n) \iiint\limits_{S(1/n,Q)} \rho_n(P,Q) dV_P \;=\psi(\xi_n) \tag{105}$$

dove ξ_n è un punto (vattelopesca) contenuto nella sfera $S(1/n,Q)$. Quando $n \to \infty$ la sfera si riduce al punto Q e dalla (105) si ricava che

$$\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{\Omega_\infty} \rho_n(P,Q)\psi(P)\, dV_P \;=\psi(Q) \tag{106}$$

A questo punto si può introdurre la Delta di Dirac come quella funzione (generalizzata) che soddisfa le seguenti condizioni.

$$\delta(P-Q) = 0 \qquad \text{per } P \neq Q\,, \tag{107}$$

$$\iiint\limits_{\Omega_\infty} \delta(P-Q)\psi(P)\, dV_P = \psi(Q) \qquad \forall\psi \;\; \text{regolare.} \tag{108}$$

L'integrale nell'ultima equazione non va inteso nel senso ordinario (cioè come un integrale di Lesbegue o di Riemann) bensì come limite degli integrali di Lesbegue (106). Insomma, quando si scrive la Delta di Dirac bisogna sempre pensare ad una funzione definita come un opportuno limite di funzioni continue. Si osservi che nel caso in cui la funzione $\psi(Q)$ venisse scelta costante in un intorno di Q e pari all'unità si otterrebbe

$$\iiint\limits_{\Omega_\infty} \delta(P-Q)\, dV = 1 \tag{109}$$

che viene spesso riportata sui testi di fisica quando si definisce la Delta.

Consideriamo ora il potenziale coloumbiano associato alle distribuzioni continue della successione $\rho_n(P,Q)$ che abbiamo definito nelle (102)-(103).

$$\phi_n(P,Q) = \iiint\limits_{\Omega_\infty} \frac{\rho_n(M,Q)}{r_{PM}}\, dV_M \tag{110}$$

È facile verificare che, come ci aspettiamo, se facciamo tendere n all'infinito, con $P \neq Q$, si ottiene proprio che

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(P,Q) = \frac{1}{r_{PQ}}\ . \tag{111}$$

Allora, possiamo definire, almeno formalmente, il laplaciano di $1/r_{PQ}$ come il limite dei laplaciani dei potenziali $\phi_n(P)$, scambiando i segni di limite e di laplaciano:

$$\nabla^2_P \left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) = \lim_{n\to\infty} \nabla^2_P \phi_n(P,Q) = -4\pi \lim_{n\to\infty} \rho_n(P,Q) = -4\pi\delta(P-Q)\,. \tag{112}$$

Questa procedura formale si può rendere completamente rigorosa nell'ambito della teoria delle funzioni generalizzate (distribuzioni)[12].

2.5 Generalizzazione delle identità di Green e terza identità

È interessante a questo punto considerare l'importante generalizzazione delle identità di Green (8), (17) al caso in cui le funzioni coinvolte possano avere laplaciani impulsivi, ovvero funzioni con singolarità del tipo $1/r$. Supponiamo per semplicità che una delle due funzioni coinvolte, la ϕ, sia un potenziale coloumbiano di una sorgente puntiforme concentrata in P:

$$\phi(M) = 1/r_{MP}\,. \tag{113}$$

Sia invece ψ una qualsiasi funzione regolare del punto. Sussiste il seguente risultato, noto anche come terza identità di Green

[12]Il primo passaggio fatto nelle (112) è basato sullo scambio tra il limite e il laplaciano che può essere sempre eseguito quando si consideri la derivata nel senso delle distribuzioni.

Teorema 17. *(Terza identità di Green). Sia ϕ una funzione regolare nel dominio Ω allora sussiste la seguente la seguente identità*

$$
\begin{aligned}
&4\pi\psi(P) + \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r_{PQ}} \nabla_Q^2 \psi(Q)\, dV_Q = \\
&\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial\psi(Q)}{\partial n_Q} - \psi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right) \right] dS_Q
\end{aligned}
\tag{114}
$$

Dimostrazione. Si consideri la successione di funzioni (regolari)

$$
\rho_n(M,P) = 0 \qquad \text{per } |M-P| \geq \frac{1}{n}\,, \tag{115}
$$

$$
\iiint\limits_{\Omega_\infty} \rho_n(M,P)\, dV_M = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \tag{116}
$$

e i potenziali coloumbiani ad esse associati

$$
\phi_n(Q,P) = \iiint\limits_{\Omega_\infty} \frac{\rho_n(M,P)}{r_{QM}}\, dV_M\,. \tag{117}
$$

Le funzioni $\phi_n(Q,P)$ sono funzioni regolari e quindi si possono sostituire nella seconda identità di Green. Applicando infatti la seconda identità di Green per la coppia di funzioni $\phi_n(Q,P)$ e $\psi(Q)$ si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega} (\phi_n(Q,P)\nabla_Q^2\psi(Q) - \psi(Q)\nabla_Q^2\phi_n(Q,P))\, dV = \\
&\qquad \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega} (\phi_n(Q,P)\frac{\partial\psi(Q)}{\partial n_Q} - \psi(Q)\frac{\partial\phi_n(Q,P)}{\partial n_Q})\, dS\,.
\end{aligned}
\tag{118}
$$

Passando poi al limite per $n \to \infty$ e sfruttando il fatto che $\nabla_Q^2\phi_n(Q,P) = -4\pi\rho_n(Q,P)$ si ottiene facilmente la tesi. $\diamondsuit$

Si osservi che la terza identità di Green (114) si può formalmente ottenere se si sostituisce la (112) e si applica la proprietà del campionamento della delta senza curarsi dei problemi di regolarità. Questa è una regola generale che può essere applicata a tutti i casi in cui ci sono funzioni che abbiano una singolarità (o più singolarità del tipo $1/r$) e quindi un laplaciano impulsivo.

2.6 Funzione di Green per l'equazione di Poisson

Definizione 7. *Una funzione $G(P,Q)$, funzione della coppia di punti $P,Q \in \Omega$, si dice funzione di Green per l'equazione di Poisson nel dominio Ω, se soddisfa un sistema di equazioni del seguente tipo*

$$\nabla_Q^2 G(P,Q) = -4\pi\delta(P-Q) \qquad \forall P,Q \in \Omega\,, \tag{119}$$

$$G(P,Q) = 0 \qquad \forall Q \in \partial\Omega_d \ \forall P \in \Omega\,, \tag{120}$$

$$\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q} = 0 \qquad \forall Q \in \partial\Omega_n \ \forall P \in \Omega\,, \tag{121}$$

$$G(P,Q) \ \textit{norm.} \qquad \textit{su } \partial\Omega_\infty \tag{122}$$

dove $\partial\Omega_d$, $\partial\Omega_n$ costituiscono una partizione della frontiera $\partial\Omega$ "al finito" di Ω [13] *($\partial\Omega_d \cap \partial\Omega_n = \emptyset$, $\partial\Omega_d \cup \partial\Omega_n = \partial\Omega$) e si assume inoltre che nel caso di domini illimitati $\partial\Omega_d \neq \emptyset$.*

La condizione (122) entra in gioco quando il dominio è illimitato e significa imporre che

$$\lim_{r_Q \to \infty} r_Q\, G(P,Q) < +\infty, \qquad \lim_{r \to \infty} r_Q \frac{\partial G(P,Q)}{\partial r_Q} < +\infty\ , \tag{123}$$

che non sono altro che le condizioni (55) applicate a $G(P,Q)$.

Si osservi, in primo luogo, che il problema (119)-(122) un'unica soluzione:

Teorema 18. *Il problema ai valori al contorno (119)-(122) ha un unica soluzione.*

Dimostrazione. Si ponga che la funzione incognita $G(P,Q)$ sia data da

$$G(P,Q) = \frac{1}{r_{PQ}} + F(P,Q) \qquad \forall P,Q \in \Omega\,, \tag{124}$$

dove $F(P,Q)$ è un altra funzione la cui determinazione equivale alla determinazione della $G(P,Q)$. Si osservi che, se la $G(P,Q)$ deve soddisfare le (119)-(122) allora la $F(P,Q)$ deve soddisfare il seguente problema ai valori al contorno per l'equazione di Laplace

$$\nabla_Q^2 F(P,Q) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{125}$$

$$F(P,Q) = -\frac{1}{r_{PQ}} \qquad \forall Q \in \partial\Omega_d \tag{126}$$

$$\frac{\partial F(P,Q)}{\partial n_Q} = -\frac{\partial}{\partial n_Q}\frac{1}{r_{PQ}} \qquad \forall Q \in \partial\Omega_n \tag{127}$$

$$F(P,Q) \quad \textit{normale} \qquad \text{su } \partial\Omega_\infty \tag{128}$$

che ammette un'unica soluzione (si osservi che nel caso di domini limitati $\partial\Omega_d \neq \emptyset$) per il Teorema 10 .$\diamondsuit$

[13] eccetto cioè la parte all'infinito $\partial\Omega_\infty$

Si osservi inoltre che tra tutte le possibilità contemplate dalla Definizione 7 è esclusa quella in cui, il dominio Ω sia limitato e $\partial\Omega_n = \partial\Omega$, cioè il caso in cui si consideri una funzione di Green per domini limitati con le sole condizioni di Neumann. Questo caso va trattato a parte a causa di alcune difficoltà che sorgono nel caso di condizioni di Neumann pure che in parte abbiamo già discusso in relazione al problema (70)-(71).

Ritorniamo ora alla Definizione 7. Sussiste il seguente teorema

Teorema 19. . *(Reciprocità della funzione di Green). Le funzioni di Green definite dalle equazioni (119)-(122) soddisfano la seguente condizione di reciprocità*

$$G(P,Q) = G(Q,P) \qquad \forall P,Q \in \Omega\ . \tag{129}$$

Dimostrazione. Si considerino le due soluzioni del problema (119)-(122), $G(P_1,Q)$ e $G(P_2,Q)$, corrispondenti ai due punti $P = P_1$ e $P = P_2$. Dalla seconda identità di Green applicata alle due funzioni $\phi(Q) = G(P_1,Q)$ e $\psi(Q) = G(P_2,Q)$, dalla proprietà del campionamento della Delta, e dal fatto che l'eventuale contributo di integrali estesi a $\partial\Omega_\infty$ è infinitesimo (per le condizioni di normalità all'infinito), si ottiene:

$$\begin{aligned} &-4\pi\left(G(P_1,P_2) - G(P_2,P_1)\right) = \\ &= \oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega} \left(G(P_1,Q)\frac{\partial G(P_2,Q)}{\partial n_Q} - G(P_2,Q)\frac{\partial G(P_1,Q)}{\partial n_Q}\right) dS_Q\,. \end{aligned} \tag{130}$$

È facile rendersi conto che, in base alle (120), (121), gli integrali di superfice nella (130) sono nulli e quindi, data l'arbitrarietà dei punti P_1 e P_2, si ottiene la tesi.$\diamondsuit$

Una della applicazioni principali della funzione di Green è quella di fornire uno strumento per la risoluzione dei problemi di valori al contorno del tipo (51)-(54) che abbiamo trattato in precedenza. La scelta delle zone di frontiera $\partial\Omega_d$ e $\partial\Omega_n$ su cui imporre condizioni di Dirichlet e Neumann omogenee per la funzione di Green può essere fatta in questo contesto in maniera "coordinata" col problema di Dirichelet-Neumann che vogliamo risolvere. Supponiamo infatti di voler risolvere il problema (51)-(54) che riportiamo qui per comodità:

$$\nabla^2\phi = f \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{131}$$
$$\phi = g \qquad \text{su } \partial\Omega_d \tag{132}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = h \qquad \text{su } \partial\Omega_n \tag{133}$$
$$\phi \ \text{ norm.} \qquad \text{su } \partial\Omega_\infty \tag{134}$$

dove, come già detto in precedenza, $\partial\Omega_d$, $\partial\Omega_n$ costituiscono una partizione della frontiera $\partial\Omega$ "al finito" di Ω [14] ($\partial\Omega_d \cap \partial\Omega_n = \emptyset$, $\partial\Omega_d \cup \partial\Omega_n = \partial\Omega$), f è una funzione definita in Ω mentre g, h due funzioni definite sulle porzioni di frontiera $\partial\Omega_d$ e $\partial\Omega_n$ rispettivamente.

[14] eccetto cioè la parte all'infinito $\partial\Omega_\infty$

La soluzione di questo problema si può formalmente ricavare da una funzione di Green, data dalle equazioni (119)-(122) dove la partizioni della frontiera scelta nel problema (119)-(122) è la stessa di quella del problema (131)-(134).

Supposto che sia nota la funzione di Green data dal problema (119)-(122), la soluzione del problema (131)-(134) può essere trovata a partire dai dati del problema, f, g ed h, e dalla $G(P,Q)$. Per mostrare questo applichiamo la seconda indentità di Green alla coppia di funzioni $\phi(Q)$ e $\psi(Q) = G(P,Q)$. Utilizzando la (119), la proprietà del campionamento della Delta di Dirac, e il fatto che sia la $G(P,Q)$ che la $\phi(Q)$ sono normali all'infinito (il che rende infinitesimi gli integrali di superfice estesi a $\partial\Omega_\infty$), si ottiene facilmente che

$$\begin{aligned} \phi(P) = &-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(P,Q)\nabla_Q^2\phi(Q)\,dV_Q + \\ &-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}\left(\phi(Q)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q} - G(P,Q)\frac{\partial\phi(Q)}{\partial n_Q}\right)dS_Q\,. \end{aligned} \tag{135}$$

Se ora sostituiamo in quest'ultima equazione le (120)-(121) e teniamo in conto le (132)-(133), possiamo ricavare il valore della funzione incognita ϕ del problema (131)-(134) in ogni punto del dominio Ω mediante l'equazione

$$\begin{aligned} \phi(P) = &-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(P,Q)f(Q)\,dV_Q + \\ &-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega_d} g(Q)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}\,dS_Q \;-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega_n} h(Q)G(P,Q)\,dS_Q\,. \end{aligned} \tag{136}$$

Questa equazione, come anticipato, esprime la funzione potenziale ϕ in funzione dei "dati" del problema (131)-(134) e della funzione di Green $G(P,Q)$.

Osservazione. È interessante tracciare un'analogia tra la funzione di Green e una funzione introdotta nella teoria dei circuiti che ha un ruolo analogo: la risposta all'impulso. Queste due funzioni, nei loro rispettivi contesti, sono le risposte di certe variabili all'applicazione di impulsi su altre. In questo senso, l'eq.(136) può essere vista come l'analogo dell'integrale di convoluzione. Infatti, dalla conoscenza della funzione di Green nella teoria del potenziale, così come da quella della risposta all'impulso nella teoria dei circuiti, si possono ricavare le risposte a "ingressi" arbitrari. Prima di chiudere questa nota vale la pena di sottolineare anche le importanti differenze tra le due funzioni. La funzione di Green è una risposta alla Delta di Dirac nell'ambito di equazioni a derivate parziali e serve alla risoluzione di problemi di valori al contorno. La risposta all'impulso è una risposta alla Delta di Dirac nell'ambito di equazioni derivate ordinarie e serve alla risoluzioni di problemi ai valori iniziali (problemi di Cauchy). Il ruolo che nei circuiti hanno le condizioni iniziali, qui lo prendono le condizioni al contorno.$\diamondsuit$

Prima di chiudere questa sezione sulla funzione di Green dobbiamo discutere il caso in cui si voglia risolvere il problema del tipo Neumann puro in un dominio limitato (cfr. equazioni (70)-(71)), che riportiamo di seguito per comodità.

$$\nabla^2\phi = f \qquad in\ \Omega \tag{137}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = h \qquad su\ \partial\Omega \tag{138}$$

Ricordiamo che questo problema ammette soluzioni solo quando

$$\iiint_\Omega f\,dV = \oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega} h\,dS\,. \tag{139}$$

Si potrebbe pensare che, per ripetere il ragionamento fatto prima, la funzione di Green da utilizzare sia quella data dal problema:

$$\nabla_Q^2 G(P,Q) = -4\pi\delta(P-Q) \qquad \forall P,Q\in\Omega\,, \tag{140}$$

$$\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q} = 0 \quad \forall Q\in\partial\Omega \qquad \forall P\in\Omega\,. \tag{141}$$

Ma questo ragionamento sarebbe sbagliato perchè il problema (140)-(141) non ammette soluzioni in quanto, come problema di Neumann non verifica proprio la condizione ausiliaria del tipo (139). È facile infatti rendersi conto che l'integrale esteso a Ω del termine noto dell'equazione (140) è pari a -4π mentre l'integrale di superfice esteso a $\partial\Omega$ di $\partial G(P,Q)/\partial n_Q$ è nullo. In sostanza se si vuole considerare una funzione di Green in domini limitati che soddisfi solo condizioni di Neumann, queste condizioni non possono essere omogenee.

Una modo per risolvere questo problema è quello di considerare una condizione di Neumann pari ad una costante diversa da zero. In questo caso la costante deve essere compatibile col fatto che l'integrale di superfice di $\partial G(P,Q)/\partial n_Q$ deve essere pari a -4π. Questa condizione si può soddisfare imponendo che la costante sia semplicemente pari a $-4\pi/S$ dove S è l'area della superfice di $\partial\Omega$. Per quanto detto possiamo scegliere, come funzione di Green del problema di Neumann interno una delle funzioni $G_n(P,Q)$ che soddisfa il seguente problema di valori al contorno

$$\nabla_Q^2 G_n(P,Q) = -4\pi\delta(P-Q) \qquad \forall P,Q\in\Omega\,, \tag{142}$$

$$\frac{\partial G_n(P,Q)}{\partial n_Q} = \frac{-4\pi}{S} \quad \forall Q\in\partial\Omega \qquad \forall P\in\Omega\,. \tag{143}$$

Se ora applichiamo la seconda identià di Green alle funzioni $\phi(Q)$, soluzione del problema (137)-(138), e $\psi(Q) = G_n(P,Q)$, soluzione del problema (142) (143), si ottiene, con passaggi analoghi a quelli che hanno portato alla (136):

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi}\left(\iiint_\Omega G(P,Q)f(Q)\,dV_Q + \frac{1}{S}\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}\phi(Q)\,dS_Q + \oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega} h(Q)G(P,Q)\,dS_Q\right)\,. \tag{144}$$

Il primo tra i due integrali di superfice non è altro che il valore medio della funzione ϕ sulla frontiera del dominio. Se si vuole usare l'equazione (144) per risolvere il problema (137)-(138) allora questo valore medio non è noto a priori in quanto ϕ è un incognita. Tuttavia, come sappiamo dalla teoria dei problemi di Neumann, le equazioni (137)-(138) determinano la funzione ϕ a meno di una costante arbitraria quindi nell'equazione (144) l'integrale di superfice incognito può essere visto proprio come una costante arbitraria.