

CINEMATICA

- relazioni tra posizioni dei giunti e posizione e orientamento dell'organo terminale

Matrice di rotazione

Rappresentazioni dell'orientamento

Trasformazioni omogenee

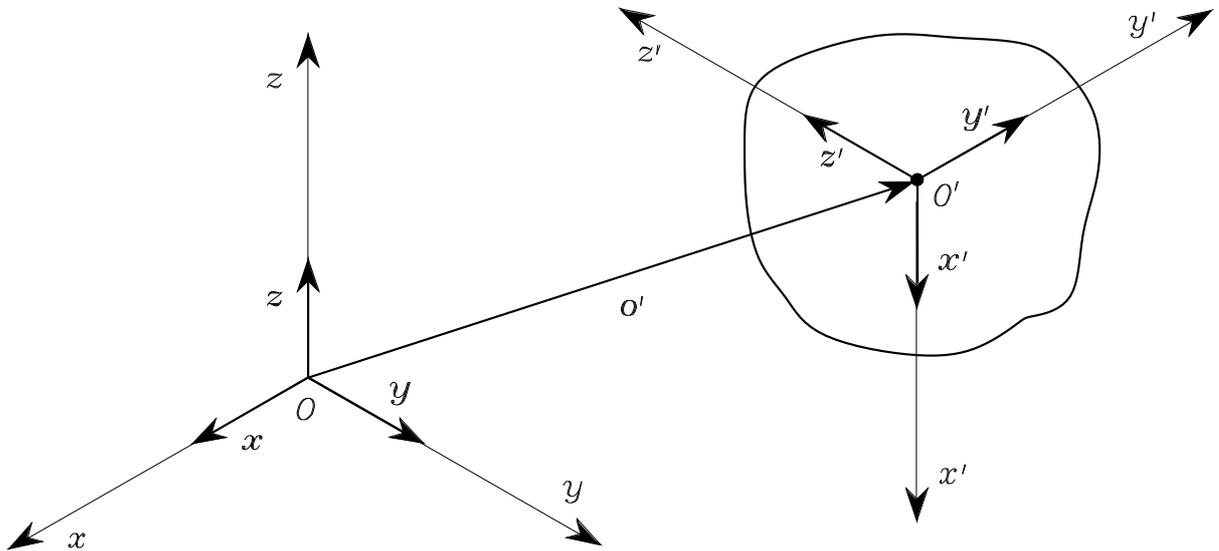
Cinematica diretta

Spazio dei giunti e spazio operativo

Calibrazione cinematica

Problema cinematico inverso

POSA DI UN CORPO RIGIDO



- Posizione

$$\mathbf{o}' = \begin{bmatrix} o'_x \\ o'_y \\ o'_z \end{bmatrix}$$

- Orientamento

$$\mathbf{x}' = x'_x \mathbf{x} + x'_y \mathbf{y} + x'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{y}' = y'_x \mathbf{x} + y'_y \mathbf{y} + y'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{z}' = z'_x \mathbf{x} + z'_y \mathbf{y} + z'_z \mathbf{z}$$

MATRICE DI ROTAZIONE

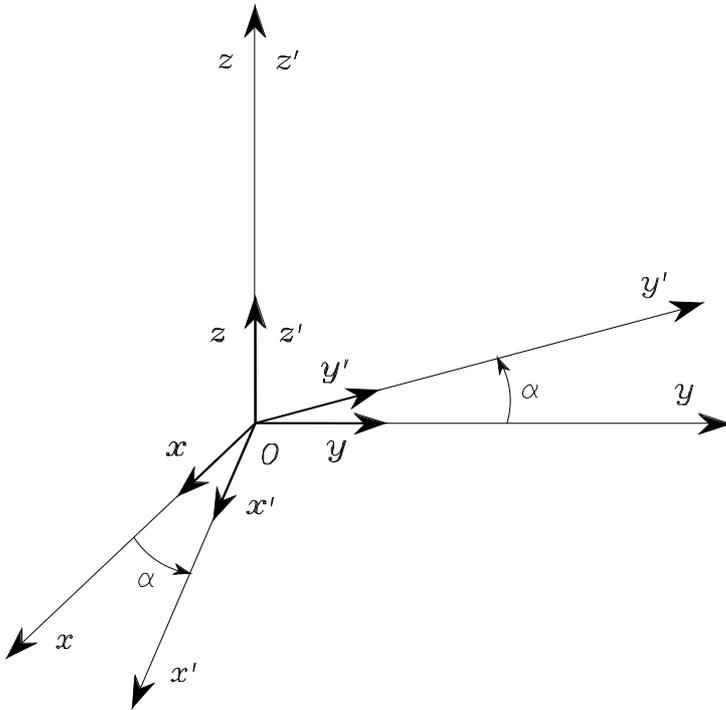
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'^T x & y'^T x & z'^T x \\ x'^T y & y'^T y & z'^T y \\ x'^T z & y'^T z & z'^T z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

Rotazioni elementari

- rotazione di α intorno a z



$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

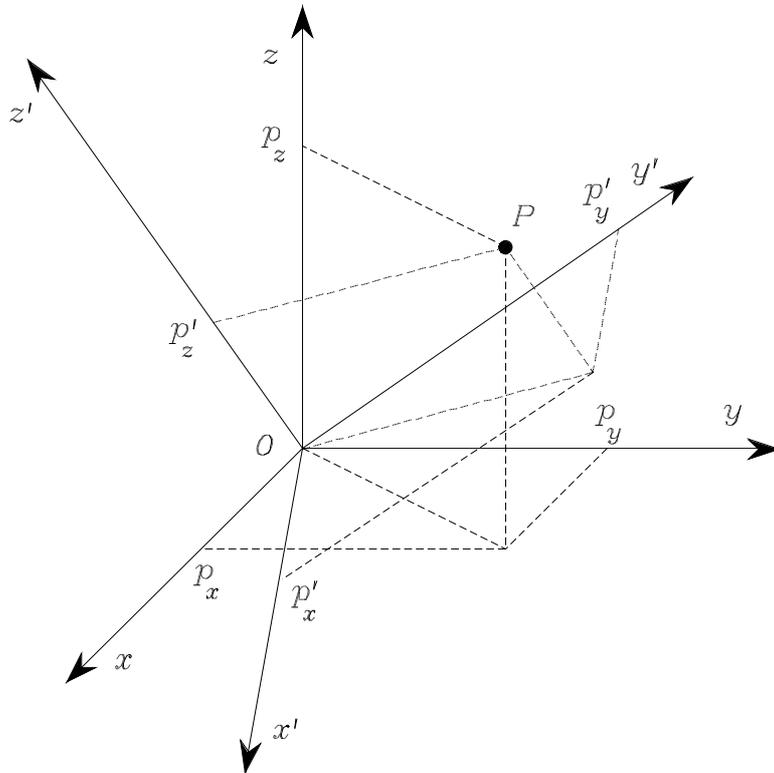
- rotazione di β intorno a y

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

- rotazione di γ intorno a x

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Rappresentazione di un vettore



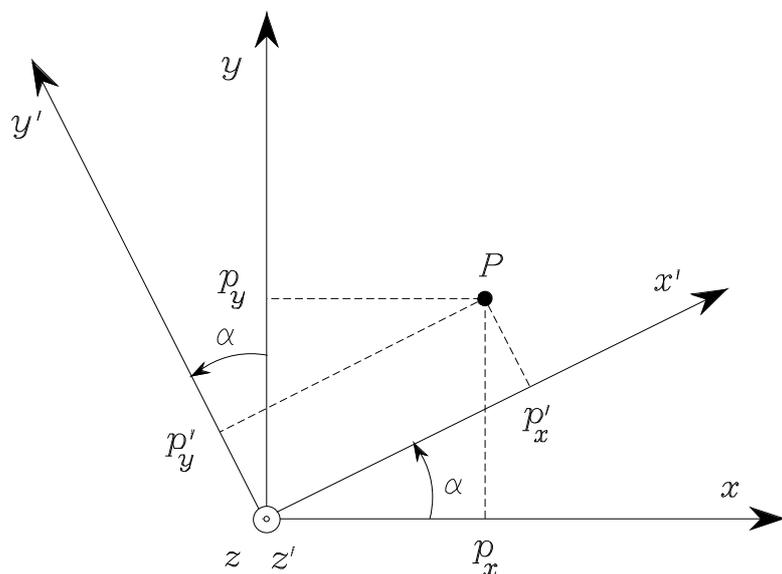
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \mathbf{p}'$$

$$= \mathbf{R} \mathbf{p}'$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p}$$

- Esempio



$$p_x = p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha$$

$$p_y = p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha$$

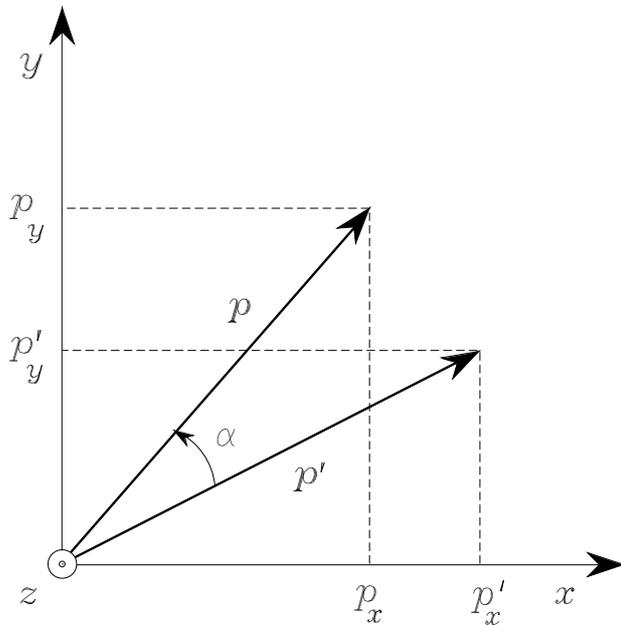
$$p_z = p'_z$$

Rotazione di un vettore

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{p}'$$

$$\mathbf{p}'^T \mathbf{p} = \mathbf{p}'^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{p}'$$

- Esempio



$$p_x = p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha$$

$$p_y = p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha$$

$$p_z = p'_z$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{p}'$$

- Matrice di rotazione

- ★ fornisce l'orientamento di una terna di coordinate rispetto ad un'altra: i vettori colonna sono i coseni direttori degli assi della terna ruotata rispetto alla terna di partenza
- ★ rappresenta una trasformazione di coordinate che mette in relazione le coordinate di uno stesso punto in due terne differenti (di origine comune)
- ★ è l'operatore che consente di ruotare un vettore in una stessa terna di coordinate

COMPOSIZIONE DI MATRICI DI ROTAZIONE

$$p^1 = R_2^1 p^2$$

$$p^0 = R_1^0 p^1$$

$$p^0 = R_2^0 p^2$$

$$R_i^j = (R_j^i)^{-1} = (R_j^i)^T$$

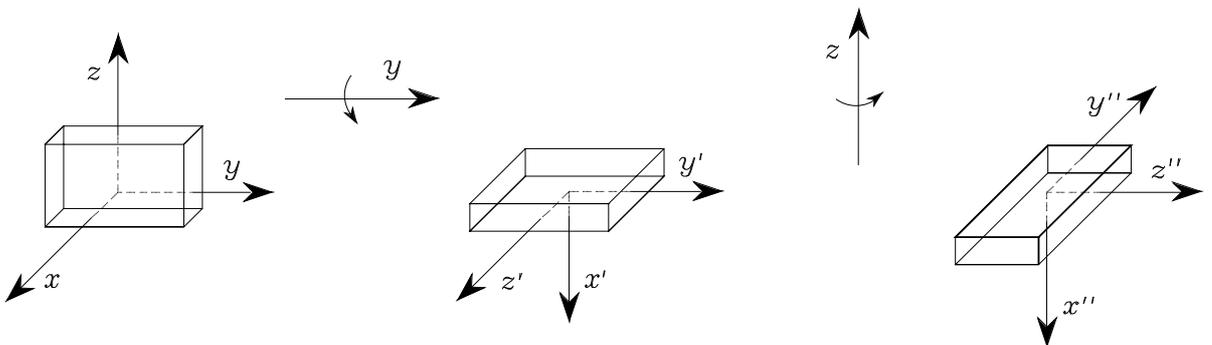
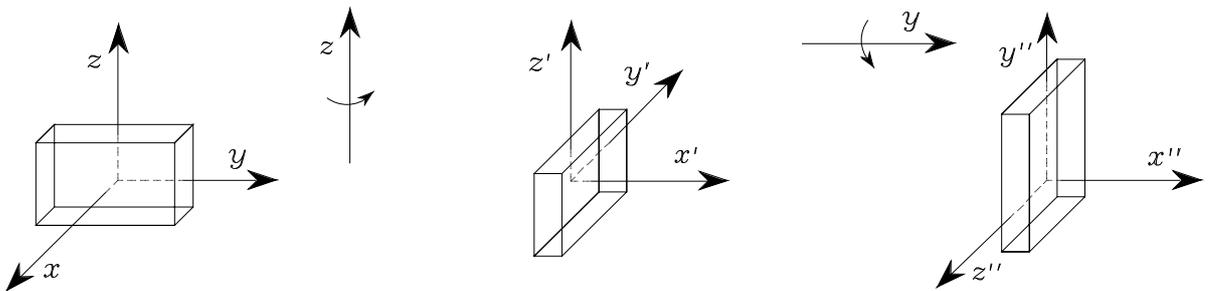
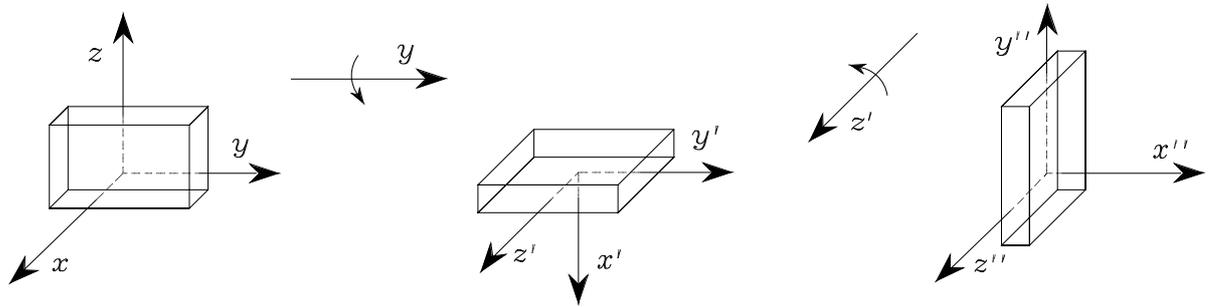
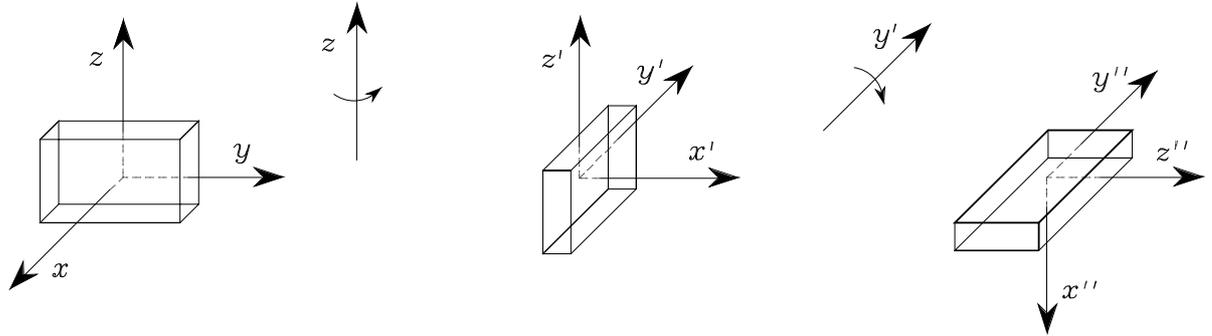
- Rotazione in *terna corrente*

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1$$

- Rotazione in *terna fissa*

$$R_2^0 = R_2^1 R_1^0$$

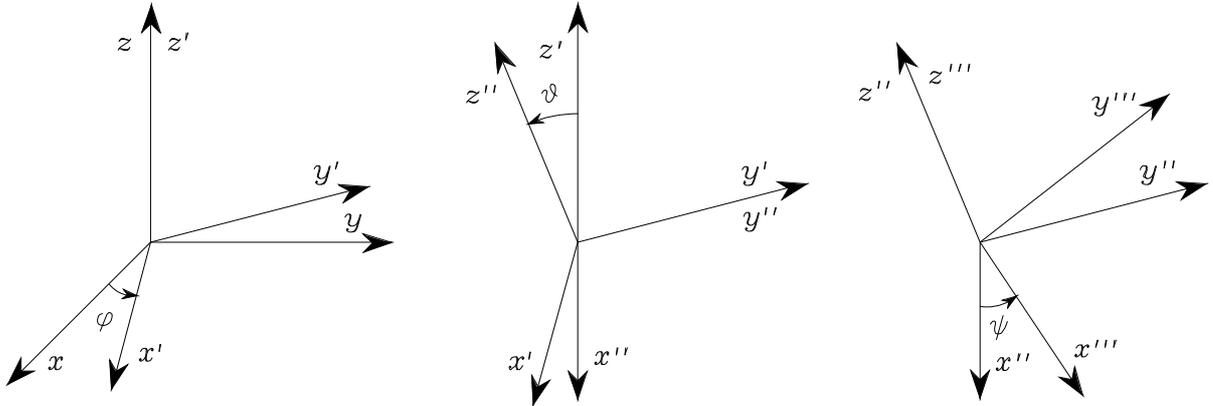
• Esempio



ANGOLI DI EULERO

- matrice di rotazione
 - ★ 9 parametri con 6 vincoli
- rappresentazione minima dell'orientamento
 - ★ 3 parametri indipendenti

Angoli ZYZ



$$R(\phi) = R_z(\varphi)R_{y'}(\vartheta)R_{z''}(\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

- Problema inverso

- ★ Assegnata

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

i 3 angoli ZYZ sono ($\vartheta \in (0, \pi)$)

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{23}, r_{13})$$

$$\vartheta = \text{Atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right)$$

$$\psi = \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31})$$

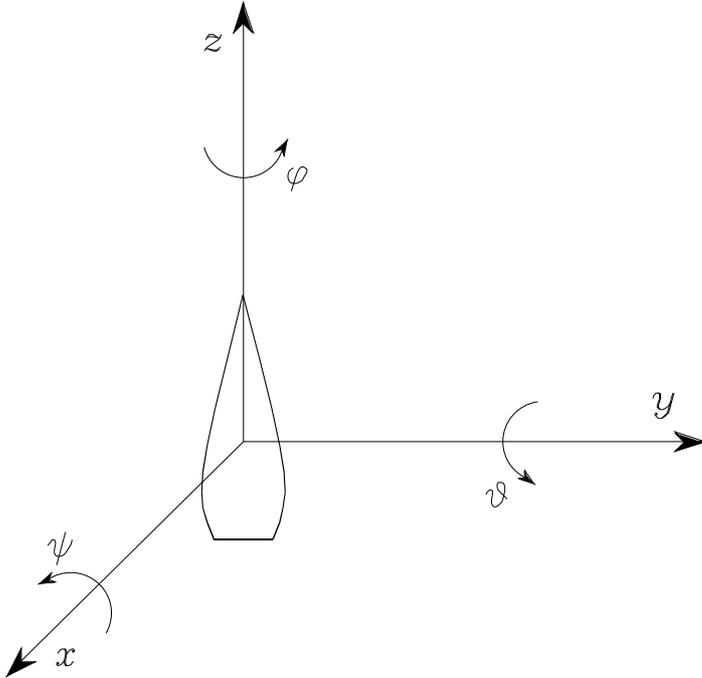
ovvero ($\vartheta \in (-\pi, 0)$)

$$\varphi = \text{Atan2}(-r_{23}, -r_{13})$$

$$\vartheta = \text{Atan2}\left(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right)$$

$$\psi = \text{Atan2}(-r_{32}, r_{31})$$

Angoli di RPY



$$\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(\vartheta)\mathbf{R}_x(\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta & c_\varphi s_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\vartheta & s_\varphi s_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix}$$

- Problema inverso

- ★ Assegnata

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

i 3 angoli di RPY sono ($\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$)

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{21}, r_{11})$$

$$\vartheta = \text{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$$

$$\psi = \text{Atan2}(r_{32}, r_{33})$$

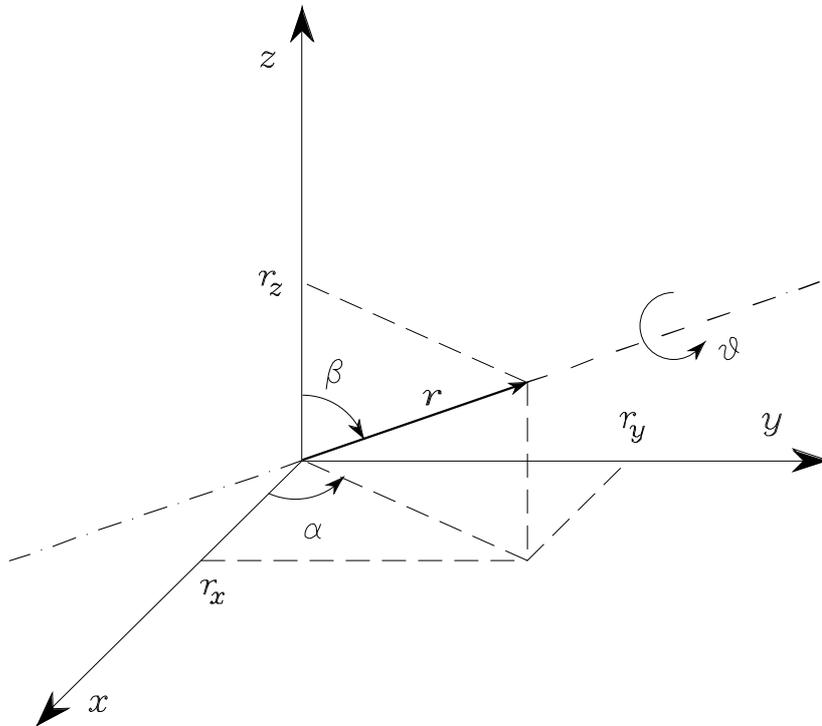
ovvero ($\vartheta \in (\pi/2, 3\pi/2)$)

$$\varphi = \text{Atan2}(-r_{21}, -r_{11})$$

$$\vartheta = \text{Atan2}\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$$

$$\psi = \text{Atan2}(-r_{32}, -r_{33})$$

ASSE/ANGOLO



$$\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}) = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\vartheta) \mathbf{R}_y(-\beta) \mathbf{R}_z(-\alpha)$$

$$\sin \alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \quad \cos \alpha = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}{r} \quad \cos \beta = \frac{r_z}{r}$$

$$\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_x^2(1 - c_\vartheta) + c_\vartheta & r_x r_y(1 - c_\vartheta) - r_z s_\vartheta \\ r_x r_y(1 - c_\vartheta) + r_z s_\vartheta & r_y^2(1 - c_\vartheta) + c_\vartheta \\ r_x r_z(1 - c_\vartheta) - r_y s_\vartheta & r_y r_z(1 - c_\vartheta) + r_x s_\vartheta \\ r_x r_z(1 - c_\vartheta) + r_y s_\vartheta \\ r_y r_z(1 - c_\vartheta) - r_x s_\vartheta \\ r_z^2(1 - c_\vartheta) + c_\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}) = \mathbf{R}(-\vartheta, -\mathbf{r})$$

- Problema inverso

- ★ Assegnata

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

l'angolo e l'asse di rotazione sono ($\sin \vartheta \neq 0$)

$$\vartheta = \cos^{-1} \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2 \sin \vartheta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

con

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$$

QUATERNIONE UNITARIO

- rappresentazione a 4 parametri $Q = \{\eta, \epsilon\}$

$$\eta = \cos \frac{\vartheta}{2}$$
$$\epsilon = \sin \frac{\vartheta}{2} \mathbf{r}$$

$$\eta^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1$$

★ (ϑ, \mathbf{r}) e $(-\vartheta, -\mathbf{r})$ forniscono lo stesso quaternione

$$\mathbf{R}(\eta, \epsilon) = \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + \epsilon_x^2) - 1 & 2(\epsilon_x \epsilon_y - \eta \epsilon_z) & 2(\epsilon_x \epsilon_z + \eta \epsilon_y) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_y + \eta \epsilon_z) & 2(\eta^2 + \epsilon_y^2) - 1 & 2(\epsilon_y \epsilon_z - \eta \epsilon_x) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_z - \eta \epsilon_y) & 2(\epsilon_y \epsilon_z + \eta \epsilon_x) & 2(\eta^2 + \epsilon_z^2) - 1 \end{bmatrix}$$

- Problema inverso

- ★ Assegnata

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

il quaternione è ($\eta \geq 0$)

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \operatorname{sgn}(r_{13} - r_{31}) \sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \operatorname{sgn}(r_{21} - r_{12}) \sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix}$$

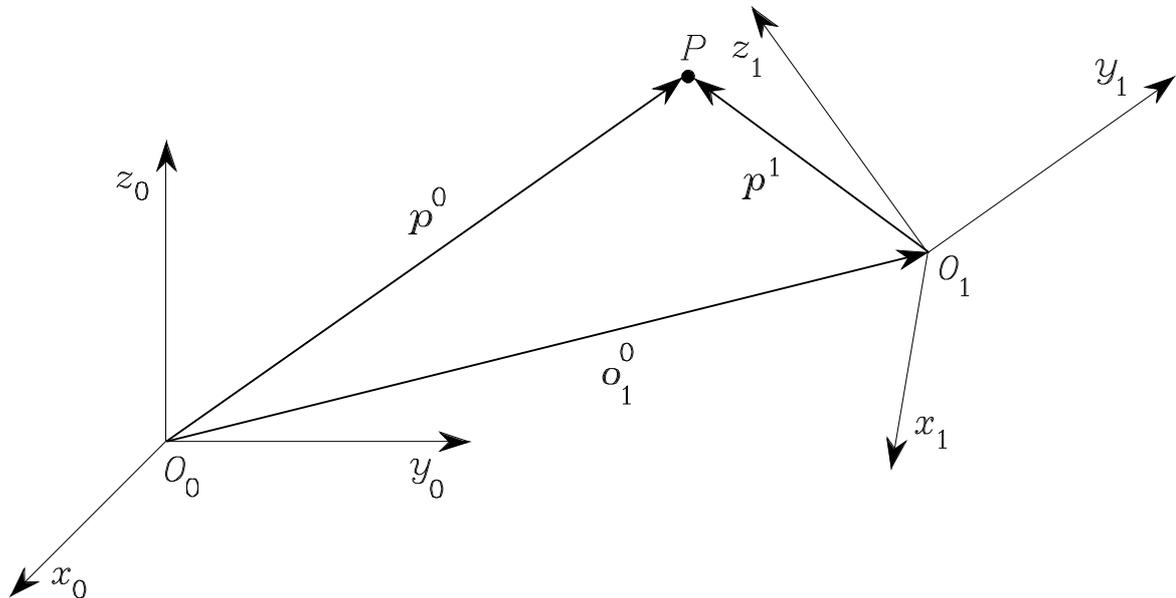
- quaternione estratto da $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \{\eta, -\boldsymbol{\epsilon}\}$$

- prodotto tra quaternioni

$$\mathbf{Q}_1 * \mathbf{Q}_2 = \{\eta_1 \eta_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1^T \boldsymbol{\epsilon}_2, \eta_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2\}$$

TRASFORMAZIONI OMOGENEE



- Trasformazione di coordinate (*traslazione + rotazione*)

$$p^0 = o_1^0 + R_1^0 p^1$$

- Trasformazione inversa

$$p^1 = -R_0^1 o_1^0 + R_0^1 p^0$$

- Rappresentazione omogenea

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice di trasformazione omogenea

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

- Trasformazione di coordinate

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \tilde{\mathbf{p}}^1$$

- Trasformazione inversa

$$\tilde{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{A}_0^1 \tilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{A}_1^0)^{-1} \tilde{\mathbf{p}}^0$$

ove

$$\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^T$$

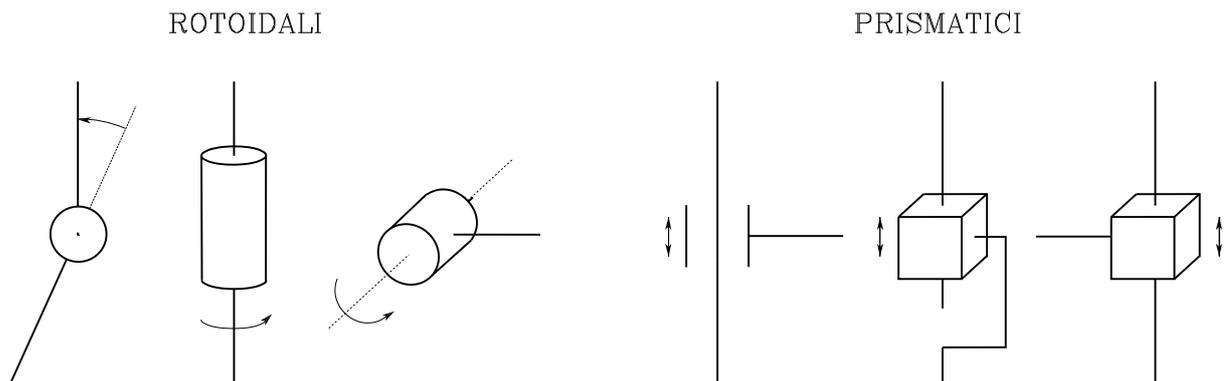
- Successione di trasformazioni

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \dots \mathbf{A}_n^{n-1} \tilde{\mathbf{p}}^n$$

CINEMATICA DIRETTA

- Manipolatore

- ★ insieme di *bracci* connessi tramite *giunti*



- Catena cinematica (dalla base all'organo terminale)

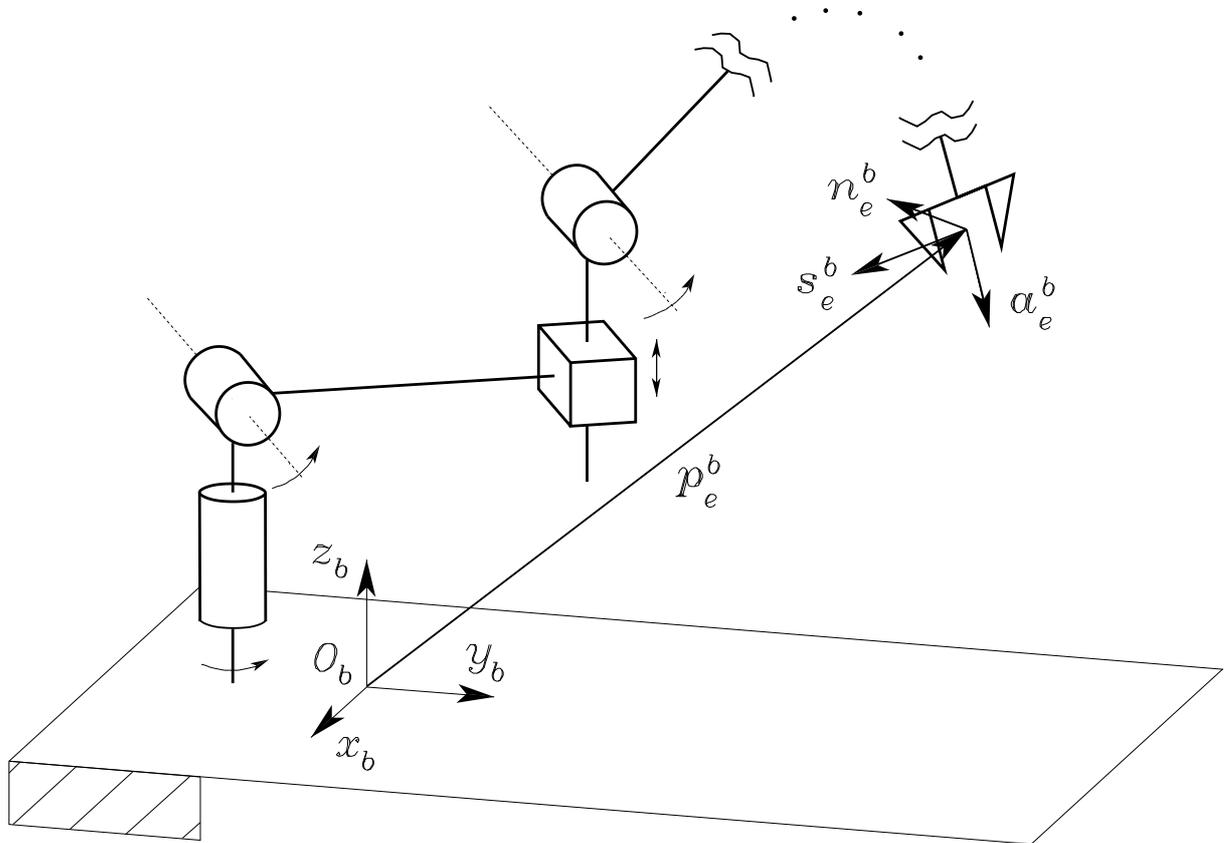
- ★ aperta (sequenza unica)

- ★ chiusa (sequenza forma un anello)

- Grado di mobilità

- ★ tipicamente associato a una articolazione = *variabile di giunto*

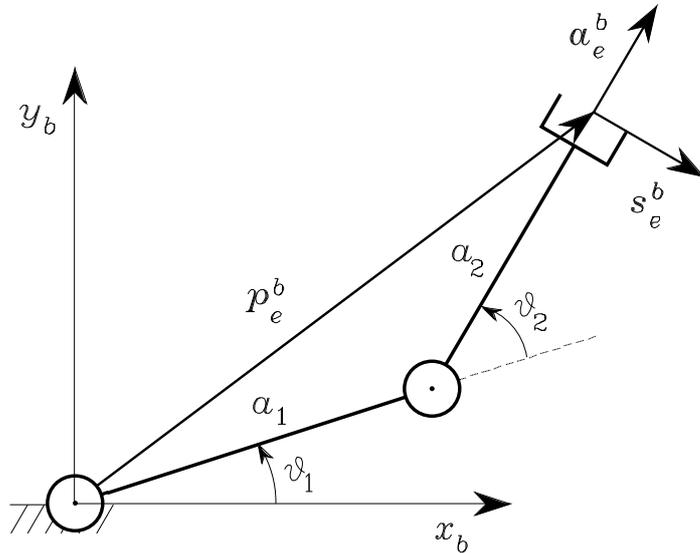
Terna base e terna utensile



- Equazione cinematica diretta

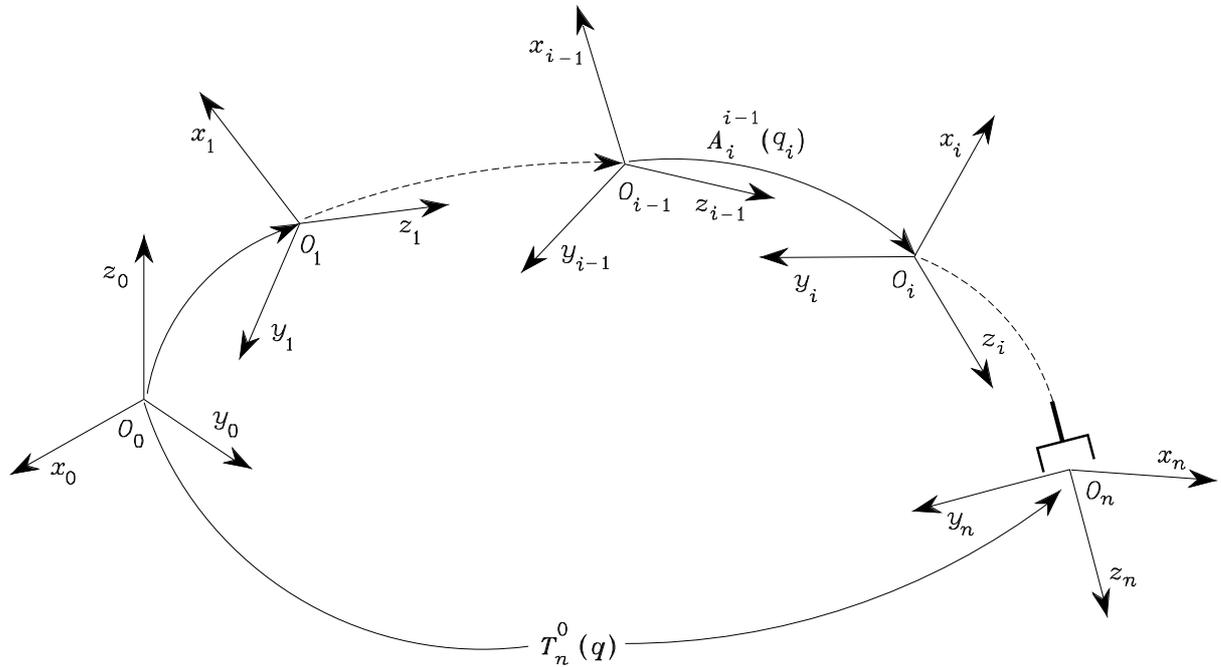
$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{a}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore planare a due bracci



$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b & \mathbf{s}_e^b & \mathbf{a}_e^b & \mathbf{p}_e^b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

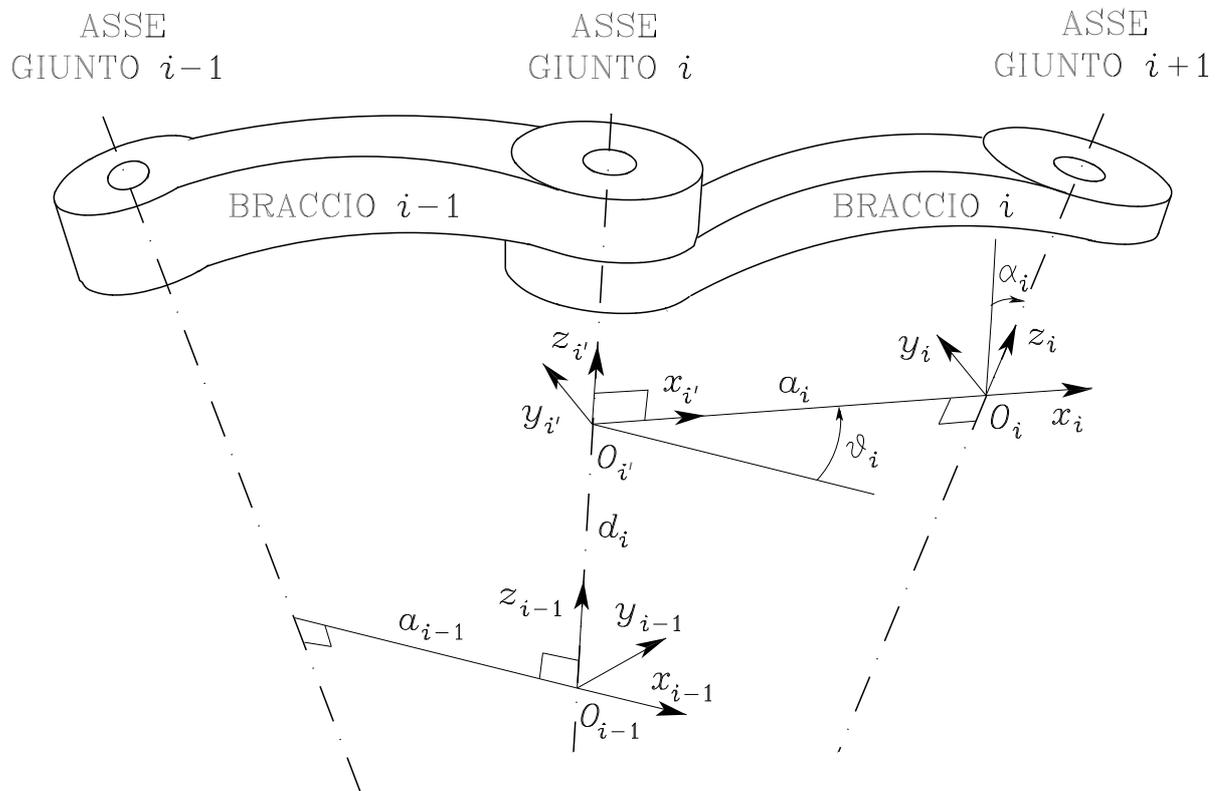
Catena aperta



$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \dots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)$$

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b \mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) \mathbf{T}_e^n$$

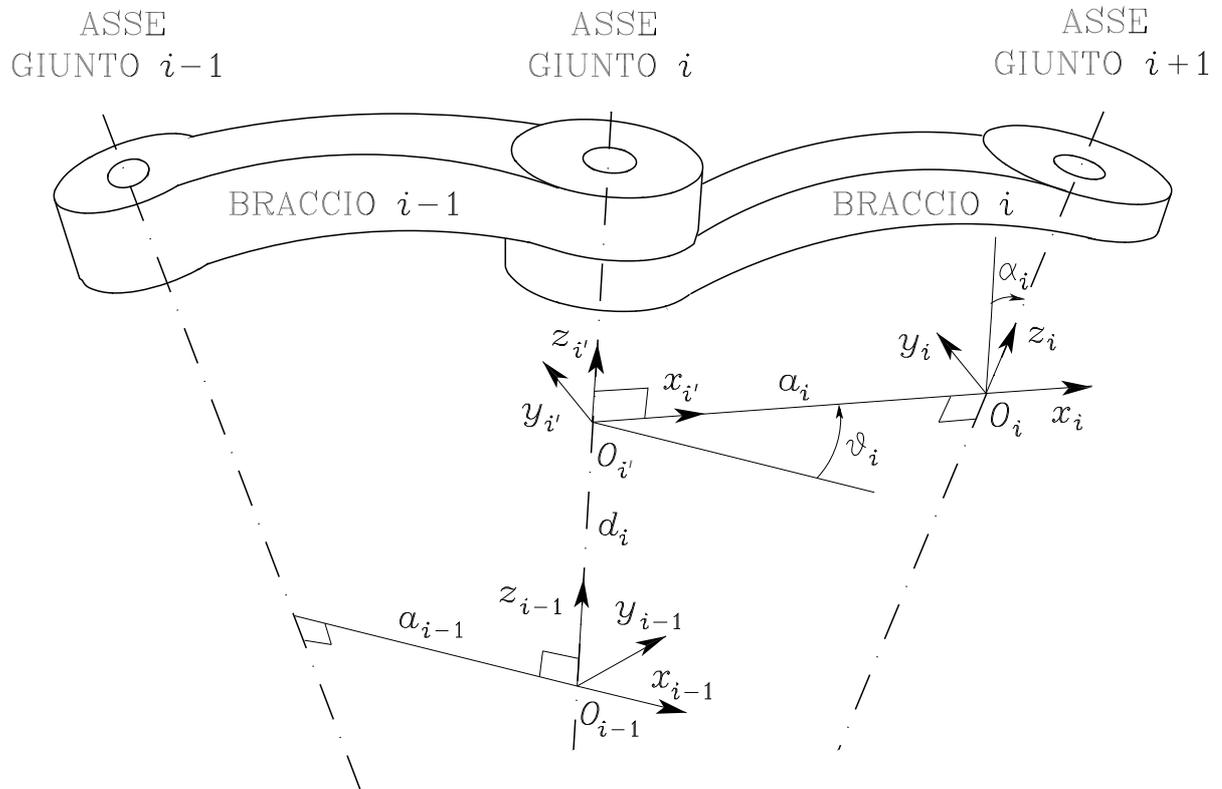
Convenzione di Denavit-Hartenberg



- si sceglie l'asse z_i giacente lungo l'asse del giunto $i + 1$
- si individua O_i all'intersezione dell'asse z_i con la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i , e con O'_i si indica l'intersezione della normale comune con z_{i-1}
- si assume l'asse x_i diretto lungo la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i con verso positivo dal giunto i al giunto $i + 1$
- si sceglie l'asse y_i in modo da completare una terna levogira

- Definizione non univoca della terna:
 - ★ con riferimento alla terna 0, per la quale la sola direzione dell'asse z_0 risulta specificata: si possono quindi scegliere arbitrariamente O_0 ed x_0
 - ★ con riferimento alla terna n , per la quale il solo asse x_n risulta soggetto a vincolo (deve essere normale all'asse z_{n-1}): infatti non vi è giunto $n + 1$, per cui non è definito z_n e lo si può scegliere arbitrariamente
 - ★ quando due assi consecutivi sono paralleli, in quanto la normale comune tra di essi non è univocamente definita
 - ★ quando due assi consecutivi si intersecano, in quanto il verso di x_i è arbitrario
 - ★ quando il giunto i è prismatico, nel qual caso la sola direzione dell'asse z_{i-1} è determinata

Parametri di Denavit-Hartenberg



a_i distanza di O_i da O'_i ;

d_i coordinata su z_{i-1} di O'_i ;

α_i angolo intorno all'asse x_i tra l'asse z_{i-1} e l'asse z_i valutato positivo in senso antiorario;

ϑ_i angolo intorno all'asse z_{i-1} tra l'asse x_{i-1} e l'asse x_i valutato positivo in senso antiorario.

- a_i e α_i sono sempre costanti
- se il giunto è *rotoidale* la variabile è ϑ_i
- se il giunto è *prismatico* la variabile è d_i

- Trasformazione di coordinate

$$\mathbf{A}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i & 0 & 0 \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \mathbf{A}_{i'}^{i-1} \mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i c\alpha_i & s\vartheta_i s\alpha_i & a_i c\vartheta_i \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i c\alpha_i & -c\vartheta_i s\alpha_i & a_i s\vartheta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Procedura operativa

1. Individuare e numerare consecutivamente gli assi dei giunti; assegnare, rispettivamente, le direzioni agli assi z_0, \dots, z_{n-1}
2. Fissare la terna base posizionandone l'origine sull'asse z_0 ; gli assi x_0 e y_0 sono scelti in maniera tale da ottenere una terna levogira

Eeguire i passi da **3** a **5** per $i = 1, \dots, n - 1$:

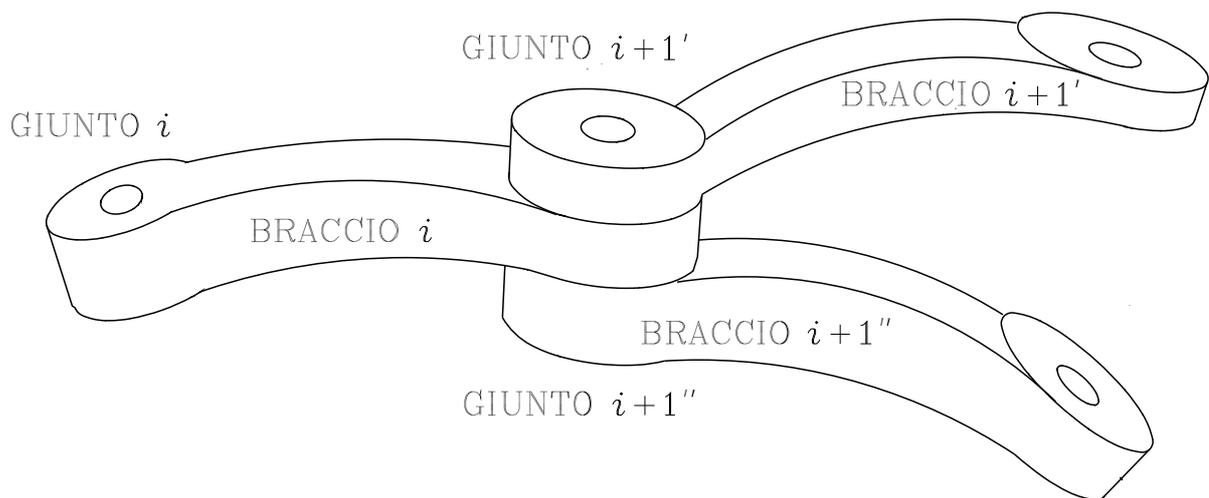
3. Individuare l'origine O_i all'intersezione di z_i con la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i . Se gli assi z_{i-1} e z_i sono paralleli e il giunto i è rotoideale, posizionare O_i in modo da annullare d_i ; se il giunto i è prismatico, scegliere O_i in corrispondenza di una posizione di riferimento per la corsa del giunto (ad esempio un fine-corsa)
4. Fissare l'asse x_i diretto lungo la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i con verso positivo dal giunto i al giunto $i + 1$
5. Fissare l'asse y_i in modo da ottenere una terna levogira

Per completare:

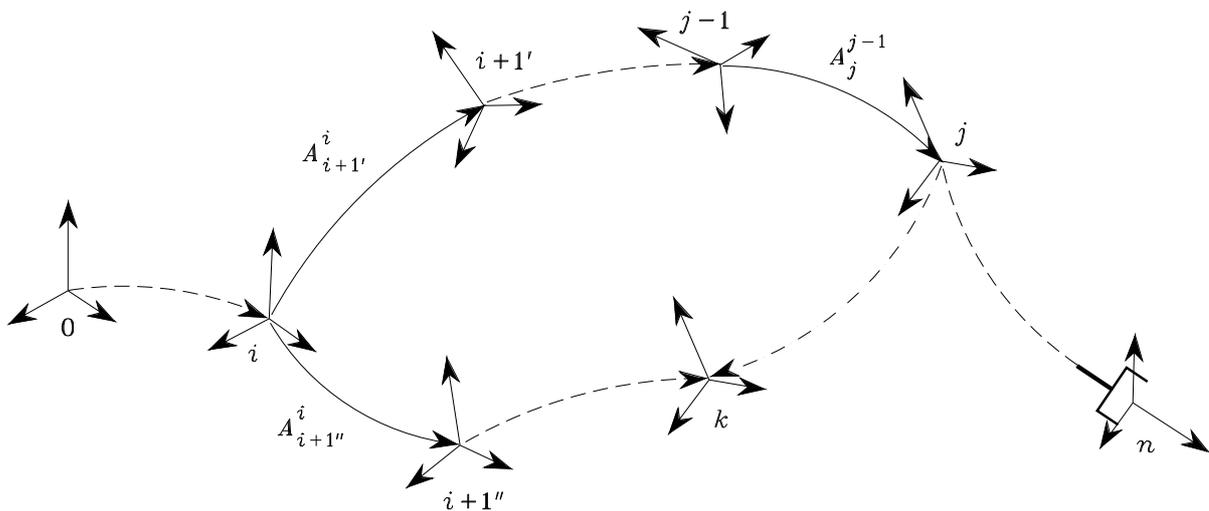
6. Fissare la terna n , allineando z_n lungo la direzione di z_{n-1} se il giunto n è rotoideale, ovvero scegliendo z_n in maniera arbitraria se il giunto n è prismatico; fissare l'asse x_n in accordo al punto **4**
7. Costruire per $i = 1, \dots, n$ la tabella dei parametri $a_i, d_i, \alpha_i, \vartheta_i$
8. Calcolare sulla base dei parametri di cui al punto **7** le matrici di trasformazione omogenea $A_i^{i-1}(q_i)$ per $i = 1, \dots, n$
9. Calcolare $T_n^0(\mathbf{q}) = A_1^0 \dots A_n^{n-1}$ che fornisce posizione e orientamento della terna n rispetto alla terna 0
10. Assegnate T_0^b e T_e^n , calcolare la funzione cinematica diretta $T_e^b(\mathbf{q}) = T_0^b T_n^0 T_e^n$ che fornisce posizione e orientamento della terna utensile rispetto alla terna base

Catena chiusa

- Connessione di un singolo braccio con due bracci



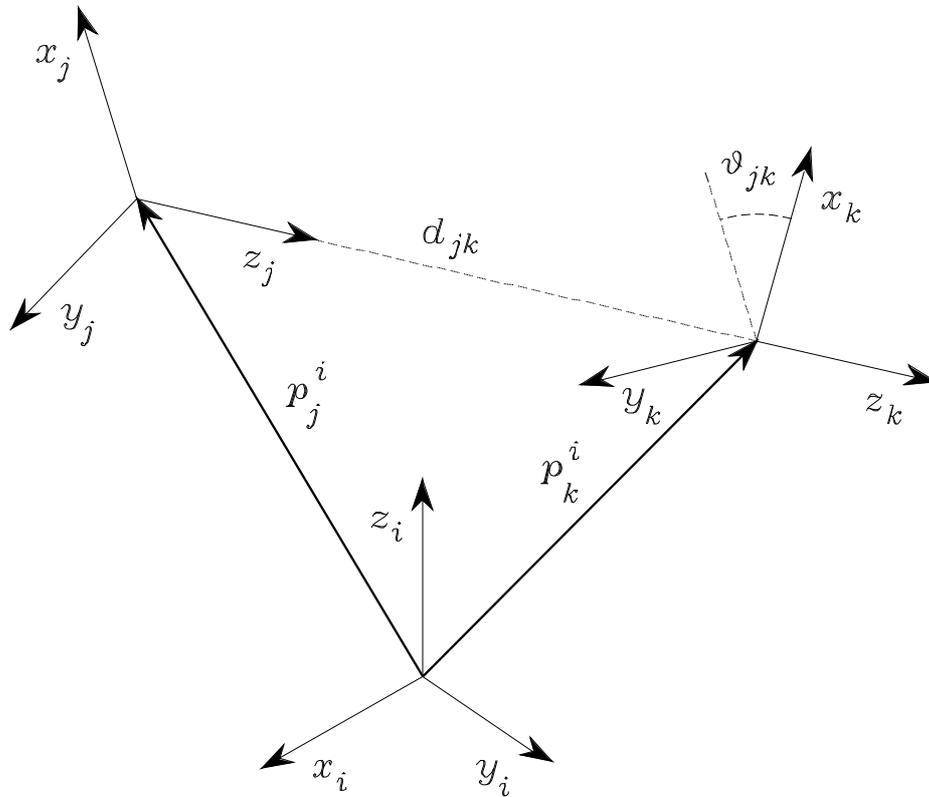
- giunto virtuale di taglio



$$A_j^i(q') = A_{i+1'}^i(q_{i+1}') \dots A_j^{j-1}(q_j)$$

$$A_k^i(q'') = A_{i+1''}^i(q_{i+1}'') \dots A_k^{k-1}(q_k)$$

- Vincoli



★ giunto $j + 1$ *rotoidale*

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i^j(\mathbf{q}') (\mathbf{p}_j^i(\mathbf{q}') - \mathbf{p}_k^i(\mathbf{q}'')) = [0 \quad 0 \quad d_{jk}]^T \\ \mathbf{z}_j^i(\mathbf{q}') = \mathbf{z}_k^i(\mathbf{q}'') \end{cases}$$

★ giunto $j + 1$ *prismatico*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j^{iT}(\mathbf{q}') \\ \mathbf{y}_j^{iT}(\mathbf{q}') \end{bmatrix} (\mathbf{p}_j^i(\mathbf{q}') - \mathbf{p}_k^i(\mathbf{q}'')) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}_j^i(\mathbf{q}') = \mathbf{z}_k^i(\mathbf{q}'') \\ \mathbf{x}_j^{iT}(\mathbf{q}') \mathbf{x}_k^i(\mathbf{q}'') = \cos \vartheta_{jk} \end{cases}$$

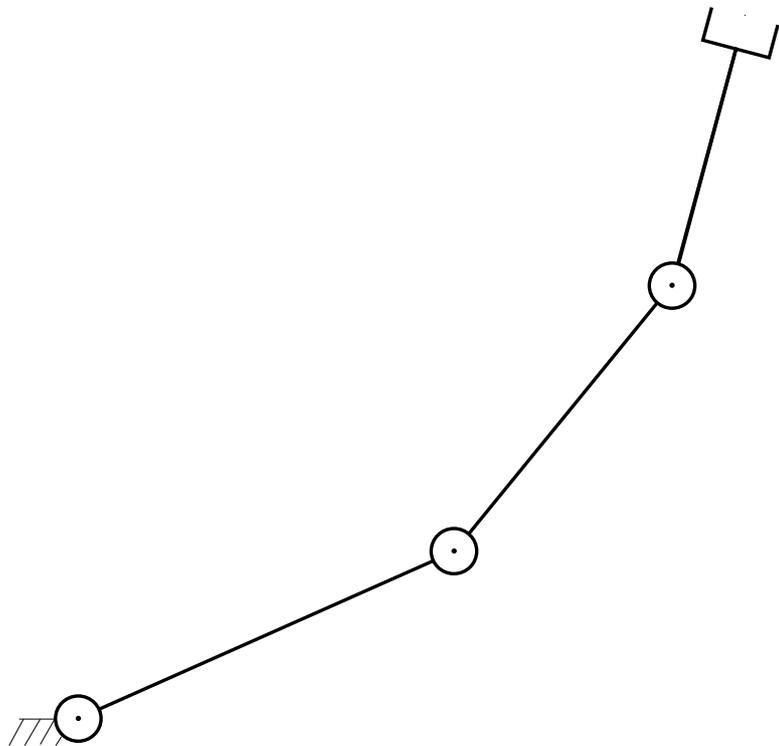
★ risolti in termini di $\mathbf{q} \dots$

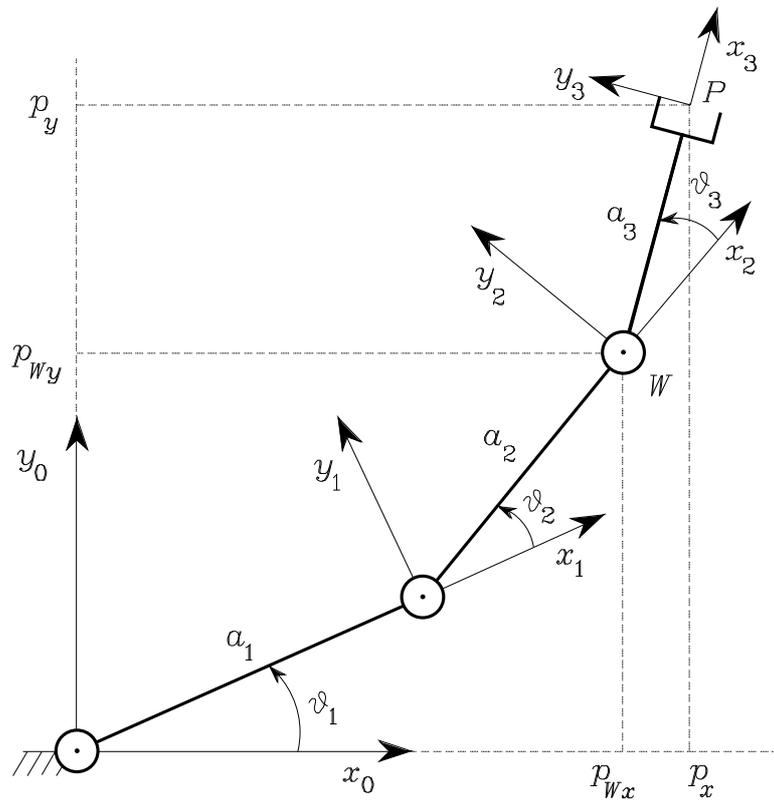
$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_i^0 \mathbf{A}_j^i \mathbf{A}_n^j$$

Procedura operativa

- 1.** Selezionare un giunto non attuato della catena chiusa. Ipotizzare di aprire tale giunto in modo da ottenere una catena aperta con struttura ad albero
- 2.** Calcolare le trasformazioni omogenee secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg
- 3.** Trovare i vincoli di uguaglianza per le due terne connesse dal giunto di taglio
- 4.** Risolvere i vincoli in termini di un numero ridotto di variabili di giunto
- 5.** Esprimere le trasformazioni omogenee in funzione di tali variabili di giunto e calcolare la funzione cinematica diretta per composizione delle varie trasformazioni dalla terna base alla terna utensile

Manipolatore planare a tre bracci





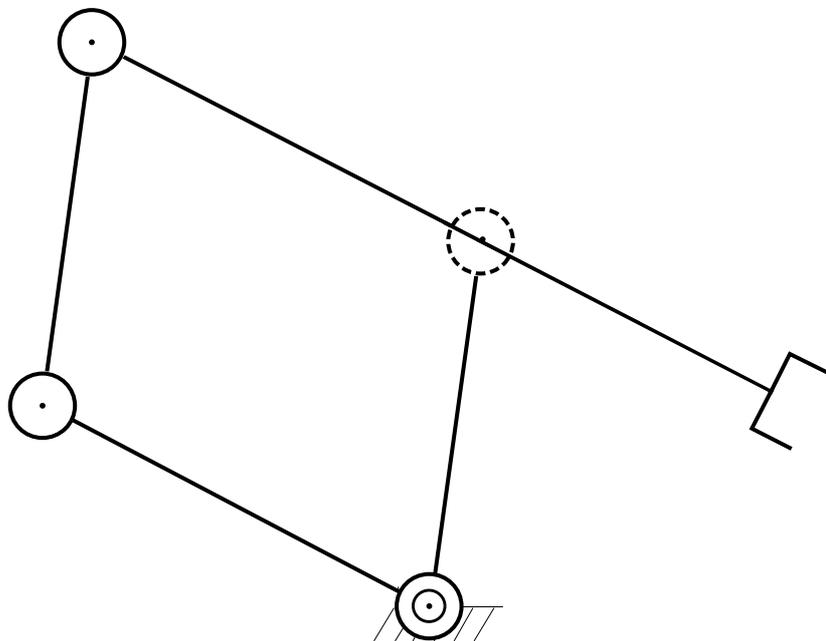
| Braccio | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---------|-------|------------|-------|---------------|
| 1 | a_1 | 0 | 0 | ϑ_1 |
| 2 | a_2 | 0 | 0 | ϑ_2 |
| 3 | a_3 | 0 | 0 | ϑ_3 |

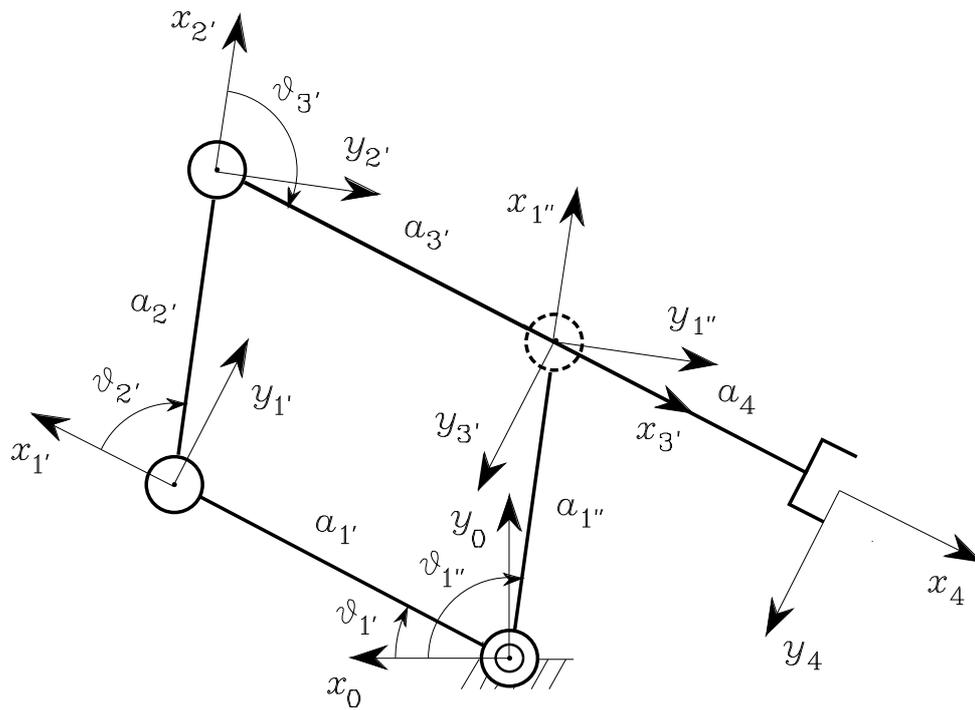
$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore a parallelogramma





| Braccio | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---------|---------|------------|-------|-----------------|
| 1' | a_1' | 0 | 0 | ϑ_1' |
| 2' | a_2' | 0 | 0 | ϑ_2' |
| 3' | a_3' | 0 | 0 | ϑ_3' |
| 1'' | a_1'' | 0 | 0 | ϑ_1'' |
| 4 | a_4 | 0 | 0 | 0 |

$$\mathbf{A}_{3'}^0(\mathbf{q}') = \mathbf{A}_{1'}^0 \mathbf{A}_{2'}^{1'} \mathbf{A}_{3'}^{2'}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{1'2'3'} & -s_{1'2'3'} & 0 & a_{1'}c_{1'} + a_{2'}c_{1'2'} + a_{3'}c_{1'2'3'} \\ s_{1'2'3'} & c_{1'2'3'} & 0 & a_{1'}s_{1'} + a_{2'}s_{1'2'} + a_{3'}s_{1'2'3'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{1''}^0(\mathbf{q}'') = \begin{bmatrix} c_{1''} & -s_{1''} & 0 & a_{1''}c_{1''} \\ s_{1''} & c_{1''} & 0 & a_{1''}s_{1''} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4^{3'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Risoluzione vincoli

- ★ orientamento (OK)

- ★ posizione

$$\mathbf{R}_0^{3'}(\mathbf{q}') (\mathbf{p}_{3'}^0(\mathbf{q}') - \mathbf{p}_{1''}^0(\mathbf{q}'')) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⇓

$$a_{1'}(c_{1'} + c_{1'2'3'}) + a_{1''}(c_{1'2'} - c_{1''}) = 0$$

$$a_{1'}(s_{1'} + s_{1'2'3'}) + a_{1''}(s_{1'2'} - s_{1''}) = 0$$

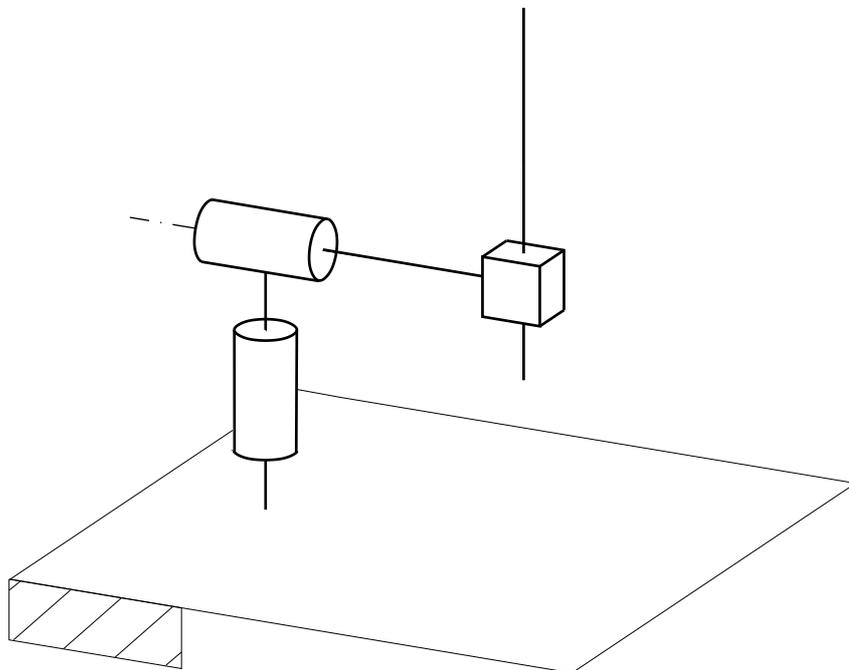
$$\vartheta_{2'} = \vartheta_{1''} - \vartheta_{1'}$$

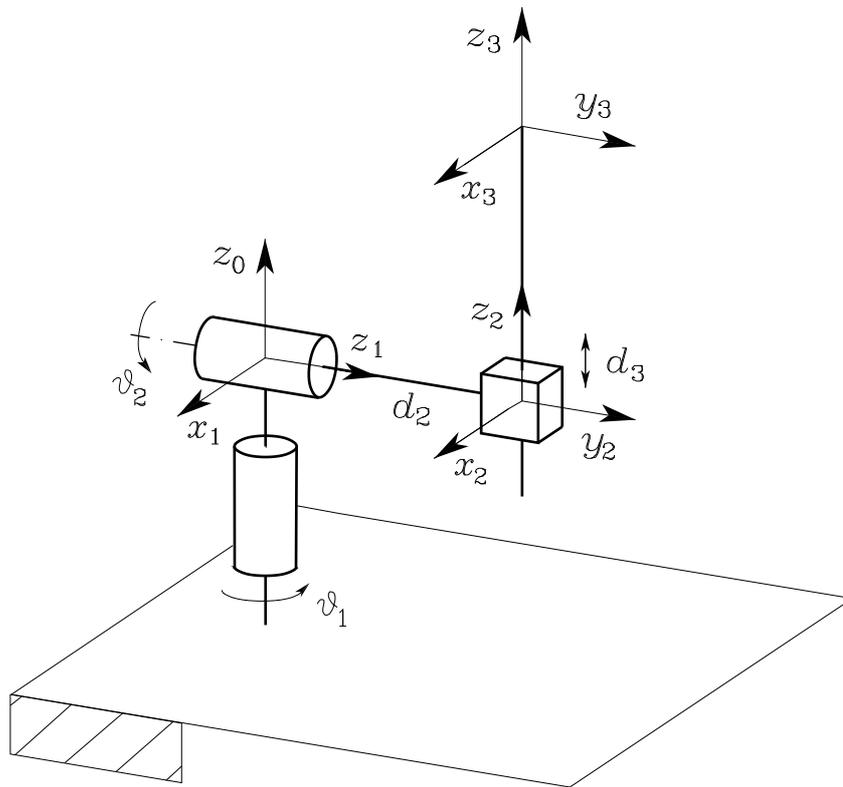
$$\vartheta_{3'} = \pi - \vartheta_{2'} = \pi - \vartheta_{1''} + \vartheta_{1'}$$

- Cinematica diretta

$$\mathbf{T}_4^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_{3'}^0(\mathbf{q}) \mathbf{A}_4^{3'} = \begin{bmatrix} -c_{1'} & s_{1'} & 0 & a_{1''}c_{1''} - a_4c_{1'} \\ -s_{1'} & -c_{1'} & 0 & a_{1''}s_{1''} - a_4s_{1'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore sferico





| Braccio | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---------|-------|------------|-------|---------------|
| 1 | 0 | $-\pi/2$ | 0 | ϑ_1 |
| 2 | 0 | $\pi/2$ | d_2 | ϑ_2 |
| 3 | 0 | 0 | d_3 | 0 |

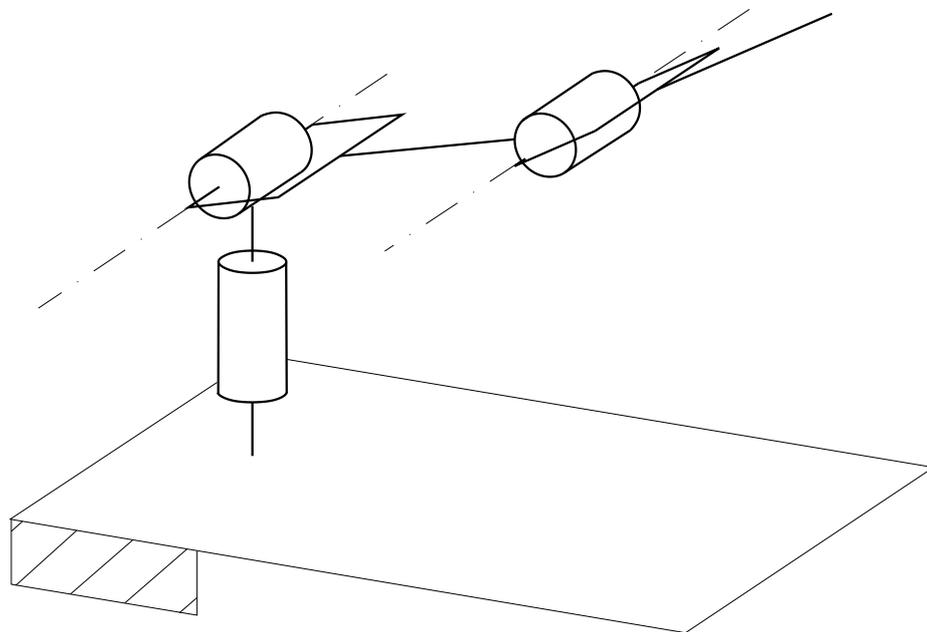
$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

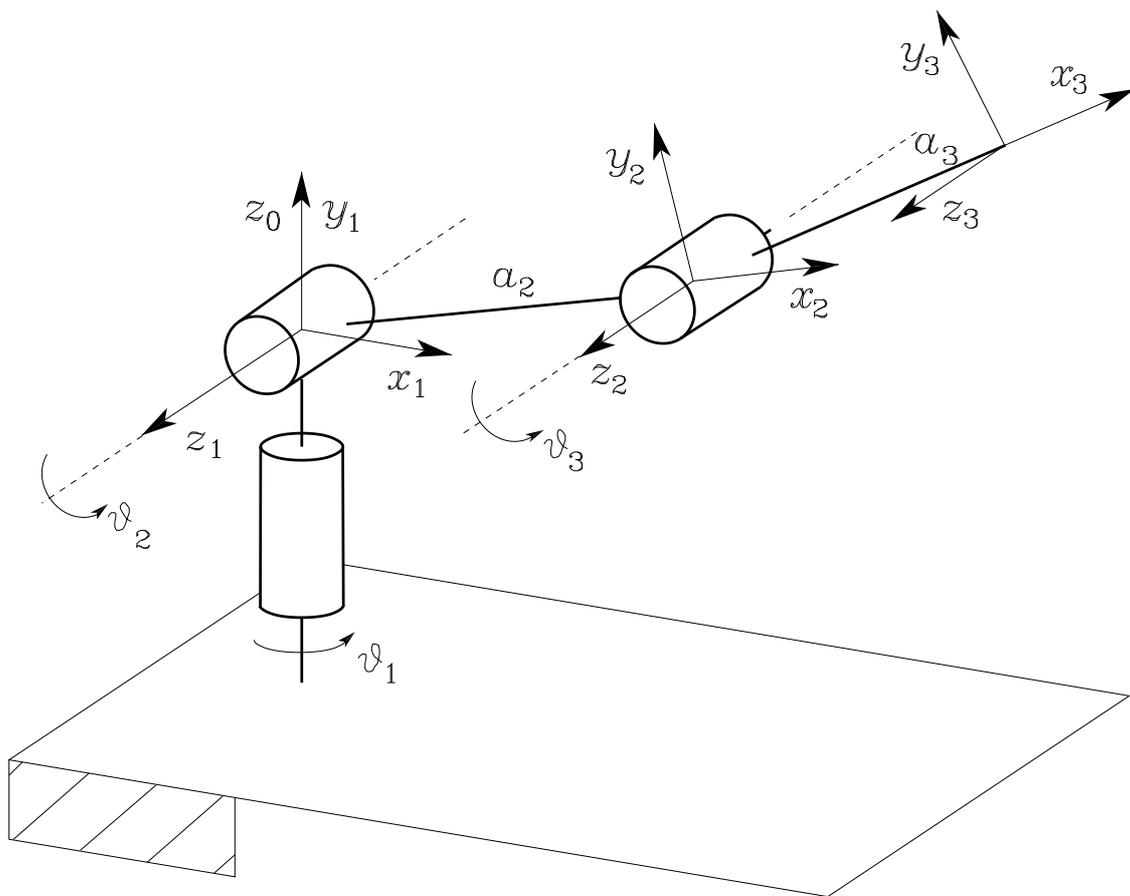
$$\mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo





| Braccio | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---------|-------|------------|-------|---------------|
| 1 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_1 |
| 2 | a_2 | 0 | 0 | ϑ_2 |
| 3 | a_3 | 0 | 0 | ϑ_3 |

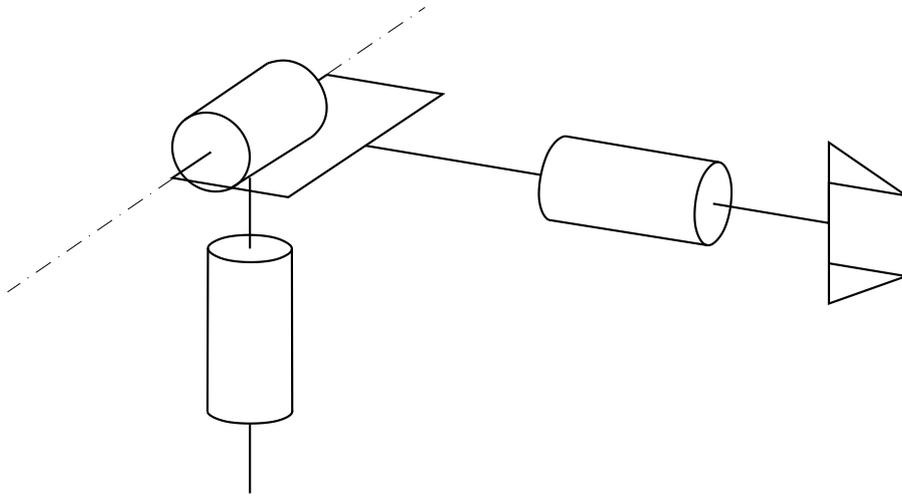
$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

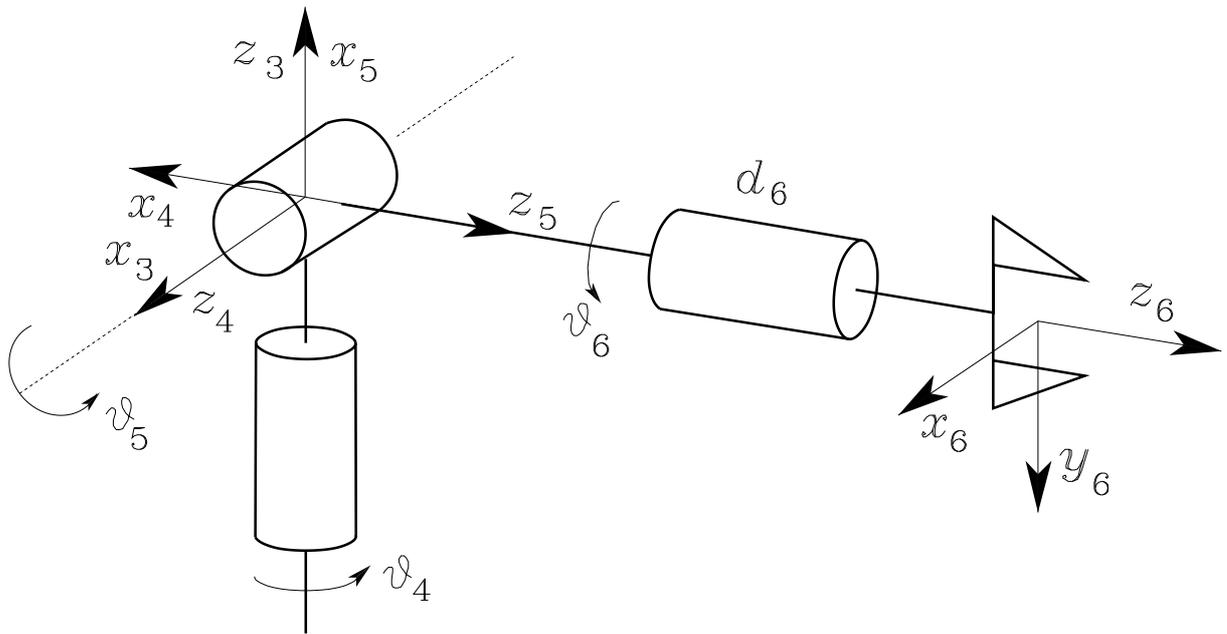
$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 2, 3$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polso sferico





| Braccio | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---------|-------|------------|-------|---------------|
| 4 | 0 | $-\pi/2$ | 0 | ϑ_4 |
| 5 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_5 |
| 6 | 0 | 0 | d_6 | ϑ_6 |

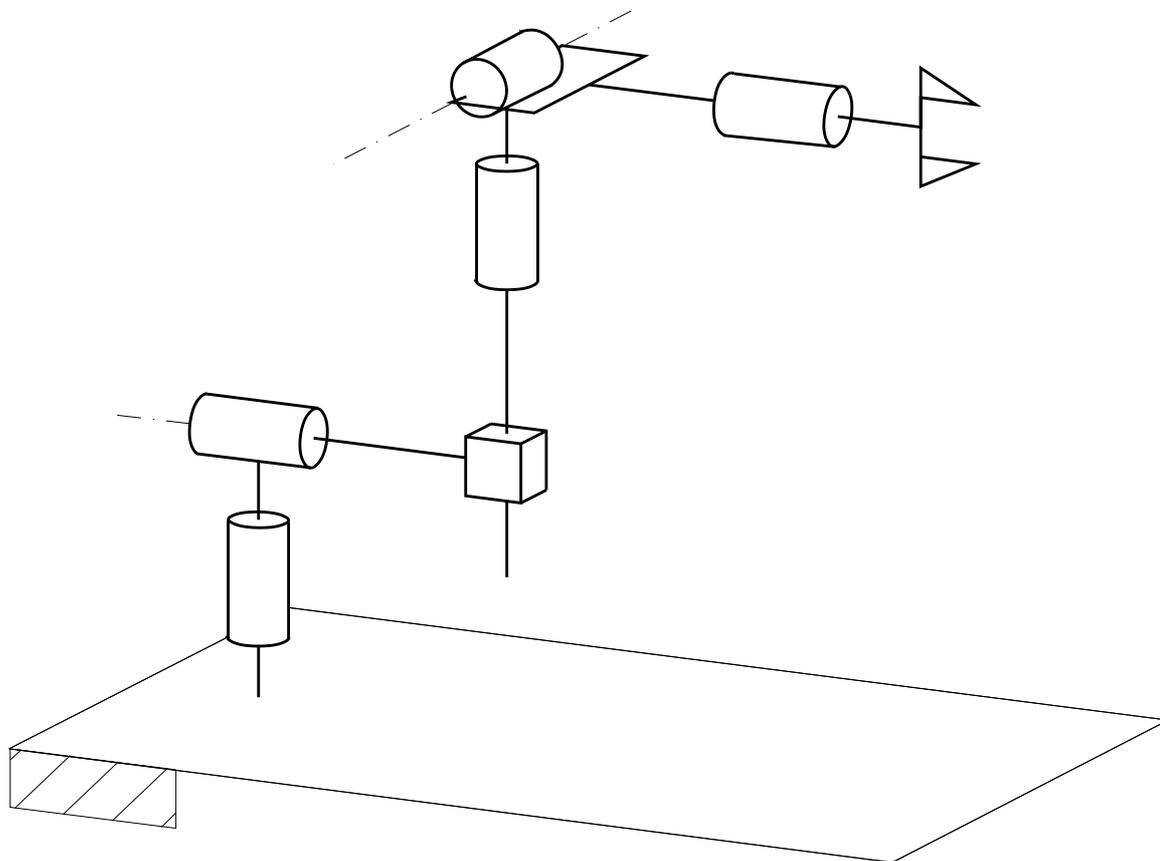
$$\mathbf{A}_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

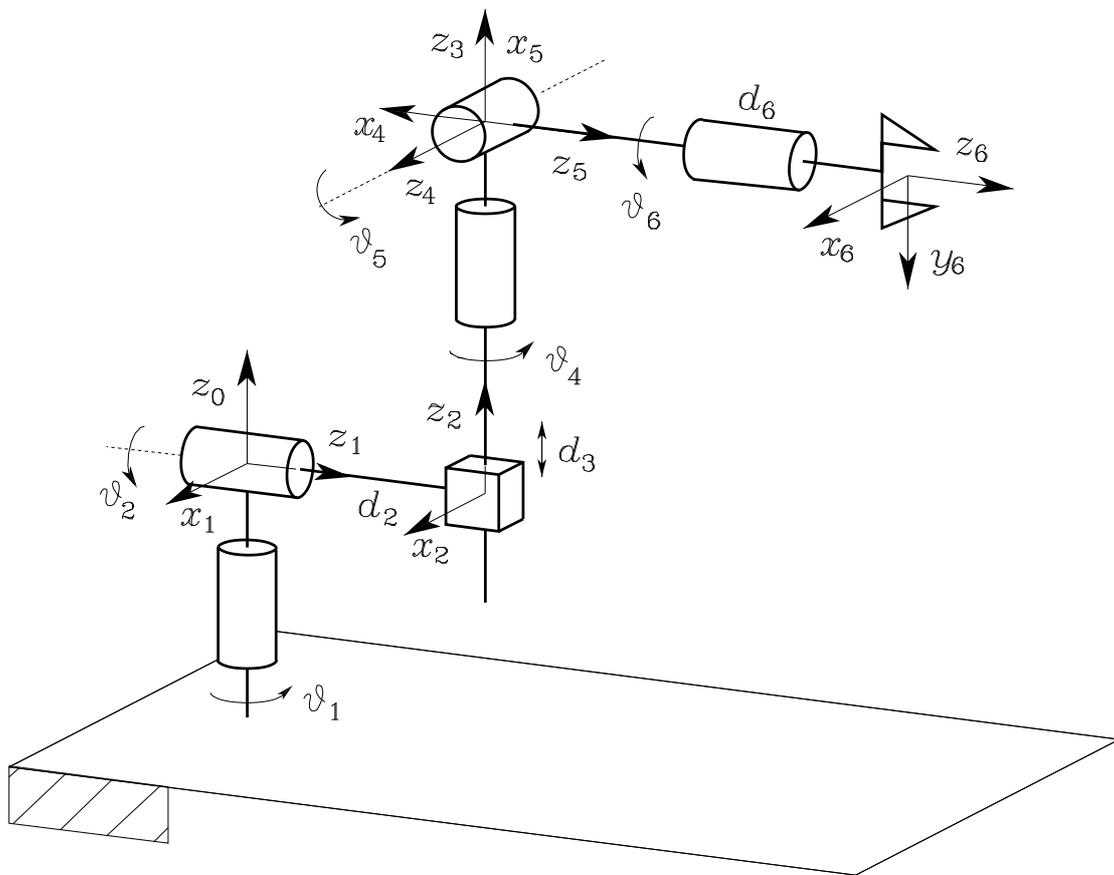
$$\mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_6^3 = \mathbf{A}_4^3 \mathbf{A}_5^4 \mathbf{A}_6^5$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore di Stanford





$$\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_6^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^0 & \mathbf{s}^0 & \mathbf{a}^0 & \mathbf{p}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

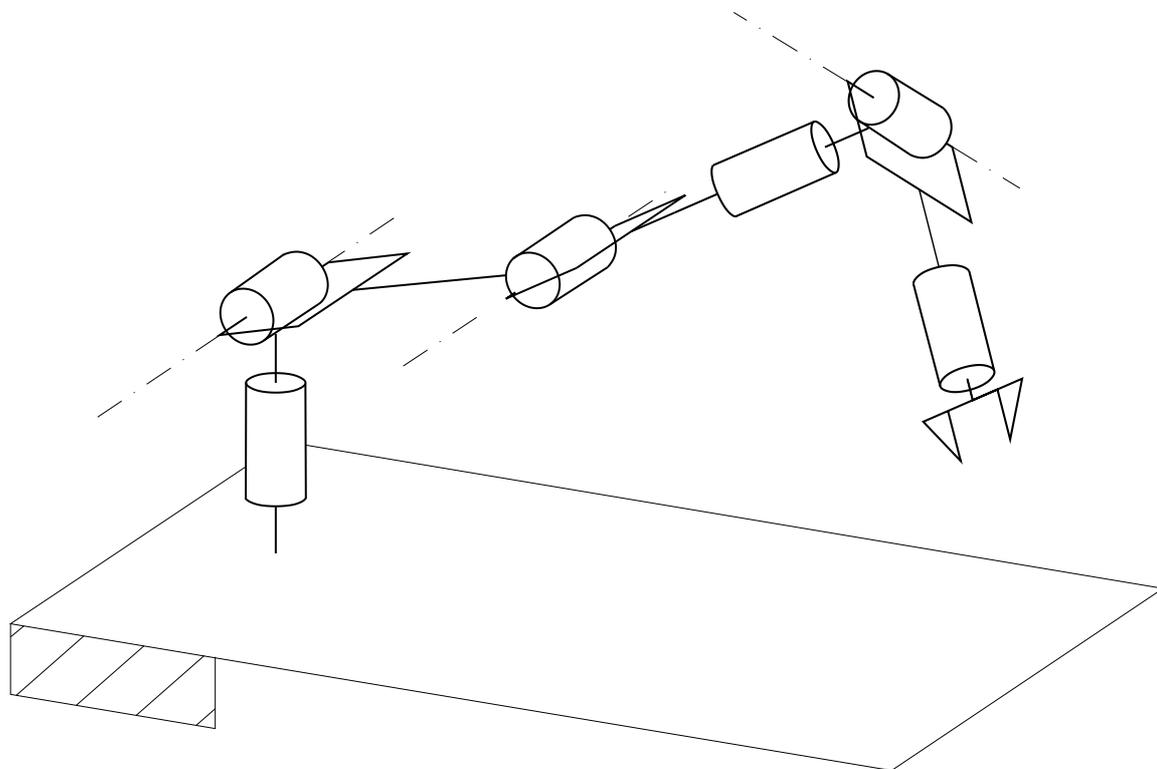
$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix}$$

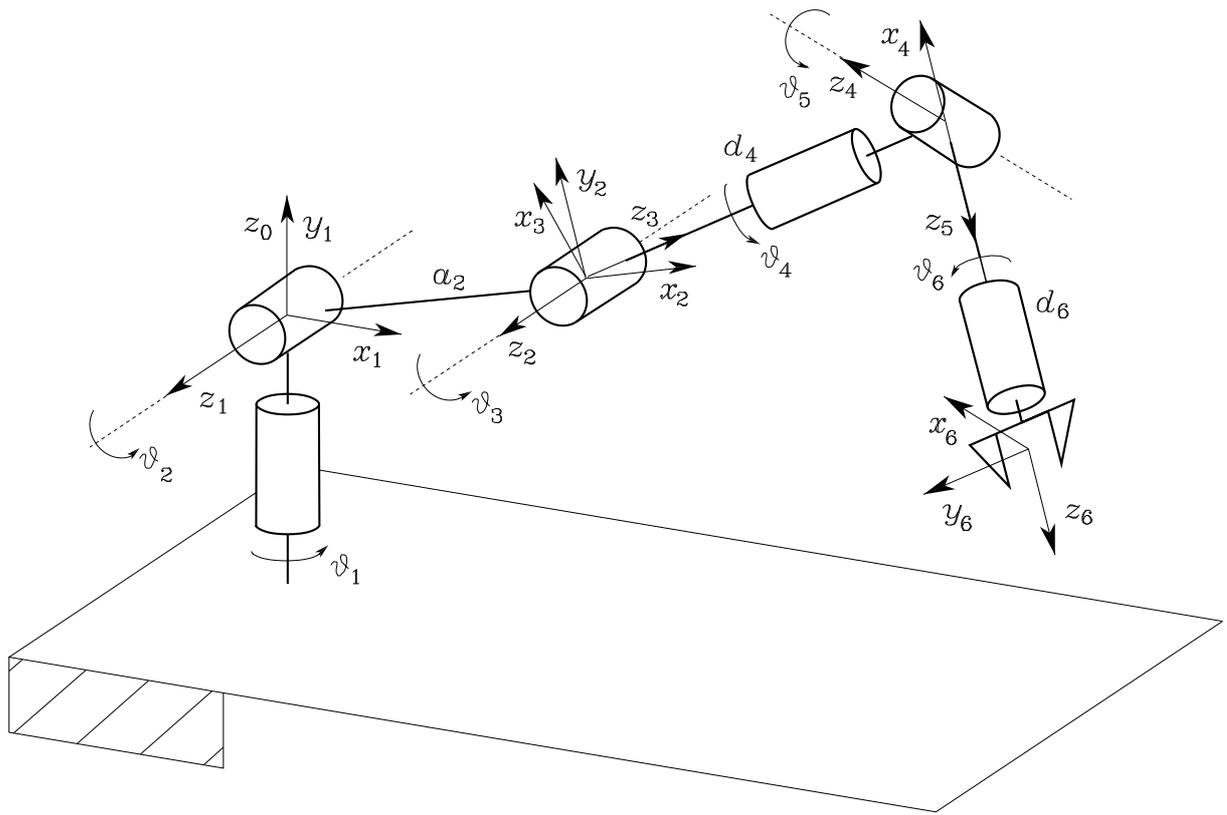
$$\mathbf{n}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) - s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1 (c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) + c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ -s_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) - s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1 (-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) + c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo con polso sferico





| Braccio | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---------|-------|------------|-------|---------------|
| 1 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_1 |
| 2 | a_2 | 0 | 0 | ϑ_2 |
| 3 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_3 |
| 4 | 0 | $-\pi/2$ | d_4 | ϑ_4 |
| 5 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_5 |
| 6 | 0 | 0 | d_6 | ϑ_6 |

$$\mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

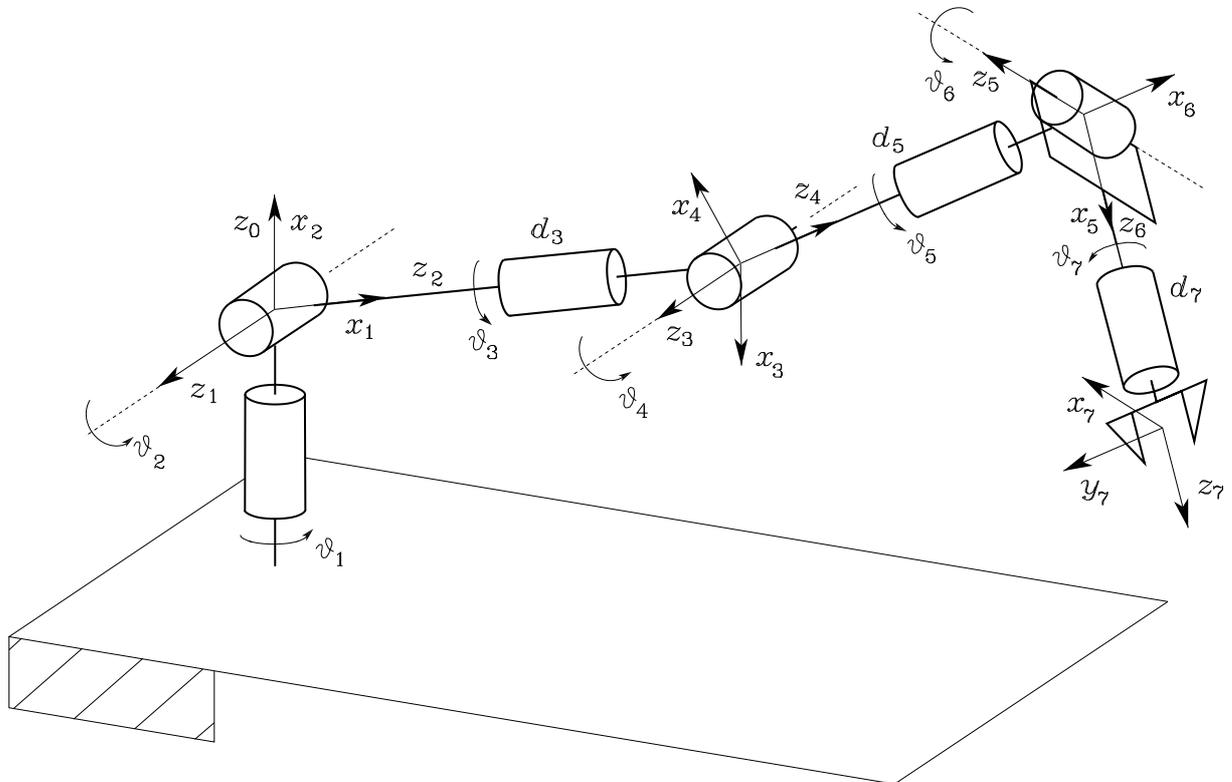
$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} + d_6 (c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + s_1 s_4 s_5) \\ a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} + d_6 (s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - c_1 s_4 s_5) \\ a_2 s_2 - d_4 c_{23} + d_6 (s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6) + s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1 (c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6) - c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + c_{23} s_5 c_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (-c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6) + s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1 (-c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6) - c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ -s_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - c_{23} s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + s_1 s_4 s_5 \\ s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - c_1 s_4 s_5 \\ s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \end{bmatrix}$$

Manipolatore del DLR



| Braccio | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---------|-------|------------|-------|---------------|
| 1 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_1 |
| 2 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_2 |
| 3 | 0 | $\pi/2$ | d_3 | ϑ_3 |
| 4 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_4 |
| 5 | 0 | $\pi/2$ | d_5 | ϑ_5 |
| 6 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_6 |
| 7 | 0 | 0 | d_7 | ϑ_7 |

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & 0 & s_i & 0 \\ s_i & 0 & -c_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 6$$

$$\mathbf{A}_7^6 = \begin{bmatrix} c_7 & -s_7 & 0 & 0 \\ s_7 & c_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_7^0 = \begin{bmatrix} d_3 x_{d_3} + d_5 x_{d_5} + d_7 x_{d_7} \\ d_3 y_{d_3} + d_5 y_{d_5} + d_7 y_{d_7} \\ d_3 z_{d_3} + d_5 z_{d_5} + d_7 z_{d_7} \end{bmatrix}$$

$$x_{d_3} = c_1 s_2$$

$$x_{d_5} = c_1 (c_2 c_3 s_4 - s_2 c_4) + s_1 s_3 s_4$$

$$x_{d_7} = c_1 (c_2 k_1 + s_2 k_2) + s_1 k_3$$

$$y_{d_3} = s_1 s_2$$

$$y_{d_5} = s_1 (c_2 c_3 s_4 - s_2 c_4) - c_1 s_3 s_4$$

$$y_{d_7} = s_1 (c_2 k_1 + s_2 k_2) - c_1 k_3$$

$$z_{d_3} = -c_2$$

$$z_{d_5} = c_2 c_4 + s_2 c_3 s_4$$

$$z_{d_7} = s_2 (c_3 (c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_3 s_5 s_6) - c_2 k_2$$

$$k_1 = c_3 (c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_3 s_5 s_6$$

$$k_2 = s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6$$

$$k_3 = s_3 (c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) - c_3 s_5 s_6$$

$$\mathbf{n}_7^0 = \begin{bmatrix} ((x_a c_5 + x_c s_5) c_6 + x_b s_6) c_7 + (x_a s_5 - x_c c_5) s_7 \\ ((y_a c_5 + y_c s_5) c_6 + y_b s_6) c_7 + (y_a s_5 - y_c c_5) s_7 \\ (z_a c_6 + z_c s_6) c_7 + z_b s_7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_7^0 = \begin{bmatrix} -((x_a c_5 + x_c s_5) c_6 + x_b s_6) s_7 + (x_a s_5 - x_c c_5) c_7 \\ -((y_a c_5 + y_c s_5) c_6 + y_b s_6) s_7 + (y_a s_5 - y_c c_5) c_7 \\ -(z_a c_6 + z_c s_6) s_7 + z_b c_7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_7^0 = \begin{bmatrix} (x_a c_5 + x_c s_5) s_6 - x_b c_6 \\ (y_a c_5 + y_c s_5) s_6 - y_b c_6 \\ z_a s_6 - z_c c_6 \end{bmatrix}$$

$$x_a = (c_1 c_2 c_3 + s_1 s_3) c_4 + c_1 s_2 s_4$$

$$x_b = (c_1 c_2 c_3 + s_1 s_3) s_4 - c_1 s_2 c_4$$

$$x_c = c_1 c_2 s_3 - s_1 c_3$$

$$y_a = (s_1 c_2 c_3 - c_1 s_3) c_4 + s_1 s_2 s_4$$

$$y_b = (s_1 c_2 c_3 - c_1 s_3) s_4 - s_1 s_2 c_4$$

$$y_c = s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3$$

$$z_a = (s_2 c_3 c_4 - c_2 s_4) c_5 + s_2 s_3 s_5$$

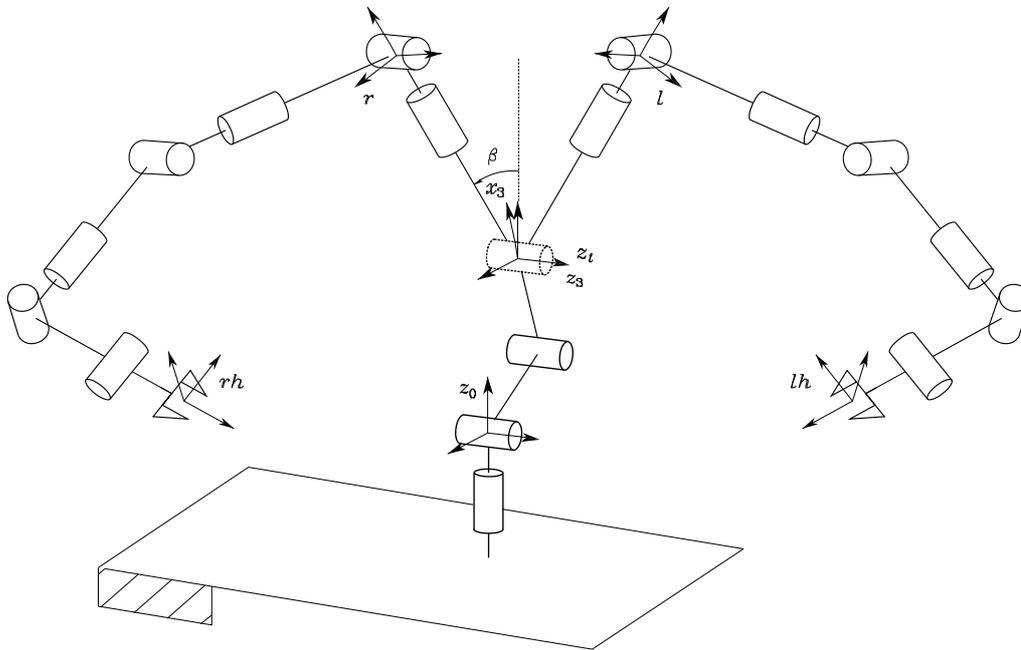
$$z_b = (s_2 c_3 s_4 + c_2 c_4) s_5 - s_2 s_3 c_5$$

$$z_c = s_2 c_3 s_4 + c_2 c_4$$

★ se $\alpha_7 = \pi/2$

$$\mathbf{A}_7^6 = \begin{bmatrix} c_7 & 0 & s_7 & a_7 c_7 \\ s_7 & 0 & -c_7 & a_7 s_7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore umanoide



- Braccia costituite da due manipolatori del DLR ($\alpha_7 = \pi/2$)
- Struttura di collegamento tra l'organo terminale del torso antropomorfo e le terne base dei manipolatori che fungono da braccia
 - ★ meccanismo che permette di mantenere il 'petto' del manipolatore umanoide sempre ortogonale al suolo ($\vartheta_4 = -\vartheta_2 - \vartheta_3$)
- Cinematica diretta

$$\mathbf{T}_{rh}^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_t^3 \mathbf{T}_r^t \mathbf{T}_{rh}^r$$

$$\mathbf{T}_{lh}^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_t^3 \mathbf{T}_l^t \mathbf{T}_{lh}^l$$

$$\mathbf{T}_t^3 = \begin{bmatrix} c_{23} & s_{23} & 0 & 0 \\ -s_{23} & c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ★ \mathbf{T}_3^0 come nel manipolatore antropomorfo
- ★ \mathbf{T}_r^t e \mathbf{T}_l^t dipendono da β
- ★ \mathbf{T}_{rh}^r e \mathbf{T}_{lh}^r come nel manipolatore del DLR

SPAZIO DEI GIUNTI E SPAZIO OPERATIVO

- Spazio dei giunti

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

- ★ $q_i = \vartheta_i$ (giunto rotoidale)
- ★ $q_i = d_i$ (giunto prismatico)

- Spazio operativo

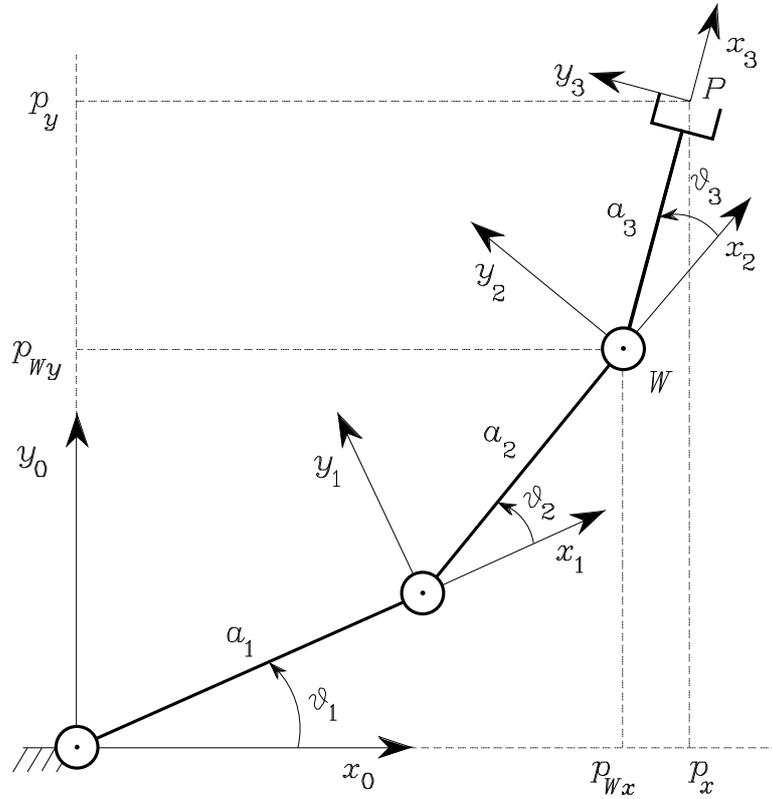
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix}$$

- ★ \mathbf{p} (posizione)
- ★ ϕ (orientamento)

- Equazione cinematica diretta

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q})$$

- Esempio



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

Spazio di lavoro

- Spazio di lavoro *raggiungibile*

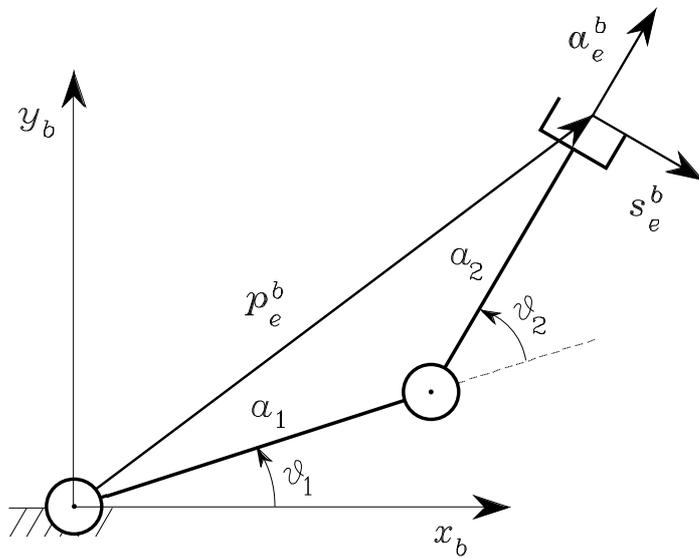
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}) \quad q_{im} \leq q_i \leq q_{iM} \quad i = 1, \dots, n$$

★ elementi di superficie planare, sferica, toroidale e cilindrica

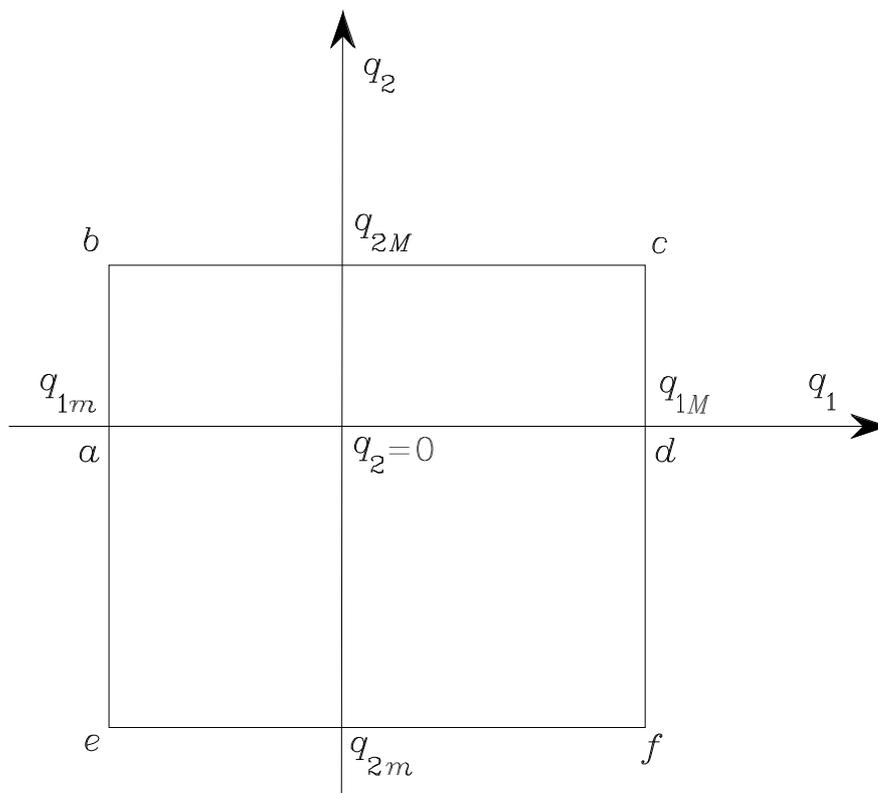
- Spazio di lavoro *destro*

★ orientamenti diversi

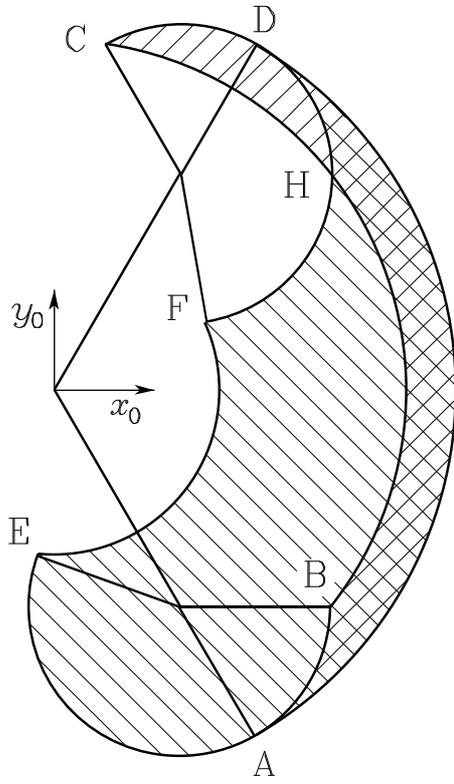
- Esempio



★ configurazioni ammissibili



★ spazio di lavoro



- Accuratezza
 - ★ scostamento tra posizione conseguita con la postura assegnata e posizione calcolata tramite la cinematica diretta
 - ★ valori tipici: (0.2, 1) mm

- Ripetibilità
 - ★ capacità del manipolatore di tornare in una posizione precedentemente raggiunta
 - ★ valori tipici: (0.02, 0.2) mm

- Ridondanza cinematica
 - ★ $m < n$ (intrinseca)
 - ★ $r < m = n$ (funzionale)

CALIBRAZIONE CINEMATICA

- Valori precisi dei parametri DH per migliorare l'accuratezza di un manipolatore
- Equazione cinematica diretta in funzione di tutti i parametri

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\vartheta})$$

\mathbf{x}_m locazione misurata

\mathbf{x}_n locazione nominale (parametri fissi + variabili giunto)

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x} &= \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{a}} \Delta \mathbf{a} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \Delta \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \Delta \boldsymbol{\vartheta} \\ &= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\zeta}_n) \Delta \boldsymbol{\zeta}\end{aligned}$$

★ l misure ($lm \gg 4n$)

$$\Delta \bar{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_l \end{bmatrix} \Delta \zeta = \bar{\Phi} \Delta \zeta$$

• Soluzione

$$\Delta \zeta = (\bar{\Phi}^T \bar{\Phi})^{-1} \bar{\Phi}^T \Delta \bar{x}$$

$$\zeta' = \zeta_n + \Delta \zeta$$

... finché $\Delta \zeta$ converge

- ★ stime più accurate dei parametri fissi
- ★ correzioni alle misure dei trasduttori

Inizializzazione

- postura di riferimento (*home*)

PROBLEMA CINEMATICO INVERSO

- Cinematica diretta

- ★ $q \implies T$

- ★ $q \implies x$

- Cinematica inversa

- ★ $T \implies q$

- ★ $x \implies q$

- Complessità

- ★ soluzione analitica (in forma chiusa) ?

- ★ soluzioni multiple

- ★ infinite soluzioni

- ★ non esistono soluzioni ammissibili

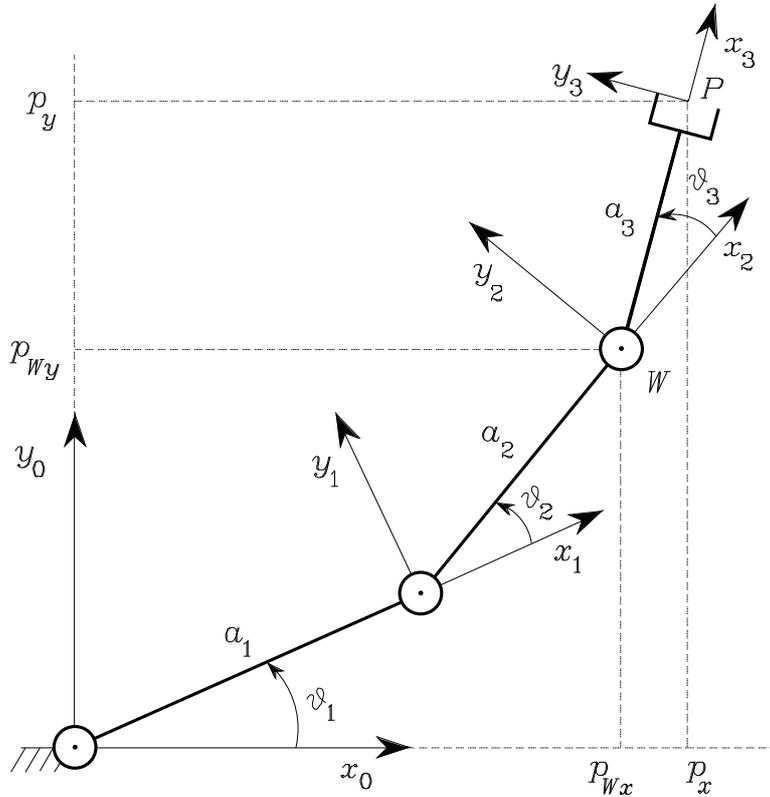
- Intuizione

- ★ algebrica

- ★ geometrica

- Tecniche numeriche

Soluzione del manipolatore planare a tre bracci



- Soluzione algebrica

$$\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$$

$$p_{Wx} = p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$p_{Wy} = p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

$$c_2 = \frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

$$\vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

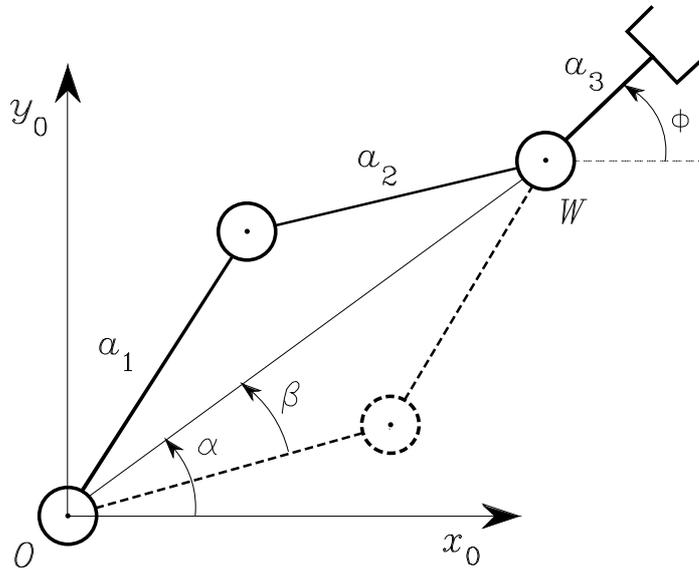
$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2c_2)p_{W_y} - a_2s_2p_{W_x}}{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}$$

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2c_2)p_{W_x} + a_2s_2p_{W_y}}{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}$$

$$\vartheta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1)$$

$$\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2$$

- Soluzione geometrica



$$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}.$$

$$\vartheta_2 = \cos^{-1}(c_2)$$

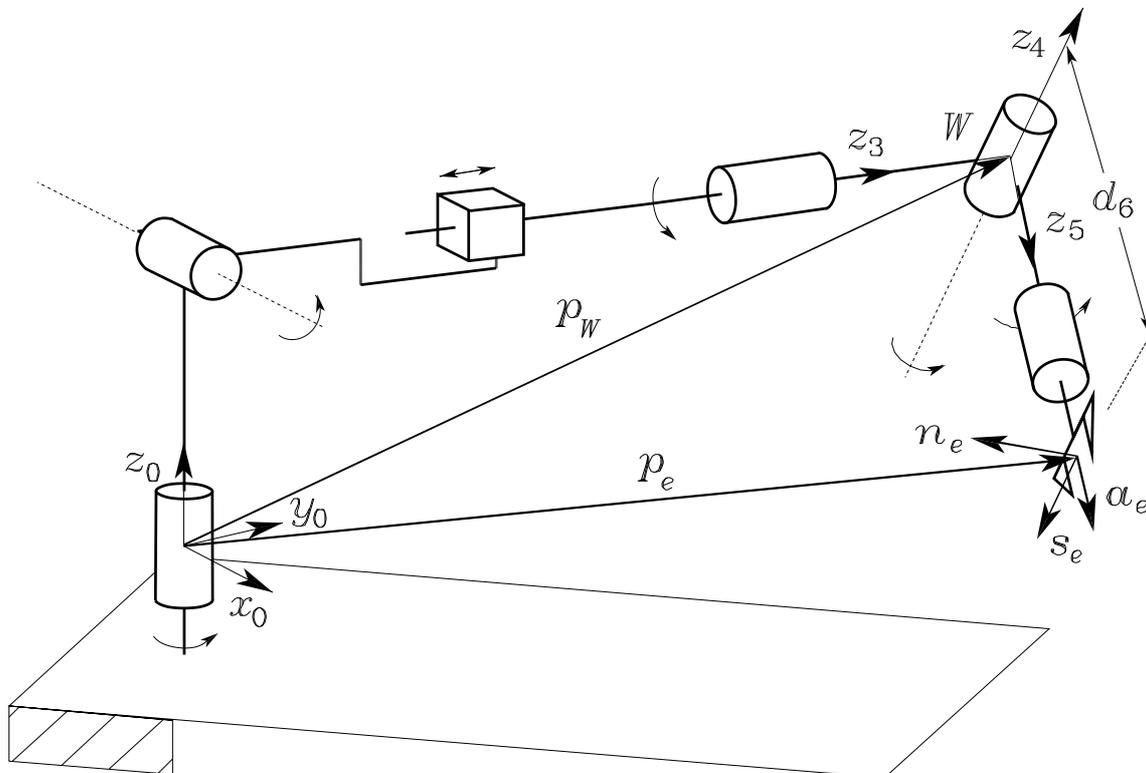
$$\alpha = \text{Atan2}(p_{Wy}, p_{Wx})$$

$$c_\beta \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} = a_1 + a_2 c_2$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}} \right)$$

$$\vartheta_1 = \alpha \pm \beta$$

Soluzione di manipolatori con polso sferico

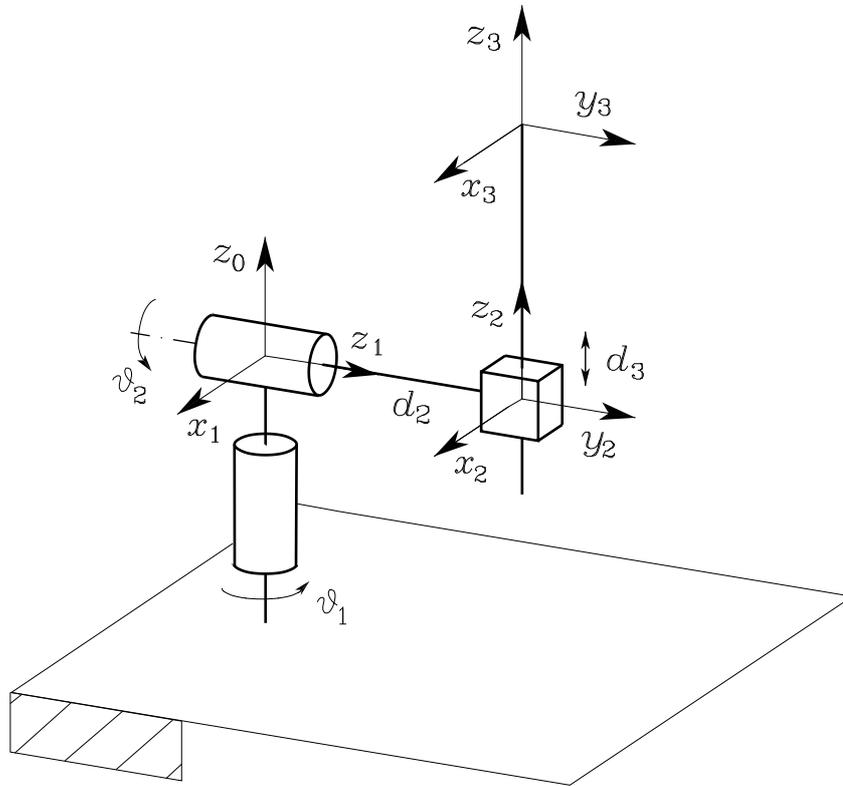


$$\mathbf{p}_W = \mathbf{p} - d_6 \mathbf{a}$$

- Soluzione disaccoppiata

- ★ calcolare la posizione del polso $\mathbf{p}_W(q_1, q_2, q_3)$
- ★ risolvere la cinematica inversa per (q_1, q_2, q_3)
- ★ calcolare $\mathbf{R}_3^0(q_1, q_2, q_3)$
- ★ calcolare $\mathbf{R}_6^3(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) = \mathbf{R}_3^{0T} \mathbf{R}$
- ★ risolvere la cinematica inversa per l'orientamento $(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)$

Soluzione del manipolatore sferico



$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2$$

$$\mathbf{p}_W^1 = \begin{bmatrix} p_{Wx} c_1 + p_{Wy} s_1 \\ -p_{Wz} \\ -p_{Wx} s_1 + p_{Wy} c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 s_2 \\ -d_3 c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad s_1 = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$(d_2 + p_{W_y})t^2 + 2p_{W_x}t + d_2 - p_{W_y} = 0$$

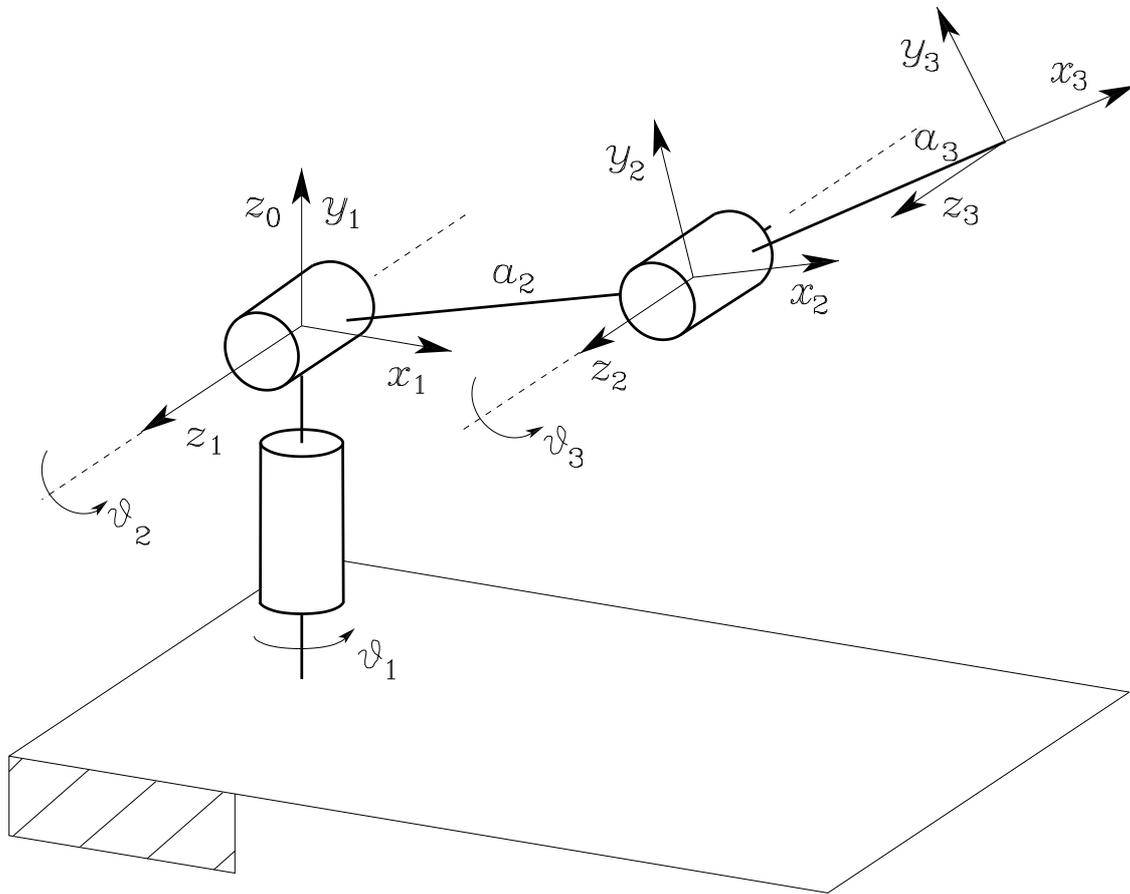
$$\vartheta_1 = 2\text{Atan2}\left(-p_{W_x} \pm \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - d_2^2}, d_2 + p_{W_y}\right)$$

$$\frac{p_{W_x}c_1 + p_{W_y}s_1}{-p_{W_z}} = \frac{d_3s_2}{-d_3c_2}$$

$$\vartheta_2 = \text{Atan2}(p_{W_x}c_1 + p_{W_y}s_1, p_{W_z})$$

$$d_3 = \sqrt{(p_{W_x}c_1 + p_{W_y}s_1)^2 + p_{W_z}^2}$$

Soluzione del manipolatore antropomorfo



$$p_{Wx} = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$p_{Wy} = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$p_{Wz} = a_2s_2 + a_3s_{23}$$

$$c_3 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}$$

$$s_3 = \pm \sqrt{1 - c_3^2}$$

$$\vartheta_3 = \text{Atan2}(s_3, c_3)$$



$$\vartheta_{3,I} \in [-\pi, \pi]$$

$$\vartheta_{3,II} = -\vartheta_{3,I}$$

$$c_2 = \frac{\pm \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} (a_2 + a_3 c_3) + p_{Wz} a_3 s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 c_3}$$

$$s_2 = \frac{p_{Wz} (a_2 + a_3 c_3) \mp \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} a_3 s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 c_3}$$

$$\vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

↓

★ per $s_3^+ = \sqrt{1 - c_3^2}$:

$$\vartheta_{2,I} = \text{Atan2} \left((a_2 + a_3 c_3) p_{Wz} - a_3 s_3^+ \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \right. \\ \left. (a_2 + a_3 c_3) \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3 s_3^+ p_{Wz} \right)$$

$$\vartheta_{2,II} = \text{Atan2} \left((a_2 + a_3 c_3) p_{Wz} + a_3 s_3^+ \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \right. \\ \left. -(a_2 + a_3 c_3) \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3 s_3^+ p_{Wz} \right)$$

★ per $s_3^- = -\sqrt{1 - c_3^2}$:

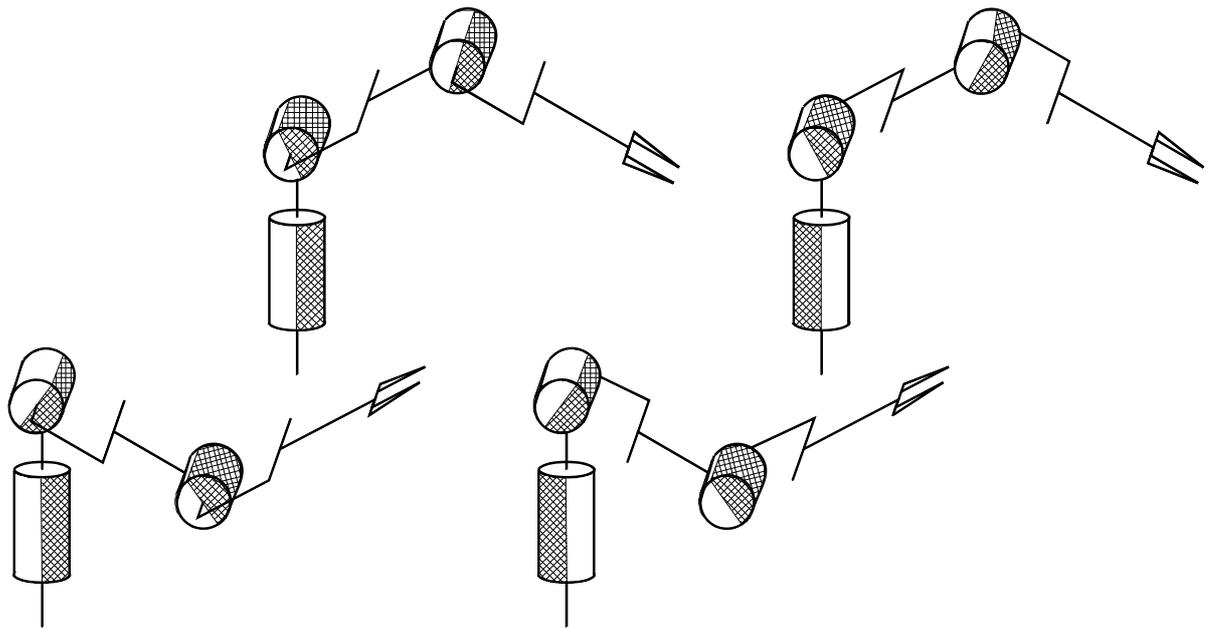
$$\vartheta_{2,III} = \text{Atan2} \left((a_2 + a_3 c_3) p_{Wz} - a_3 s_3^- \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \right. \\ \left. (a_2 + a_3 c_3) \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3 s_3^- p_{Wz} \right)$$

$$\vartheta_{2,IV} = \text{Atan2} \left((a_2 + a_3 c_3) p_{Wz} + a_3 s_3^- \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \right. \\ \left. -(a_2 + a_3 c_3) \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3 s_3^- p_{Wz} \right)$$

$$\vartheta_{1,I} = \text{Atan2}(p_{W_y}, p_{W_x})$$

$$\vartheta_{1,II} = \text{Atan2}(-p_{W_y}, -p_{W_x})$$

- Quattro configurazioni ammissibili



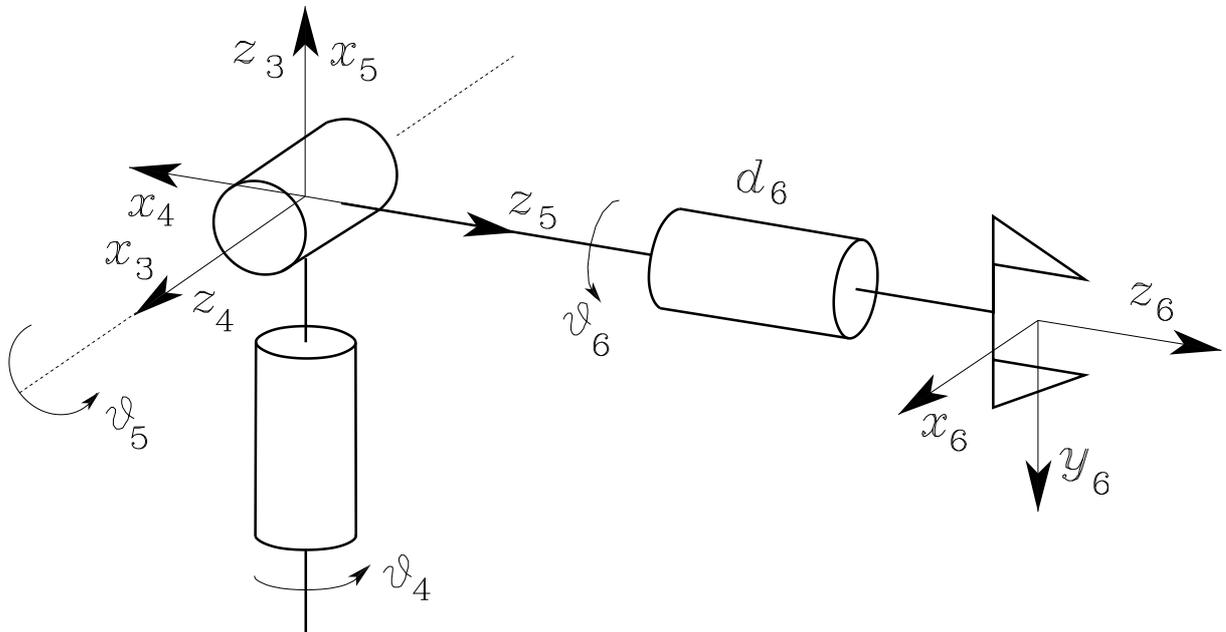
$$(\vartheta_{1,I}, \vartheta_{2,I}, \vartheta_{3,I}) \quad (\vartheta_{1,I}, \vartheta_{2,III}, \vartheta_{3,II})$$

$$(\vartheta_{1,II}, \vartheta_{2,II}, \vartheta_{3,I}) \quad (\vartheta_{1,II}, \vartheta_{2,IV}, \vartheta_{3,II})$$

★ soluzione univoca solo se

$$p_{W_x} \neq 0 \quad p_{W_y} \neq 0$$

Soluzione del polso sferico



$$\mathbf{R}_6^3 = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta_4 = \text{Atan2}(a_y^3, a_x^3)$$

$$\vartheta_5 = \text{Atan2}\left(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right)$$

$$\vartheta_6 = \text{Atan2}(s_z^3, -n_z^3)$$

$$\vartheta_4 = \text{Atan2}(-a_y^3, -a_x^3)$$

$$\vartheta_5 = \text{Atan2}\left(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right)$$

$$\vartheta_6 = \text{Atan2}(-s_z^3, n_z^3)$$