Algebra matriciale

Algebra

- Un algebra è un sistema di segni in cui sono definite delle "operazioni"
- Algebra scalare
- Algebra dei vettori
- Algebra matriciale

In algebra matriciale un "numero" è chiamato "scalare"

Vettori 1

vettore colonna

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vettore riga

$$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

elementi

un vettore è un insieme di numeri che hanno qualche cosa in comune, ad es. esprimono le misurazioni di una variabile

Vettori 2

In generale un vettore si indica con una lettera minuscola in grassetto. Formalmente i vettori hanno una dimensione (ovvero il numero di elementi che contengono)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

n è la dimensione del vettore

Vettori: elementi corrispondenti

Gli elementi di due vettori che occupano le stesse posizioni

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Vettori: uguaglianza

Due vettori i cui elementi corrispondenti sono uguali

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Vettori: vettore opposto

E’ un vettore i cui elementi corrispondenti sono uguali a quelli di un altro ma di segno opposto

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix} = -\mathbf{a}$$

Vettori: zero e unità

Due vettori particolari

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1}$$

Vettori: trasposta

Si chiama **trasposto** un vettore in cui le righe diventano colonne o viceversa.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

Le trasposte si indicano con un apice. Nei vettori, per definizione, il vettore riga si considera “trasposto” di un vettore colonna

Vettori: operazioni

Con gli scalari

- addizione
- moltiplicazione

Tra vettori

- addizione
- moltiplicazione

Vettori: op. con gli scalari 1

$$3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 \\ 3+2 \\ 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Addizione

Moltiplicazione

$$3 \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 5 \\ 3\times 2 \\ 3\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Vettori: op. con gli scalari 2

$$-3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+5 \\ -3+2 \\ -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sottrazione come addizione di numero negativo

Divisione come moltiplicazione per il reciproco

$$\frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\times 5 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.67 \\ 0.67 \\ 1.33 \end{bmatrix}$$

Vettori: op. tra vettori 1

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+5\\2+2\\3+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\4\\7\end{bmatrix}$$

Solo se hanno le stesse dimensioni

Addizione

Sottrazione

$$\begin{bmatrix}5\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-1\\2-2\\4-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}$$

Vettori: op. tra vettori 2

$$\begin{bmatrix}5 & 2 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=$$

Moltiplicazione

$$5(1)+2(2)+4(3)=5+4+12=\boxed{21}$$

il risultato è uno scalare

Solo se hanno le stesse dimensioni e solo fra un v. riga e un v. colonna

Vettore: prodotto scalare

Per prodotto scalare di due vettori si intende la moltiplicazione della trasposta del primo per il secondo: ovvero **a’b**

$$\mathbf{a}'\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1(1) + 2(2) + 3(3)$$

Somma dei valori al quadrato

Somma dei valori

$$1'\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1(1) + 1(2) + 1(3)$$

Matrici

Una matrice è un insieme di numeri che hanno qualche cosa in comune, disposti in righe e colonne. Ad es. una **tabella di dati statistici**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

La matrice si indica con una lettera maiuscola in grassetto

Il primo indice indica la riga e il secondo indica la colonna

Uguaglianza, trasposta…

Elementi corrispondenti: come per i vettori

Uguaglianza: come per i vettori

Matrice opposta: come per i vettori

Trasposta: le righe di **A** diventano le colonne di **A’**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(A’)’=A

Matrici: op. con scalari 1

Addizione

$$3 + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \\ 3+4 & 3+3 & 3+2 & 3+1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Si somma lo scalare ad ogni elemento

Matrici: op. con scalari 2

Moltiplicazione

$$3 \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3\times 1 & 3\times 2 & 3\times 3 & 3\times 4 \\ 3\times 4 & 3\times 3 & 3\times 2 & 3\times 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Si moltiplica lo scalare ad ogni elemento

Matrici: op. fra matrici 1

Addizione: si sommano gli elementi corrispondenti

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 4+6 \\ 1+4 & 3+2 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Solo se le due matrici hanno la stessa dimensione

Matrici: moltiplicazione

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda

2 x $\boxed{\textbf{3} \quad\quad \textbf{3}}$ **x 2**

La matrice risultato sarà **2 x 2**

Si usa il meccanismo della moltiplicazione dei vettori, applicandolo ad ogni riga della matrice **A** e ad ogni colonna della **B**

Moltiplicazione: ovvero

$$c_{11} = 1(2) + 3(3) + 2(-2) = 2 + 9 - 4 = 7$$

$$c_{12} = 1(1) + 3(4) + 2(1) = 1 + 12 + 2 = 15$$

$$c_{21} = -1(2) + 2(3) + 3(-2) = -2 + 6 - 6 = 2$$

$$c_{22} = -1(1) + 2(4) + 3(1) = -1 + 8 + 3 = 10$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione fra vettori

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(5) & 1(2) & 1(4)\\2(5) & 2(2) & 2(4)\\3(5) & 3(2) & 3(4)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}5 & 2 & 4\\10 & 4 & 8\\15 & 6 & 12\end{bmatrix}$$

Solo se hanno le stesse dimensioni e solo fra un v. colonna e un v. riga

Matrici particolari 1

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 0\end{bmatrix}$$

Matrice quadrata: quando il numero delle righe è lo stesso di quello delle colonne

Matrice nulla: una matrice quadrata con tutti elementi uguali a 0

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Matrice identica: una matrice quadrata con 1 lungo la diagonale principale e 0 negli altri

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matrici particolari 2

Matrice diagonale: una matrice quadrata con valori diversi da 0 lungo la diagonale principale e 0 negli altri

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice simmetrica: una matrice quadrata speculare lungo la diagonale principale

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinante

Un valore che si può individuare a partire dagli elementi della matrice; si indica con $|\mathbf{A}|$

$$|\mathbf{A}_{1\times 1}| = a$$

$$|\mathbf{A}_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \boxed{b_{13}} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & \boxed{b_{32}} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + \boxed{b_{13}b_{21}b_{32}}$$

$$-b_{13}b_{22}b_{31} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32}$$

Minori di una matrice

E' il determinante di una submatrice

i determinanti

$$|1| \quad |2| \quad |3| \quad |4|$$

sono minori di ordine 1 della matrice 2 x 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Minori di una matrice

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

sono due dei minori della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Cofattore

è un minore con segno e il segno dipende dalla sua posizione nella matrice

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

In alternativa basta sommare gli indici dell'elemento: se il risultato è pari, il cofattore è positivo; se dispari, negativo.

Matrice singolare

E’ una matrice che ha determinante uguale a ZERO. In questo caso esiste almeno una riga o una colonna che può essere espressa come combinazione lineare di altre.

Se il determinante è diverso da zero, la matrice è “non singolare” e nessuna riga (o colonna) è esprimibile come combinazione lineare di alcune delle altre.

Rango di una matrice

E’ l’ordine del massimo minore non nullo. Il rango di una matrice non singolare coincide con il suo ordine. Mentre in una matrice singolare coincide con il primo minore diverso da 0.

Quindi con il numero di righe o di colonne che non sono combinazioni lineari delle altre.

Matrice inversa e ortogonale

La **matrice inversa** (**A^{-1}**) è la matrice che risolve questa relazione: $\mathbf{A\,A^{-1} = I}$

Dev'essere una matrice quadrata e non sempre esiste la matrice inversa di una matrice.

Un matrice è **ortogonale** se **$AA'=A'A=I$**
L'inversa di una matrice ortogonale è uguale alla trasposta della matrice: $\mathbf{A\,A^{-1} = I=AA'}$

Calcolo dell'inversa

1. Sostituire ogni elemento con il suo cofattore
2. Fare la trasposta
3. Dividere ogni elemento per il determinante

Esempio di inversa

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5/23 & -3/23 \\ -4/23 & 7/23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7(5) - 4(3) = 35 - 12 = 23$$

Verifica dell'inversa

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/23 & -3/23 \\ -4/23 & 7/23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7(5)+3(-4)}{23} & \frac{7(-3)+3(7)}{23} \\ \frac{4(5)+5(-4)}{23} & \frac{4(-3)+5(7)}{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$