Una fabbrica produce lampadine a basso consumo energetico, la cui durata si assume distribuita secondo una Normale con media 1000 ore e deviazione standard (s.q.m.) di 100 ore.

a) Supponendo di osservare la durata per un campione di 200 lampadine, per quante di queste ci si può aspettare una durata compresa tra le 850 e le 1160 ore?
b) Supponendo di non conoscere la durata media delle lampadine, se ne determini il valore, in modo che il 96% delle lampadine duri almeno 1100 ore.

Sia X una v.c. che rappresenta la durata di vita di una lampadina.
Per le ipotesi fatte, X è una v.c. Normale di media uguale a 1000 e di varianza uguale a 100^2=10000. Di conseguenza,

$$Z = \frac{X - 1000}{100}$$

è una v.c. Normale standardizzata.

a) Dato un campione di lampadine di numerosità n = 200, il numero di lampadine ad esso appartenenti che hanno una durata di vita compresa tra le 850 e le 1160 ore è uguale al prodotto della numerosità campionaria per la probabilità che la durata di vita sia compresa nell'intervallo considerato:

$$n \cdot P(850 < X \leq 1160)$$

Ponendo n =200 e effettuando i passaggi si ottiene:

$$200 \cdot P(850 < X \leq 1160) = 200 \cdot P\left(\frac{850 - 1000}{100} < \frac{X - 1000}{100} \leq \frac{1160 - 1000}{100}\right) =$$
$$= 200 \cdot P(-1{,}5 < Z \leq 1{,}6) = 200 \cdot [\Phi(1{,}6) - \Phi(-1{,}5)] = 200 \cdot [\Phi(1{,}6) - (1 - \Phi(1{,}5))] =$$
$$= 200 \cdot [0{,}9452 - (1 - 0{,}9332)] = 200 \cdot 0{,}8784 = 175{,}68$$

Quindi, in un campione di 200 lampadine ci si aspetta che 176 lampadine abbiano una durata di vita compresa tra le 850 e le 1160 ore.

b) Supponiamo che la media della v.c. X sia incognita. Indichiamo con μ tale valore.

$$Z = \frac{X - m}{100}$$

è una v.c. Normale standardizzata.
L'esercizio consiste nel determinare μ in modo tale che risulti: P(X≥1100) = 0,96.
Effettuando alcuni passaggi si ha:

$$0{,}96 = P(X \geq 1100) = P\left(Z \geq \frac{1100 - m}{100}\right) = P(Z \geq z_{0,04})$$

Ma, per la simmetria della distribuzione, si ha: $z_{0,04} = - z_{0,96}$.
A questo punto, il problema consiste nel fatto che sulle tavole per la distribuzione Normale standardizzata non è disponibile l'esatto valore del 96° percentile, in quanto la funzione di ripartizione tabulata passa da 0,9599 a 0,9608 . In corrispondenza di questi due valori la z vale rispettivamente 1,75 e 1,76. Il problema può essere risolto mediante un'interpolazione lineare.
In particolare, indicando con F_1 e F_2 i due valori di probabilità (tali che $F_1 \leq 0{,}96 \leq F_2$)
e con z_1 e z_2 i corrispondenti percentili della z (tali che $z_1 \leq z_{0,96} \leq z_2$), si impone la seguente uguaglianza:

$$\frac{z_{0,96} - z_1}{0{,}96 - F_1} = \frac{z_2 - z_1}{F_2 - F_1} \Rightarrow$$

$$z_{0,96} = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{F_2 - F_1}\left(0{,}96 - F_1\right) = 1{,}75 + \frac{1{,}76 - 1{,}75}{0{,}9608 - 0{,}9599_1}\left(0{,}96 - 0{,}9599\right) = 1{,}751$$

Pertanto si avrà:

$$z_{0,04} = -1{,}751 = \frac{1100 - m}{100} \Rightarrow m = 1100 + 175{,}1 = 1275{,}1$$

Quindi, la durata media di vita delle lampadine che soddisfa la condizione di cui al punto b è uguale a 1275 ore.

Sia data una variabile casuale X Normale di media uguale a 15 e di varianza uguale a 4.
Calcolare le probabilità: $P(10 < X < 16)$ e $P(X \geq 18)$.

Se X è una v.c. Normale di media uguale a 15 e di varianza uguale a 4, la v.c.

$$Z = \frac{X - 15}{\sqrt{4}} = \frac{X - 15}{2}$$

è una v.c. Normale standardizzata.

Di conseguenza, le probabilità cercate sono rispettivamente uguali a:

$$P(10 < X < 16) = P\left(\frac{10-15}{2} < \frac{X-15}{2} < \frac{16-15}{2}\right) = P(-2{,}5 < Z < 0{,}5) =$$
$$= \Phi(0{,}5) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(0{,}5) - [1 - \Phi(2{,}5)] = 0{,}6915 - [1 - 0{,}9938] = 0{,}6853$$

$$P(X \geq 18) = P\left(\frac{X-15}{2} \geq \frac{18-15}{2}\right) = P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z < 1{,}5)$$
$$= 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$