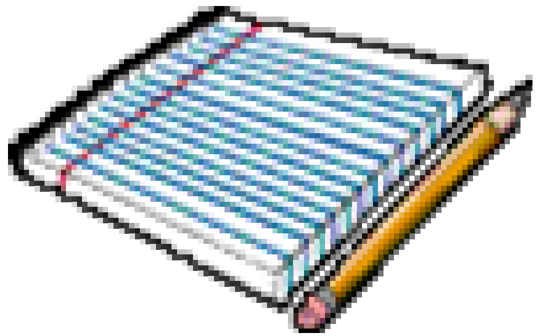
Lezione 11

Gli intervalli di Confidenza



Intervalli di Confidenza

Sia $X_1,\dots X_n$ un campione di ampiezza n estratto dalla popolazione $X\sim(\mu,\sigma^2)$

Per quanto accurato possa essere lo stimatore T del parametro θ, la probabilità che T assuma il valore $T_0= \theta$ è quasi nulla.

$P(T_0= \theta)=0$

E' preferibile individuare un intervallo di valori all'interno del quale possa essere compreso θ

Date due statistiche, $T_1, T_2,$ con $T_1, < T_2$

Che variano al variare del campione.

L'intervallo $T_1 \le \theta \le T_2$ è chiamato intervallo di confidenza ad un livello di probabilità 1-α

$$P(T_1 \le \theta \le T_2) = 1-\alpha$$

ATTENZIONE

Una volta estratto il campione, non ha senso parlare di probabilità perché i valori assunti dalle statistiche T_1eT_2

t_1et_2 sono delle costanti e quindi la probabilità che il parametro θ cada all'interno dell'intervallo è 1 oppure 0.

Per la costruzione di un intervallo di confidenza siamo interessati ad una quantità che non dipenda dal parametro θ

(quantità pivot)

Intervalli di confidenza per la media di una popolazione normale

A) σ^2 nota

Sia $X_1,\dots X_n$ un campione di ampiezza n estratto dalla popolazione $X \sim (\mu,\sigma^2)$

La quantità

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$conf\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Un laboratorio analizza una certa quantità di un prodotto farmaceutico per determinare la concentrazione di principio attivo in esso presente. Tali analisi non sono perfettamente precise; se vengono ripetute per altre quantità del medesimo prodotto i risultati seguono una distribuzione normale con media μ, concentrazione del principio attivo del prodotto incognita e deviazione standard σ=0,19gr/l.

Il laboratorio analizza 4 quantità estratte dal prodotto ottenedo i seguenti risultati

X=(2,066;2,187;1,893;2,009)gr/l

La casa farmaceutica è interessata a conoscere un intervallo di confidenza al 90% del principio attivo del prodotto.

b) σ^2 non nota

Molto spesso la quantità σ^2 non è nota

Si utilizza la quantità

$$\hat{S}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$ Stimatore corretto

Sia $X_1,\ldots X_n$ un campione di ampiezza n estratto dalla popolazione $X\sim(\mu,\sigma^2)$ con σ^2 incognito

La v.c. $t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{\hat{S}}{\sqrt{n}}}$ Si distribuisce come un t di student con n-1 gradi di libertà

$$conf\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Una determinata società impiega i mulini per frantumare minerali conteneti oro.

Prima di effettuare l’acquisto di un terreno ricco di tale minerale, vengono prelevati sedici campioni che presentano il seguente contenuto del prezioso mierale

8,18; 8,72; 9,43; 10,00; 10,18; 10,80;10,94; 11,43; 11,52; 12,40; 12,78; 12,96; 13,73; 14,04; 15,53; 16,10

Si determini un intervallo di confidenza al 90% del contenuto medio di oro sotto l’ipotesi di normalità.

Esercizio 1

Nell'ambito di un programma di monitoraggio dell'inquinamento atmosferico in una grande città, è stata rilevata la concentrazione di ossido di carbonio presente nell'aria in 25 punti della città.
In particolare, è risultato che la concentrazione media dell'inquinante è pari a 12,5 mg/m3 mentre la deviazione standard (scostamento quadratico medio corretto) è uguale a 3,5 mg/m3 . Supponendo che le osservazioni siano indipendenti e che la variabile in esame sia normalmente distribuita, determinare l'intervallo di confidenza al 95 % per il valore medio di concentrazione dell'inquinante nell'aria.

Esercizio 2

Nel corso dell'anno 1999, in una stazione meteorologica dell'Italia Settentrionale sono stati registrati
1379 mm. di precipitazioni atmosferiche, con uno scostamento quadratico medio (corretto) giornaliero pari a 10 mm.
Supponendo che la quantità di precipitazione atmosferica giornaliera sia normalmente distribuita, determinare l'intervallo di confidenza al 90 % per il livello medio di precipitazione giornaliero.

Intervalli di Confidenza per la proporzione π utilizzando la distribuzione normale

f= stimatore di **π**

n sufficientemente grande

$$f - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{f\left(1-f\right)}{n}} \le \pi \le f + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{f\left(1-f\right)}{n}}$$

Esercizio 1

Un’organizzazione di ricerche di mercato contatta un campione casuale di 100 uomini appartenenti ad una grande comunità e trova che la proporzione dello 0,4 del campione, preferisce le lamette dell’impresa committente della ricerca. Si calcoli l’intervallo di confidenza al 95% della proporzione di tutti gli uomini della comunità che preferiscono le lamette dell’impresa committente.

$$\left[0{,}30 \leq \pi \leq 0{,}50\right]$$