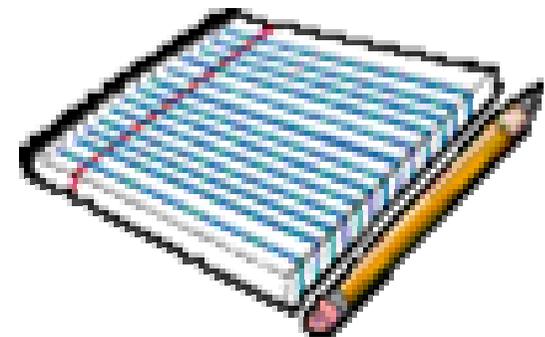


Lezione 2

Gli indici di posizione

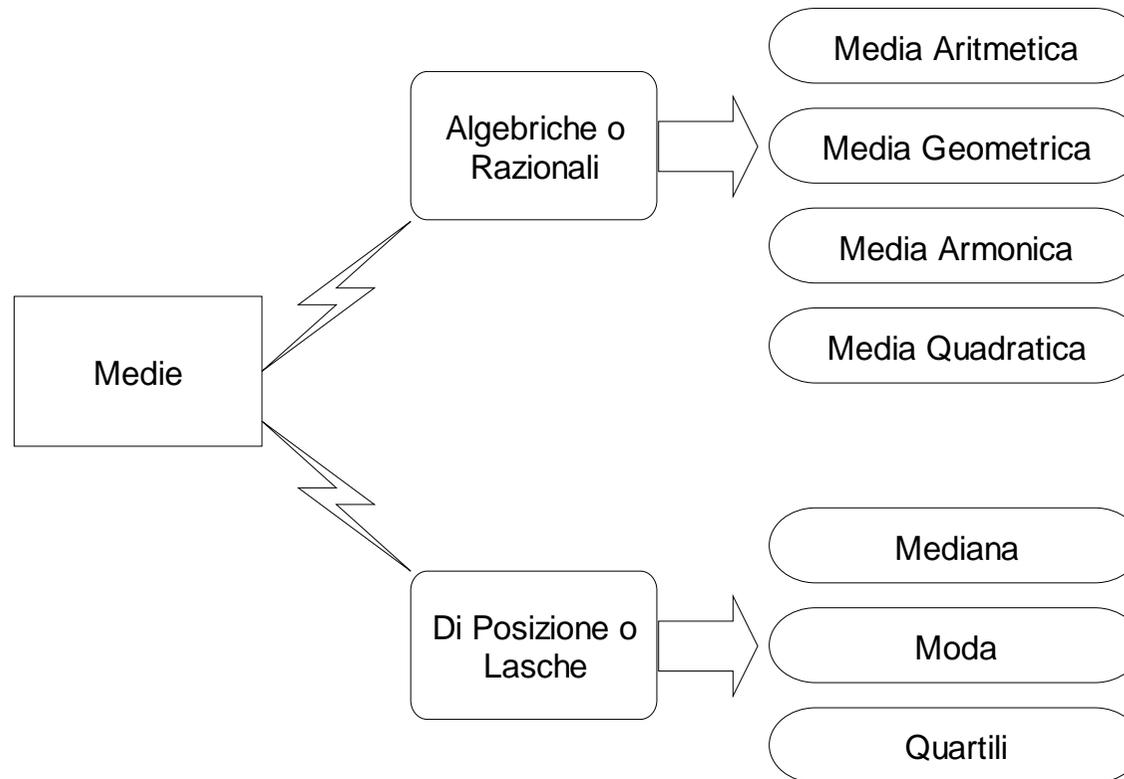




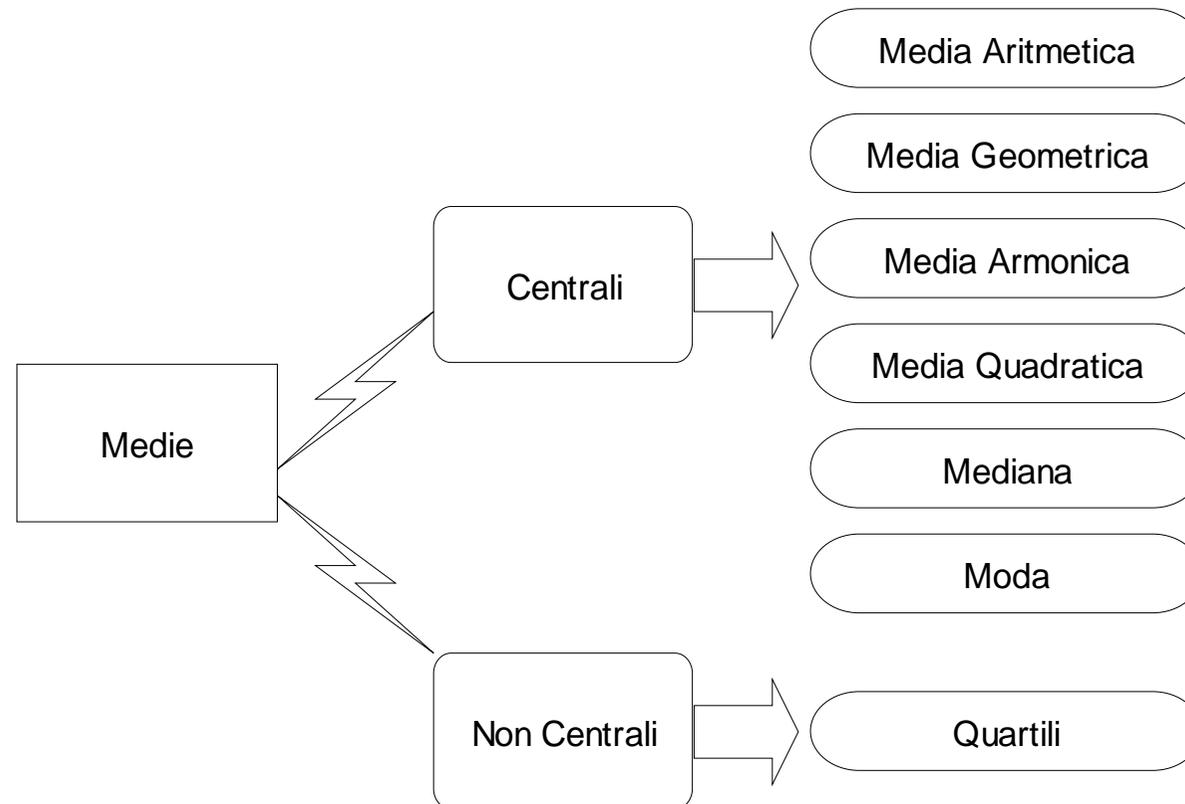
Definizione

Si può chiamare media di una distribuzione, rispetto a una funzione f , quella quantità m che sostituita alle *osservazioni* nella funzione lascia invariato il risultato di una funzione definita a priori (Chisini).

Classificazione delle medie



Un'altra classificazione.....





La Media Aritmetica

Il concetto di **media aritmetica**, definita anche semplicemente **media**, è immediato dal punto di vista intuitivo. E' possibile parlare di media aritmetica di una distribuzione solo per caratteri quantitativi.

La **media aritmetica** di n dati x_1, x_2, \dots, x_n , indicata con \bar{x} o con M , si ottiene come:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

MEDIA ARITMETICA

<i>anni</i>	<i>precipitazioni in millimetri</i>
1981	608,6
1982	694,0
1983	726,4
1984	1.128,6
1985	760,9
1986	887,6
1987	904,6
	5.710,7

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

$$\bar{x} = \frac{608,6 + 694,0 + \dots + 904,6}{7} = \frac{1}{7} \sum_{j=1}^7 x_j = 815,8$$

Proprietà della Media Aritmetica



1) Internalità

Data una serie ordinata di valori: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

$$x_1 \leq M \leq x_n$$

2) Omogeneità

Moltiplicando con una costante c i termini di una serie di valori, anche la media risulta moltiplicata per la costante c

3) Traslativa

Sommando una costante c ai termini di una serie di valori, anche la stessa costante è aggiunta alla serie di valori

4) Associativa

Suddividendo in due o più gruppi i valori della variabile, la media aritmetica della variabile è uguale alla media aritmetica delle medie parziali dei diversi gruppi ponderate con il numero di elementi di ciascuno.



Importanti proprietà

La media conserva l'unità di misura dei valori su cui è stata calcolata

La somma degli scarti positivi dalla media aritmetica è uguale, in valore assoluto, a quella degli scarti negativi, e quindi la somma algebrica di tutti gli scarti è uguale a zero.

Media quadratica



Si definisce **media quadratica** dei valori x , la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati dei valori dati.

$$Mq = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

Media per distribuzioni di frequenze assolute



MEDIA ARITMETICA – distrib. di frequenze assolute

NUM. FIGLI	FREQ.
X	n
0	18
1	33
2	43
3	22
4	11
5	3
	130

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$$

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 18 + 1 \cdot 33 + \dots + 5 \cdot 3}{130} = \frac{1}{130} \sum_{i=1}^6 x_i \cdot n_i = 1,877$$

Media per distribuzioni di frequenze relative



MEDIA ARITMETICA – distrib. di frequenze relative

NUM. FIGLI	freq.ass.	f. relativ
X	n	f
0	18	0,138
1	33	0,254
2	43	0,331
3	22	0,169
4	11	0,085
5	3	0,023
	130	1

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i f_i$$

$$\bar{x} = 0 \cdot 0,138 + 1 \cdot 0,254 + \dots + 5 \cdot 0,023 = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot f_i = 1,877$$

Media per dati raggruppati in classi

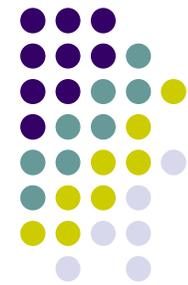


MEDIA ARITMETICA – distribuzione per intervalli

classi di consumo Kw/h	frequenze n	valore centrale c_i	
10 -- 15	3	12,5	$= (15+10)/2$
15 -- 20	9	17,5	
20 -- 30	12	25	
30 -- 50	18	40	
50 -- 75	9	62,5	
75 -- 100	6	87,5	
100 -- 200	3	150	
	60		

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k c_i n_i \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{12,5 \cdot 3 + 17,5 \cdot 9 + \dots + 150 \cdot 3}{60} = 45,87$$

Le medie di posizione: la Moda



LE MEDIE LASCHE - moda

è la modalità che nell'insieme di osservazioni si presenta con la frequenza più alta (è possibile calcolarla per qualsiasi tipo di carattere), anche qualitativi e non ordinabili)

- intervalli con ampiezza w_i costante:
intervallo modale: quello a cui corrisponde la più elevata freq. ass. " n_i "
- intervalli con ampiezza w_i variabile:
intervallo modale: quello a cui corrisponde la più elevata densità di frequenza $d_i = n_i / w_i$



Esempio: calcolo della moda

Moda per distribuzioni per intervalli

concetto di classe modale (classe a cui corrisponde la massima densità di frequenza) → non è detto corrisponda alla classe con massima frequenza (a meno che le classi non abbiano uguale ampiezza)

Densità di frequenza: $\Rightarrow = n_i / (x_i - x_{i-1})$

Esempio 1:

Stature	freq. Ass	densità
160 — 165	10	2
165 — 170	40	8
170 — 175	60	12
175 — 180	10	2
	120	

Moda è: 170 —| 175

Esempio 2:

Stature	freq. Ass	densità	ampiezza
20 — 25	10	2	5
25 — 35	60	6	10
35 — 37	30	15	2
37 — 42	10	2	5
	110		

Moda è: 35 —| 37

La mediana

E' il valore del carattere portato dall'unità statistica che occupa il POSTO CENTRALE nella successione ordinata degli N valori individuali;
è definita per mutabili ordinate rettilineari e per caratteri quantitativi.

L'unità centrale



Se N è dispari \rightarrow occupa il posto $(N+1)/2$



Se N è pari \rightarrow esistono due posti centrali: $(N)/2$ ed $(N/2)+1$



se le osservazioni a essi corrispondenti non coincidono, esse individuano due mediane; in questo caso, se il carattere è quantitativo, si conviene di prendere come valore mediano la semisomma dei due valori mediani.

$$Me = \frac{X_{\frac{N}{2}} + X_{\frac{N}{2}+1}}{2}$$

Proprietà della mediana



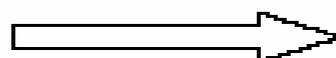
La mediana è più robusta della media aritmetica, cioè riesce ad essere rappresentativa della posizione della distribuzione anche in presenza di valori anomali.

Esempio: calcolo della mediana



E' il valore che occupa il posto centrale nella successione ordinata (non decrescente o non crescente) delle N osservazioni individuali.

<i>anni</i>	<i>precipitazioni in millimetri</i>
1981	608,6
1982	694,0
1983	726,4
1984	1.128,6
1985	760,9
1986	887,6
1987	904,6
	5.710,7



ordinare

<i>precipitazioni in millimetri</i>
608,6
694,0
726,4
760,9
887,6
904,6
1.128,6

$N=7$ (collettivo dispari) \rightarrow la mediana è il carattere portato dall' unità che occupato posto $(7+1)/2$ ossia la 4^o unità ed è pari a 760,9

Mediana carattere quantitativo continuo

E' data la seguente distribuzione di aziende agricole secondo la superficie in ettari:

classi di superficie	aziende
0 -- 1	17.913
1 -- 2	10.238
2 -- 5	13.370
5 -- 10	8.188
10 -- 20	5.620
20 -- 50	3.635
50 -- 100	2.136

Si determini la mediana.

si calcola il totale frequenze assolute e si costruisce una colonna con le frequenze cumulate

classi di superficie	N° aziende (n_i) freq. ass.	freq. Cumulate
0 -- 1	17.913	17.913
1 -- 2	10.238	28.151
2 -- 5	13.370	41.521
5 -- 10	8.188	49.709
10 -- 20	5.620	55.329
20 -- 50	3.635	58.964
50 -- 100	2.136	61.100
	61.100	
Unità centr.		
$N/2$	30.550	
$(N/2)+1$	30.551	

Essendo il collettivo pari la Mediana sarà:

$$Me = \frac{X_{\frac{N}{2}} + X_{\frac{N}{2}+1}}{2}$$

Ipotizzando un tasso di incremento costante all'interno della classe tra ogni unità e la successiva, si avrà che:

Estremo inferiore "2"

Estremo superiore "5"

$$X_{\frac{N}{2}} = X_m + \frac{X_{m+1} - X_m}{n_m} \left(\frac{N}{2} - N_{m-1} \right)$$

Numerosità classe mediana
"13.370"

Posto unità N/2
"30.550"

Freq. Cum. Classe prec. Mediana
"28.151,"

L'ammontare del carattere portato da unità $N/2$:

$$X_{\frac{N}{2}} = 2 + \frac{5-2}{13.370} (30.550 - 28.151) = 2,5383$$

L'ammontare del carattere portato da unità $(N/2)+1$:

$$X_{\frac{N}{2}+1} = 2 + \frac{5-2}{13.370} (30.551 - 28.151) = 2,5385$$

La mediana sarà quindi:

$$Me = \frac{X_{\frac{N}{2}} + X_{\frac{N}{2}+1}}{2} \Rightarrow Me = \frac{2,5383 + 2,5385}{2} = 2,5384$$

I QUANTILI

Sono medie di posizione che suddividono la successione
ORDINATA di valori individuali in un certo numero di parti
ugualmente numerose;

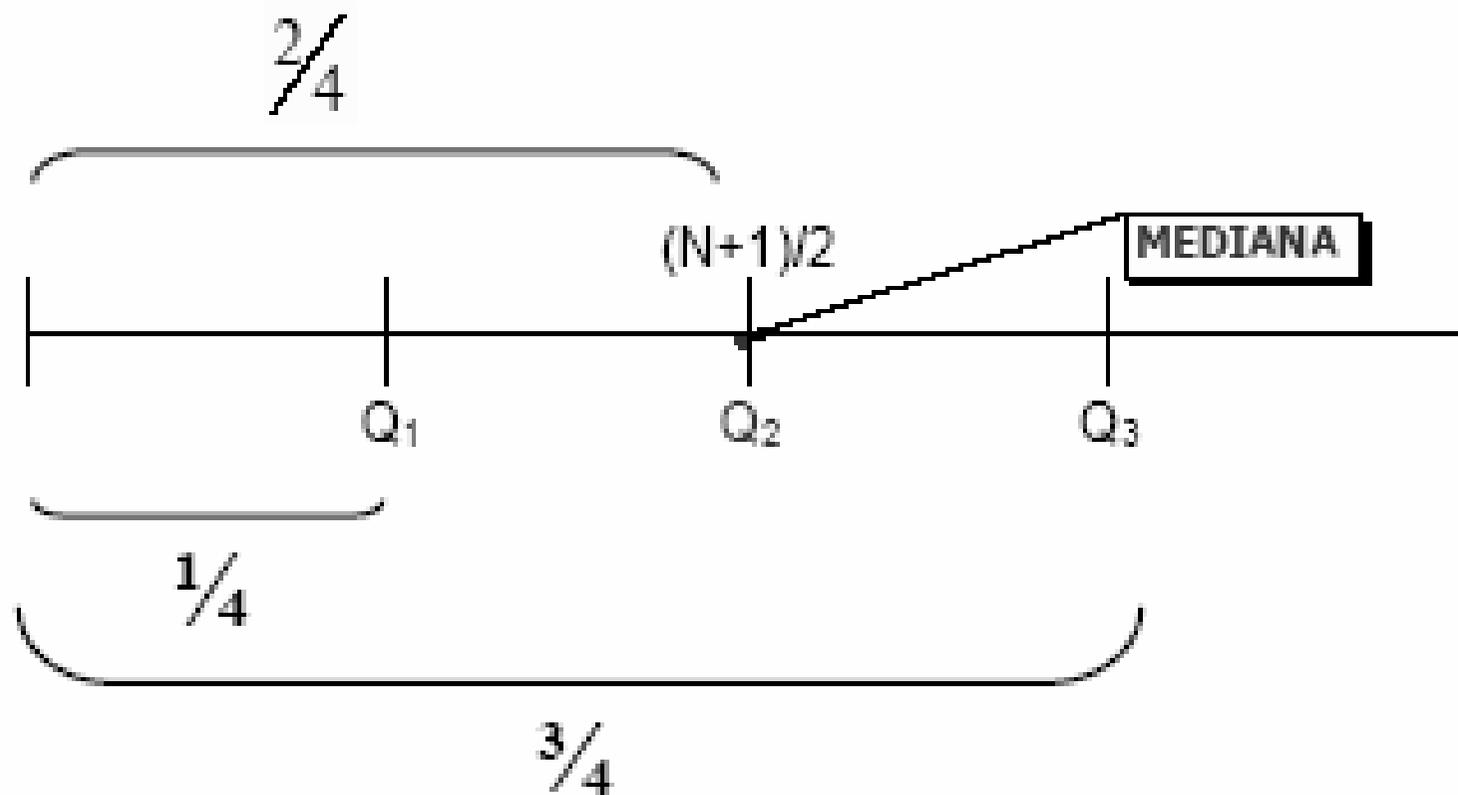
sono definiti per variabili e per mutabili ordinate rettilineari

Quartili \Rightarrow ripartiscono in quattro gruppi di $n/4$ unità

Decili \Rightarrow ripartiscono in dieci gruppi di $n/10$ unità

Centili \Rightarrow ripartiscono in cento gruppi di $n/100$ unità

I QUARTILI sono 3



L' h -esimo quartile Q_h , dividerà il collettivo in due parti e sarà preceduto da una frazione h/q dell'intero collettivo e seguito da una frazione $1-(h/q)$