

3

## Indipendenza e correlazione



1

## Indipendenza



Nella teoria della probabilità, quando affermiamo che due eventi sono indipendenti, intendiamo dire che **il verificarsi o meno di uno di essi non è in alcun modo informativo a riguardo del verificarsi o meno dell'altro.**

Per esempio, gli eventi "oggi è lunedì" e "oggi piove" sono indipendenti.

2

## Definizione di indipendenza



Due eventi  $A$  e  $B$  sono mutuamente **indipendenti** se si verifica la seguente condizione:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$A$  è indipendente da  $B$  se e solo se  $B$  è indipendente da  $A$ .

3

## Eventi indipendenti



$$\text{Se } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

segue che

$$\begin{aligned} P(A | B) &= P(A) \\ P(B | A) &= P(B) \end{aligned}$$

4

## Eventi indipendenti



L'indipendenza tra  $A$  e  $B$  significa che **abbiamo la stessa probabilità di osservare  $A$  all'interno dello spazio ridotto di  $B$  [  $P(A | B)$  ] che all'interno dell'intero spazio campione  $\Omega$  [  $P(A)$  ].**

Lo stesso vale per l'evento  $B$  in riferimento all'evento  $A$ .

5

## Indipendenza



In alcuni casi l'indipendenza tra due eventi è **ovvia**.

In altri casi, invece, l'indipendenza può essere stabilita soltanto **eseguendo i calcoli appropriati**.

6

## Esempio 1



Una carta è scelta a caso da un mazzo ben mescolato.

- La probabilità dell'evento congiunto "asso di cuori" è  $1/52$ .
- La probabilità dell'evento "asso" è  $1/13$ . La probabilità dell'evento "cuori" è  $1/4$ .
- Dato che  $1/4 \times 1/13 = 1/52$ , ne risulta che gli eventi "cuori" e "asso" sono indipendenti.

7

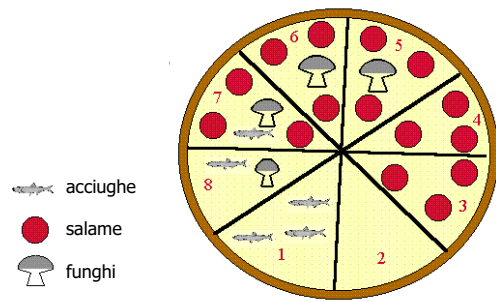
## Esempio 2



"Una fetta di pizza viene scelta a caso. Gli eventi 'la fetta contiene salame' e 'la fetta contiene funghi' sono indipendenti?"

8

## Esempio 2 (prosieguo)



Caso 1

## Esempio 2 (prosieguo)

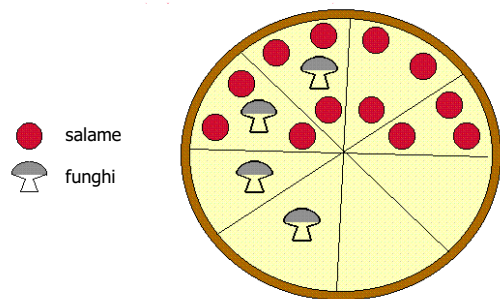


Caso 1:  $P(F | S) = 3/5$

$P(F) = 1/2$

$P(F | S) \neq P(F)$ , quindi gli eventi "F" e "S" **NON** sono indipendenti.

## Esempio 3



Caso 2

## Esempio 3 (prosieguo)



Caso 2:  $P(F | S) = P(F) = 1/2$

quindi gli eventi "F" e "S" sono indipendenti.

## Correlazione positiva



Due eventi  $A$  e  $B$  sono detti **positivamente correlati** se

$$P(A \cap B) > P(A)P(B)$$

ovvero se

$$P(A | B) > P(A)$$

13

## Correlazione positiva



**Intuitivamente**, possiamo dire che il verificarsi di uno qualsiasi di due eventi  $A$  e  $B$  fa sì che l'altro evento diventi più probabile.

14

## Correlazione negativa



Due eventi  $A$  e  $B$  sono detti **negativamente correlati** se

$$P(A \cap B) < P(A)P(B)$$

ovvero se

$$P(A | B) < P(A)$$

15

## Correlazione negativa



Intuitivamente, possiamo dire che il verificarsi di uno qualsiasi di due eventi  $A$  e  $B$  fa sì che l'altro evento diventi meno probabile.

16

## Esercizio



Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due dadi, dove  $X_1, X_2$  sono i punteggi prodotti e  $Y$  è la loro somma. Per i seguenti eventi si trovi la probabilità condizionata di ciascun evento dato l'altro e si determini se gli eventi sono positivamente o negativamente correlati, o indipendenti.

$$\{X_1 = 3\}, \{Y = 6\}$$

$$\{X_1 = 3\}, \{Y = 7\}$$

$$\{X_1 < 3\}, \{Y > 7\}$$

17

## Esercizio (soluzione)



		Primo dado $X_1$					
		1	2	3	4	5	6
Secondo dado $X_2$	1	x	x	x	x	x	x
	2	x	x	x	x	x	x
	3	x	x	x	x	x	x
	4	x	x	x	x	x	x
	5	x	x	x	x	x	x
	6	x	x	x	x	x	x

18

## Esercizio (soluzione)



$$P(X_1 = 3) = 1/6$$

$$P(Y = 6) = 5/36$$

$$P[(X_1 = 3) \cap (Y = 6)] = 1/36$$

$$P[(X_1 = 3)|(Y = 6)] = \frac{P[(X_1 = 3) \cap (Y = 6)]}{P(Y = 6)} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}$$

19

## Esercizio (soluzione)



$$P[(X_1 = 3)|(Y = 6)] > P(X_1 = 3) \Rightarrow \text{correlazione positiva}$$

$$P[(X_1 = 3)|(Y = 7)] = P(X_1 = 3) \Rightarrow \text{indipendenza}$$

$$P[(X_1 < 3)|(Y > 7)] < P(X_1 < 3) \Rightarrow \text{correlazione negativa}$$

20

## Esercizio (da svolgere a casa)



In una certa popolazione il 30% della popolazione fuma e l'8% ha una certa malattia cardiaca. Inoltre, il 12% delle persone che fumano hanno anche la malattia cardiaca. (a) Qual è la percentuale di persone che fumano e che hanno la malattia cardiaca? (b) Fumare e avere la malattia cardiaca sono negativamente correlati, positivamente correlati, o indipendenti?