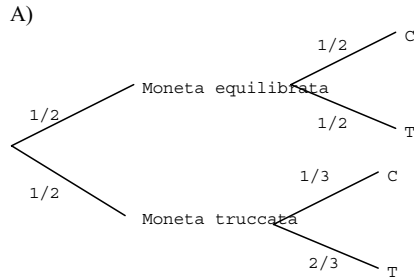


**1**

Una scatola contiene due monete di cui una equilibrata ed una truccata in modo che, una volta lanciata dia testa con probabilità 2/3. Le due monete sono indistinguibili. Si prende a caso nella scatola una delle due monete. Indichiamo con  $X_i$  il risultato all'iesimo lancio pari a 1 per testa e 0 per croce.

- A) Trovare la distribuzione di probabilità di  $X_1$ .
- B) Quali sono il valor medio  $\mu$  e la varianza  $\sigma^2$  di  $X_1$  ?
- C) Si lancia la moneta 4 volte. Sia  $Z=\Sigma X_i$  qual è il valore medio di  $Z$ ?



$P(X_i=1)=P(T)=1/4 + 1/3 = 0.583333333$   
 $P(X_i=0)=P(C)=1/4 + 1/6 = 0.416666667$

$B) \mu = 1 * P(X_i=1) + 0 * P(X_i=0) = 0.583333333$

$\sigma^2 = \sum P(X_i) (X_i - \bar{X})^2 = 0.5833 * 0.340278 + 0.416666 * 0.173611 = 0.243056$

oppure

$\sigma^2 = E[x^2] - E[x]^2 = 0.583333 - 0.583333^2 = 0.243056$

C)  $E[Z] = E[\Sigma X_i] = \Sigma E[X_i] = \Sigma 0.5833 = 4 * 0.5833 = 2.333333$

**2**

Una scatola contiene tre monete di cui una equilibrata e due truccate in modo che, una volta lanciate diano testa con probabilità 5/7. Le monete sono indistinguibili. Si prende a caso nella scatola una delle tre monete. La si lancia tre volte ed il risultato è T-T-T (tre volte testa).

A) Qual è la probabilità che al quarto lancio la moneta dia testa?

$P(B) = P(T-T-T) = 1/3 * (1/2)^3 + 2/3 * (5/7)^3 = 0.284621$

$P(A \cap B) = P(T-T-T-T) = 1/3 * (1/2)^4 + 2/3 * (5/7)^4 = 0.194372$

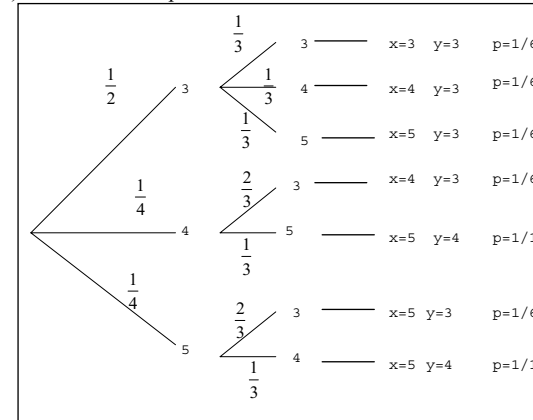
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.194372 / 0.284621 = 0.682916$

(N.B: Il risultato è maggiore di 0.5 !)

**3**

Un'urna contiene quattro biglie due sono segnate con il numero 3, 1 con il numero 4 e una con il numero 5. Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X il numero più grande estratto e con Y il numero più piccolo.

- A) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
- B) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
- C) Trovare la covarianza di X e Y.
- D) X e Y sono indipendenti?



X\Y	3	4	P(x)
3	1/6	0	1/6
4	1/3	0	1/3
5	1/3	1/6	1/2
P(y)	5/6	1/6	

$Cov = \sum x_i y_i p(x_i, y_i) - \mu_x \mu_y = \frac{83}{6} - \left(\frac{19}{6} * \frac{26}{6}\right) = 1/9$

x e y sono dipendenti !

**4**

Si hanno due scatole:

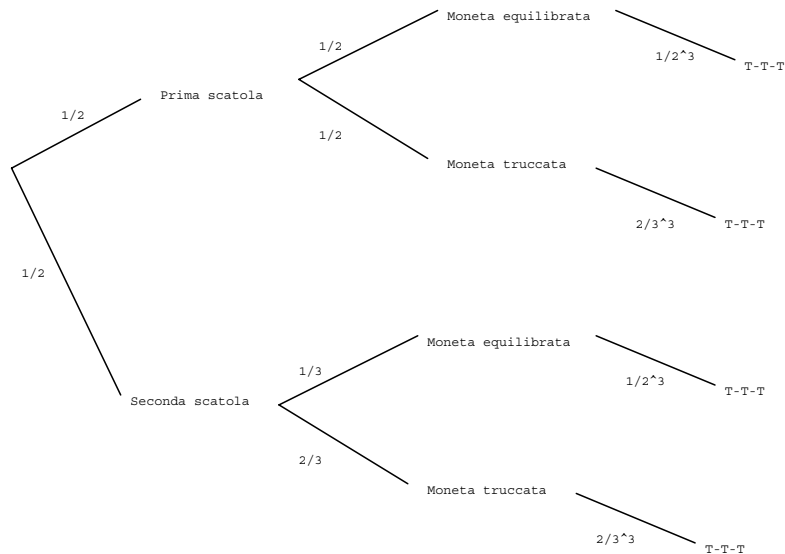
La prima scatola contiene due monete di cui una equilibrata ed una truccata.

La seconda scatola contiene tre monete di cui una equilibrata e due truccate.

Le monete truccate sono truccate in modo che, una volta lanciate diano testa con probabilità 2/3. Le monete sono indistinguibili. Si prende a caso una scatola e quindi una moneta. La si lancia tre volte ed il risultato è T-T-T (tre volte testa).

B) Qual è la probabilità che la moneta sia truccata?

Si costruisce l'albero delle probabilità:



Sia  $P(TTT)$  la probabilità di ottenere tre teste.

Sia  $P(TTT \cap E)$  la probabilità di ottenere tre teste con la moneta equilibrata.

Sia  $P(TTT \cap NE)$  la probabilità di ottenere tre teste con la moneta truccata (NE = non equilibrata).

La probabilità di ottenere tre teste  $P(TTT)$  è pari a:

$$P(TTT) = P(TTT \cap E) + P(TTT \cap NE) = \\ = (1/2 * 1/2 * 1/2^3 + 1/2 * 1/3 * 1/2^3) + (1/2 * 1/2 * 2/3^3 + 1/2 * 2/3 * 2/3^3) = \\ = (5/12 * 1/2^3) + (7/12 * 2/3^3) = 0.052083 + 0.17284 = 0.224923$$

La probabilità che la moneta sia truccata dato TTT è  $P(NE / TTT)$  pari a:

$$P(NE / TTT) = P(TTT \cap NE) / P(TTT) = 0.17284 / 0.224923 = 0.768439$$

Un'urna contiene sei biglie tre sono segnate con il numero 2, 2 con il numero 3 e una con il numero 4. Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X il prodotto dei numeri delle due biglie estratte e con Y la somma.

- E) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y  
 F) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.  
 G) Trovare la covarianza di X e Y.  
 X e Y sono indipendenti?

**5**

Si hanno due scatole:

La prima scatola contiene due monete di cui una equilibrata ed una truccata.

La seconda scatola contiene tre monete di cui una equilibrata e due truccate.

Le monete truccate sono truccate in modo che, una volta lanciate diano testa con probabilità 3/5. Le monete sono indistinguibili. Si prende a caso una scatola e quindi una moneta. La si lancia tre volte ed il risultato è T-T-T (tre volte testa).

C) Qual è la probabilità che la moneta sia truccata?

**6**

Si abbia una moneta tale che sia  $p=1/2$  la probabilità di testa e  $q=1-p$  la probabilità di croce per un singolo lancio. Si lancia quattro volte la moneta. Sia X il numero di volte che a testa segue immediatamente croce, sia inoltre Y il numero di volte che a testa segue testa.

- H) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y  
 I) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.  
 J) Trovare la covarianza di X e Y.  
 K) X e Y sono indipendenti?

**7**

a) Si giocano 5 schedine diverse ad un gioco simile al totocalcio ( Si hanno 11 partite invece di 13 su cui indovinare 1, x o 2) qual è la probabilità di fare 11 se ognuno dei risultati possibili 1, x o 2 sono equiprobabili in ogni partita.

b) Si gioca una schedina composta da tutti 1 ad un gioco simile al totocalcio ( Si hanno 11 partite invece di 13 su cui indovinare 1, x o 2) qual è la probabilità di fare 11 se la probabilità di avere 1 è pari a 0.5 in ogni partita.

**8**

Un'urna contiene sette biglie quattro sono segnate con il numero 2, 2 con il numero 3 e una con il numero 4. Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X la somma dei numeri estratti e con Y il numero più grande estratto.

- c) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y  
 d) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.  
 e) Trovare la covarianza di X e Y.  
 f) X e Y sono indipendenti?

**9** Un professore dà un questionario di 200 domande a risposta multipla ad uno studente.

Ogni domanda ha quattro possibili risposte.

A) Lo studente tira a indovinare, qual è la probabilità che 100 o più risposte siano corrette?

**10** Un'urna contiene sei biglie numerate così:

3, 3, 4, 4, 4, 5.

Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X il numero più piccolo estratto e con Y il numero più grande estratto.

- g) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y  
 h) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.  
 i) Trovare la covarianza di X e Y.  
 j) X e Y sono indipendenti?

**11**

Si hanno tre scatole A, B e C che contengono rispettivamente :

- La scatola A contiene 10 lampadine di cui 5 difettose.
- La scatola B contiene 8 lampadine di cui 2 difettose.
- La scatola C contiene 7 lampadine di cui 2 difettose.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/3$ ) e se ne estrae una lampadina.

- a) Qual è la probabilità che la lampadina sia difettosa?
- b) Se la lampadina è difettosa qual è la probabilità che sia stata estratta dalla scatola A?

**12**

In un'aula sono presenti 7 studenti nati nell'anno 1970.

- a) Qual è la probabilità che almeno due di loro siano nati lo stesso giorno?
- b) Se gli studenti sono 30 qual è la probabilità che almeno due di loro siano nati lo stesso giorno? (si consideri l'anno 1970 composto di 365 giorni)

**13**

Un professore dà un questionario di 300 domande a risposta multipla ad uno studente.

Ogni domanda ha quattro possibili risposte.

- g) Supponendo che lo studente sia mediamente preparato ed in grado di rispondere correttamente con probabilità 0.6 alla singola domanda, qual è la probabilità che lo studente risponda correttamente a più di 150 risposte?

**14**

Si hanno tre scatole A, B e C che contengono rispettivamente :

- La scatola A contiene 9 lampadine di cui 5 difettose.
- La scatola B contiene 7 lampadine di cui 2 difettose.
- La scatola C contiene 8 lampadine di cui 2 difettose.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/3$ ) e se ne estraggono due lampadine.

- c) Qual è la probabilità che entrambi le lampadine siano difettose?
- d) Se entrambe le lampadine sono difettose qual è la probabilità che siano state estratte dalla scatola A?

**15**

Un'urna contiene tre biglie numerate così:

3, 4 e 5.

Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X il primo numero estratto e con Y il numero più grande estratto.

- k) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
- l) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
- m) Trovare la covarianza di X e Y.
- n) X e Y sono indipendenti?

**16**

La scatola A contiene 11 carte numerate da 1 a 11, e la scatola B contiene 6 carte numerate da 1 a 6.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/2$ ) e se ne estraggono due carte; se entrambe le carte hanno un numero pari, qual è la probabilità che provengano dalla scatola A?

**17**

La classe A ha 10 maschi e 6 femmine, la classe B ha 6 maschi e 10 femmine. Viene tirata una moneta e scelta a caso una delle due classi quindi vengono scelti a caso nella classe estratta tre studenti che risultano essere tutti e tre maschi.

- c) Qual è la probabilità che gli studenti provengano dalla classe A?

**18**

Si hanno due scatole A e B che contengono rispettivamente :

- La scatola A contiene 8 lampadine di cui 5 difettose.
- La scatola B contiene 6 lampadine di cui 2 difettose.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/2$ ) e se ne estrae una lampadina.

- e) Qual è la probabilità che la lampadina sia difettosa?
- f) Se la lampadina è difettosa qual è la probabilità che sia stata estratta dalla scatola A?

**19**

Un'urna contiene sei biglie tre sono segnate con il numero 2, 2 con il numero 3 e una con il numero 4. Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X il numero più grande fra le due biglie estratte e con Y la somma.

- L) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
- M) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
- N) Trovare la covarianza di X e Y.
- O) X e Y sono indipendenti?

**20**

Una scatola contiene due monete di cui una equilibrata ed una truccata in modo che, una volta lanciata dia testa con probabilità  $3/4$ . Le due monete sono indistinguibili. Si prende a caso nella scatola una delle due monete. Dopo aver scelto una moneta si lancia la moneta per  $n=100$  volte.

- A) Qual è la probabilità di ottenere testa un numero di volte superiore a 60 se la moneta lanciata è quella regolare?
- B) Qual è la probabilità di ottenere testa un numero di volte superiore a 60 se la moneta lanciata è quella truccata?
- B) Qual è la probabilità di ottenere testa un numero di volte superiore a 60 nell'esperimento su indicato?

**21**

Si hanno due dadi con le 6 facce così segnate:

dado 1: 1, 2, 2, 3, 3 e 3

dado 2: 3, 3, 4, 4, 5 e 5

Si tirano i due dadi, sia  $x$  la somma dei due numeri usciti e  $y$  la differenza fra il numero del dado 2 e il numero del dado 1

(esempio: dado 1 = 2 e dado 2 = 4 comporta  $x=6$  ed  $y=2$ )

- d) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
- o) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
- p) Trovare la covarianza di X e Y.
- q) X e Y sono indipendenti?

**22**

Un professore dà un questionario di 250 domande a risposta multipla ad uno studente.

Ogni domanda ha due possibili risposte.

- h) Supponendo che lo studente sia mediamente preparato ed in grado di rispondere correttamente con probabilità 0.75 alla singola domanda, qual è la probabilità che lo studente risponda correttamente a più di 200 risposte?

**23**

Si hanno due scatole:

La prima scatola contiene 4 monete di cui una equilibrata e 3 truccate.

La seconda scatola contiene tre monete di cui una equilibrata e due truccate.

Le monete truccate sono truccate in modo che, una volta lanciate diano testa con probabilità 2/3. Le monete sono indistinguibili. Si prende a caso una scatola e quindi una moneta. La si lancia tre volte ed il risultato è T-T-T (tre volte testa).

- D) Qual è la probabilità che la moneta sia truccata?

**24**

x è una variabile distribuita secondo una legge esponenziale negativa con :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{per } x < 0 \\ f(x) &= (\alpha) \exp(-\alpha \cdot x) && \text{per } x \geq 0 \end{aligned}$$

sia la variabile x il tempo di vita di un frigorifero (senza guasti) con  $\alpha = 10$  anni.

- A) Qual è la probabilità che il frigorifero funzioni per più di 6 anni senza guasti?

**25**

x è una variabile distribuita secondo una legge esponenziale negativa con :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{per } x < 0 \\ f(x) &= (\alpha) \exp(-\alpha \cdot x) && \text{per } x \geq 0 \end{aligned}$$

sia la variabile x il tempo di vita di una lampadina (senza guasti) con  $\alpha = 4$  anni.

- A) In una stanza ci sono due lampadine qual è la probabilità che la stanza rimanga senza illuminazione nei primi 3 anni (non è consentito di cambiare lampadina)?

**26** L'impianto d'illuminazione di una stanza è composto da 4 lampadine usate accese contemporaneamente. La durata media di ogni lampadina è di 10 anni.

- a) Qual è la probabilità di restare al buio nella stanza nei primi 5 anni di uso dell'impianto se non è possibile cambiare le lampadine?

(Utilizzare la distribuzione esponenziale negativa per rappresentare il tempo di durata delle lampadine con  $\alpha = 10$  anni)

Esponenziale negativa:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{per } x < 0 \\ f(x) &= (\alpha) \exp(-\alpha \cdot x) && \text{per } x \geq 0 \end{aligned}$$