

# Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale

## Esercizi di Calcolo delle Probabilità

1. Argomento:	Probabilità condizionata	2
2. Argomento:	Probabilità condizionata	2
3. Argomento:	Probabilità condizionata	2
4. Argomento:	Probabilità condizionata	2
5. Argomento:	Probabilità condizionata	2
6. Argomento:	Probabilità condizionata	2
7. Argomento:	Probabilità condizionata	3
8. Argomento:	Probabilità condizionata	3
9. Argomento:	Probabilità condizionata	3
10. Argomento:	Probabilità condizionata	3
11. Argomento:	Probabilità congiunta	3
12. Argomento:	Probabilità congiunta	4
13. Argomento:	Probabilità congiunta	4
14. Argomento:	Probabilità congiunta	4
15. Argomento:	Probabilità congiunta	4
16. Argomento:	Probabilità congiunta	5
17. Argomento:	Probabilità congiunta	5
18. Argomento:	Probabilità congiunta	5
19. Argomento:	Probabilità congiunta	5
20. Argomento:	Probabilità congiunta	5
21. Argomento:	Probabilità congiunta	6
22. Argomento:	Probabilità congiunta	6
23. Argomento:	Probabilità congiunta	6
24. Argomento:	Probabilità congiunta	6
25. Argomento:	Probabilità congiunta	7
26. Argomento:	Speranza matematica e varianza	7
27. Argomento:	Speranza matematica e varianza	7
28. Argomento:	Giochi equi	8
29. Argomento:	Giochi equi	8
30. Argomento:	Giochi equi	8
31. Argomento:	Distribuzione binomiale	8
32. Argomento:	Distribuzione binomiale	8
33. Argomento:	Distribuzione binomiale	8
34. Argomento:	Distribuzione binomiale	9
35. Argomento:	Distribuzione binomiale	9
36. Argomento:	Distribuzione binomiale	9
37. Argomento:	Distribuzione binomiale	9
38. Argomento:	Distribuzione binomiale	9
39. Argomento:	Distribuzione esponenziale	9
40. Argomento:	Distribuzione esponenziale	10
41. Argomento:	Distribuzione esponenziale	10
42. Argomento:	Funzione di ripartizione	10
43. Argomento:	Funzione di ripartizione	10

### 1. Argomento: Probabilità condizionata

Si hanno due scatole A e B:

- la scatola A contiene 6 lampadine di cui 4 difettose.
- la scatola B contiene 3 lampadine di cui 2 difettose.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/2$ ) e se ne estrae una lampadina.

1. Qual è la probabilità che la lampadina sia difettosa?
2. Se la lampadina è difettosa qual è la probabilità che sia stata estratta dalla scatola A?

### 2. Argomento: Probabilità condizionata

Si hanno due scatole A e B:

- la scatola A contiene 2 monete di cui una equilibrata ed una truccata.
- la scatola B contiene 3 monete di cui una equilibrata e due truccate.

Le monete truccate sono truccate in modo che, una volta lanciate diano testa con probabilità  $2/3$ . Le monete sono indistinguibili. Si prende a caso una scatola e quindi una moneta. La si lancia tre volte ed il risultato è T-T-T (tre volte testa).

Qual è la probabilità che la moneta sia truccata?

### 3. Argomento: Probabilità condizionata

Una scatola contiene tre monete di cui una equilibrata e due truccate in modo che, una volta lanciate diano testa con probabilità  $5/7$ . Le monete sono indistinguibili. Si prende a caso nella scatola una delle tre monete. La si lancia tre volte ed il risultato è T-T-T (tre volte testa).

Qual è la probabilità che al quarto lancio la moneta dia testa?

### 4. Argomento: Probabilità condizionata

Si hanno tre scatole A, B e C che contengono rispettivamente :

La scatola A contiene 10 lampadine di cui 5 difettose.

- La scatola B contiene 8 lampadine di cui 2 difettose.
- La scatola C contiene 7 lampadine di cui 2 difettose.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/3$ ) e se ne estrae una lampadina.

1. Qual è la probabilità che la lampadina sia difettosa?
2. Se la lampadina è difettosa qual è la probabilità che sia stata estratta dalla scatola A?

### 5. Argomento: Probabilità condizionata

Si hanno due scatole A e B:

- la scatola A contiene 11 carte numerate da 1 a 11;
- la scatola B contiene 6 carte numerate da 1 a 6.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/2$ ) e se ne estraggono due carte; se entrambe le carte hanno un numero pari, qual è la probabilità che provengano dalla scatola A?

### 6. Argomento: Probabilità condizionata

Si hanno 2 classi A e B:

- la classe A ha 10 maschi e 6 femmine;
- la classe B ha 6 maschi e 10 femmine.

Viene tirata una moneta e scelta a caso una delle due classi quindi vengono scelti a caso nella classe estratta tre studenti che risultano essere tutti e tre maschi.

Qual è la probabilità che gli studenti provengano dalla classe A?

### 7. Argomento: Probabilità condizionata

Si hanno due scatole A e B che contengono rispettivamente :

- La scatola A contiene 8 lampadine di cui 5 difettose.
- La scatola B contiene 6 lampadine di cui 2 difettose.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/2$ ) e se ne estrae una lampadina.

1. Qual è la probabilità che la lampadina sia difettosa?
2. Se la lampadina è difettosa qual è la probabilità che sia stata estratta dalla scatola A?

### 8. Argomento: Probabilità condizionata

Si hanno tre scatole A,B e C che contengono rispettivamente :

- La scatola A contiene 9 lampadine di cui 5 difettose.
- La scatola B contiene 7 lampadine di cui 2 difettose.
- La scatola C contiene 8 lampadine di cui 2 difettose.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/3$ ) e se ne estraggono due lampadine.

1. Qual è la probabilità che entrambi le lampadine siano difettose?
2. Se entrambe le lampadine sono difettose qual è la probabilità che siano state estratte dalla scatola A?

### 9. Argomento: Probabilità condizionata

Si hanno tre scatole A, B e C che contengono rispettivamente :

- La scatola A contiene 10 lampadine di cui 5 difettose.
- La scatola B contiene 8 lampadine di cui 2 difettose.
- La scatola C contiene 7 lampadine di cui 2 difettose.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/3$ ) e se ne estrae una lampadina.

1. Qual è la probabilità che la lampadina sia difettosa?

Se la lampadina è difettosa qual è la probabilità che sia stata estratta dalla scatola A?

### 10. Argomento: Probabilità condizionata

Si hanno due scatole A e B:

- la scatola A contiene 4 monete di cui una equilibrata e 3 truccate.
- la scatola B contiene tre monete di cui una equilibrata e due truccate.

Le monete truccate sono truccate in modo che, una volta lanciate diano testa con probabilità  $2/3$ . Le monete sono indistinguibili. Si prende a caso una scatola e quindi una moneta. La si lancia tre volte ed il risultato è T-T-T (tre volte testa).

Determinare la probabilità che la moneta sia truccata.

### 11. Argomento: Probabilità congiunta

Si hanno due dadi con le 6 facce così segnate:

- dado 1: 1, 1, 2, 3, 3 e 3;
- dado 2: 3, 3, 3, 4, 4 e 5.

Si tirano i due dadi e siano:

- X la v.a. che rappresenta la somma dei due numeri usciti;
- Y la v.a. che rappresenta la differenza fra il numero del dado 2 e il numero del dado 1.

Determinare:

1. la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y;

2. le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y;
3. se le variabili X ed Y sono indipendenti;
4. la covarianza di X e di Y.

### 12. Argomento: Probabilità congiunta

Un'urna contiene quattro biglie due sono segnate con il numero 3, 1 con il numero 4 e una con il numero 5.

Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Siano:

- X la v.a. che rappresenta il numero **più grande** estratto;
- Y il numero **più piccolo**.

Determinare:

1. la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
2. le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
3. la covarianza di X e Y.
4. se X e Y sono indipendenti.

### 13. Argomento: Probabilità congiunta

Un'urna contiene sei biglie tre sono segnate con il numero 2, 2 con il numero 3 e una con il numero 4. Si

estraggono due biglie (senza reimmissione). Siano:

- X la v.a. che rappresenta il **prodotto** dei numeri delle due biglie estratte;
- Y la v.a. che rappresenta la **somma**.

Determinare:

1. la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
2. le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
3. la covarianza di X e Y.
4. se X e Y sono indipendenti.

### 14. Argomento: Probabilità congiunta

Si abbia una moneta tale che sia  $p=1/2$  la probabilità di testa e  $q=1-p$  la probabilità di croce per un singolo lancio. Si lancia quattro volte la moneta. Siano

- X la v.a. che rappresenta il numero di volte che a testa segue immediatamente croce;
- Y la v.a. che rappresenta il numero di volte che a testa segue testa.

Determinare:

1. la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y;
2. le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y;
3. la covarianza di X e Y;
4. se X e Y sono indipendenti.

### 15. Argomento: Probabilità congiunta

Un'urna contiene sette biglie quattro sono segnate con il numero 2, 2 con il numero 3 e una con il numero 4.

Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Siano:

- X la v.a. che rappresenta **somma** dei numeri estratti;
- Y la v.a. che rappresenta il **numero più grande** estratto.

Determinare:

1. la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
2. le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
3. la covarianza di X e Y.
4. se X e Y sono indipendenti.

### 16. Argomento: Probabilità congiunta

Un'urna contiene sei biglie numerate 3, 3, 4, 4, 4 e 5.

Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Siano:

- X la v.a. che rappresenta il **numero più piccolo** estratto
- Y la v.a. che rappresenta il **numero più grande** estratto.

Determinare:

1. la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
2. le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
3. la covarianza di X e Y.
4. se X e Y sono indipendenti?

### 17. Argomento: Probabilità congiunta

Un'urna contiene tre biglie così numerate: 3, 4 e 5. Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Siano:

- X il **primo numero** estratto;
- Y il numero **più grande** estratto.

Determinare:

1. la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
2. le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
3. la covarianza di X e Y.
4. se X e Y sono indipendenti.

### 18. Argomento: Probabilità congiunta

Un'urna contiene sei biglie di cui tre sono segnate con il numero 2, 2 con il numero 3 e una con il numero 4.

Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Siano:

- X la v.a. che rappresenta il numero **più grande** fra le due biglie estratte
- Y la v.a. che rappresenta **la somma** dei due valori.

Determinare:

1. la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y;
2. le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y;
3. la covarianza di X e Y;
4. se X e Y sono indipendenti.

### 19. Argomento: Probabilità congiunta

Si hanno due dadi con le 6 facce così segnate:

- dado 1: 1, 2, 2, 3, 3 e 3
- dado 2: 3, 3, 4, 4, 5 e 5

Si tirano i due dadi, siano:

- X la v.a. che rappresenta **la somma** dei due numeri usciti;
- Y la v.a. che rappresenta **la differenza** fra il numero del dado 2 e il numero del dado 1.

Determinare:

1. la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y;
2. le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
3. la covarianza di X e Y.
4. se X e Y sono indipendenti.

### 20. Argomento: Probabilità congiunta

Si lanci tre volte una moneta modificata in modo che sia  $P(T) = 1/3$  e  $P(C) = 2/3$ . Siano

- X la v.a. che rappresenta il numero di teste;

- Y la v.a. che rappresenta la più lunga sequenza di teste che si presenta.

Determinare:

1. la funzione di probabilità congiunta di X e Y;
2. le distribuzioni marginali di X e Y;
3. la covarianza di X e Y;
4. se X e Y sono indipendenti.

### 21. Argomento: Probabilità congiunta

Si lanci tre volte una moneta modificata in modo che sia  $P(T) = 0,4$  e  $P(C) = 0,6$ . Siano:

- X la variabile casuale che rappresenta il numero di teste;
- Y la variabile casuale che rappresenta la più lunga sequenza di teste che si presenta.

Determinare:

1. la funzione di probabilità congiunta di X e Y;
2. le distribuzioni marginali di X e Y;
3. la covarianza di X e Y;
4. se X e Y sono indipendenti.

### 22. Argomento: Probabilità congiunta

Si lanci tre volte un dado. Siano:

- X la variabile casuale che rappresenta il numero di "6" che si presenta;
- Y la variabile casuale che rappresenta la più lunga sequenza di "6" che si presenta.

Determinare:

1. la funzione di probabilità congiunta di X e Y;
2. le distribuzioni marginali di X e Y;
3. la covarianza di X e Y;
4. se X e Y sono indipendenti.

### 23. Argomento: Probabilità congiunta

Si lancino in successione una moneta ed un dado.

Si assegnino:

- 2 punti se l'esito è TESTA
- 0 punti se l'esito è CROCE
- 3 punti se il dado da esito maggiore o uguale a 5;
- 1 punto se il numero da esito minore di 5.

Siano:

- X la variabile casuale che rappresenta la SOMMA dei punteggi di moneta e dado;
- Y la variabile casuale che rappresenta la DIFFERENZA tra il punteggio del dado e quello della moneta.

Determinare:

1. la funzione di probabilità congiunta di X e Y;
2. le distribuzioni marginali di X e Y;
3. la covarianza di X e Y;
4. se X e Y sono indipendenti.

### 24. Argomento: Probabilità congiunta

Si lancino in successione una moneta ed un dado.

Si assegnino:

- 2 punti se l'esito è TESTA

- 0 punti se l'esito è CROCE
- 3 punti se il dado da esito maggiore o uguale a 5;
- 1 punto se il numero da esito minore di 5.

Siano:

- X la variabile casuale che rappresenta il PRODOTTO dei punteggi di moneta e dado;
- Y la variabile casuale che rappresenta la DIFFERENZA tra il punteggio del dado e quello della moneta.

Determinare:

1. la funzione di probabilità congiunta di X e Y;
2. le distribuzioni marginali di X e Y;
3. la covarianza di X e Y;
4. se X e Y sono indipendenti.

### 25. Argomento: Probabilità congiunta

Si lancino in successione una moneta ed un dado.

Si assegnino:

- 2 punti se l'esito è TESTA
- 0 punti se l'esito è CROCE
- 3 punti se il dado da esito maggiore o uguale a 5;
- 1 punto se il numero da esito minore di 5.

Siano:

- X la variabile casuale che rappresenta il SOMMA dei punteggi di moneta e dado;
- Y la variabile casuale che rappresenta il PRODOTTO dei punteggi di moneta e dado.

Determinare:

1. la funzione di probabilità congiunta di X e Y;
2. le distribuzioni marginali di X e Y;
3. la covarianza di X e Y;
4. se X e Y sono indipendenti.

### 26. Argomento: Speranza matematica e varianza

Si lanci tre volte una moneta. Si assegnino:

- 10 punti ad ogni testa uscita;
- 5 punti ad ogni croce.

Sia X la variabile casuale che rappresenta la somma dei punti ottenuta nei tre lanci. Determinare:

1. la funzione di probabilità di X;
2. il valore atteso  $E[X]$
3. la varianza  $VAR[X]$  e lo scarto quadratico medio di X.

### 27. Argomento: Speranza matematica e varianza

Si lancino in successione due monete ed un dado. Si assegnino:

- 4 punti per ogni testa;
- 1 per ogni croce;
- un numero di punti pari a due volte il numero ottenuto dal lancio del dado.

Sia X la variabile che rappresenta il punteggio complessivo. Determinare:

1. la funzione di probabilità di X;
2. il valore atteso  $E[X]$
3. la varianza  $VAR[X]$  e lo scarto quadratico medio di X.

### 28. Argomento: Giochi equi

Un gioco consiste nel lanciare 3 volte una moneta. Si vincono:

- 10 € per ogni testa uscita;
- 5 € per ogni croce.

Sia X la variabile casuale che rappresenta la somma vinta da un generico giocatore nei tre lanci consecutivi. Determinare l'importo da pagare per poter partecipare al gioco affinché il gioco sia equo.

### 29. Argomento: Giochi equi

Un gioco consiste nel lanciare in successione due monete ed un dado. Un giocatore vince:

- 4 € per ogni testa;
- 1 € per ogni croce;
- un numero di Euro pari a due volte il numero ottenuto dal lancio del dado.

Sia X la variabile che rappresenta la vincita complessiva del gioco.

Determinare l'importo da pagare per poter partecipare al gioco affinché il gioco sia equo.

### 30. Argomento: Giochi equi

Un gioco consiste nel lanciare in successione due dadi e una moneta. Un giocatore vince:

- 4 € per ogni testa;
- 1 € per ogni croce;
- un numero di Euro pari a al numero ottenuto dal lancio del dado per ciascun dado.

Sia X la variabile che rappresenta la vincita complessiva del gioco.

Determinare l'importo da pagare per poter partecipare al gioco affinché il gioco sia equo.

### 31. Argomento: Distribuzione binomiale

Gli elettrodomestici prodotti da una certa fabbrica risultano essere difettosi con probabilità stimata essere pari a 0,01.

1. Se la fabbrica ha venduto 1.000 lavatrici, qual è la probabilità che si presentino almeno 5 reclami?
2. Qual è il numero medio di reclami che si presume possa verificarsi?

### 32. Argomento: Distribuzione binomiale

Un compito d'esame a risposta multipla è composto da 10 domande tra loro indipendenti, ciascuna con tre risposte possibili delle quali una sola è corretta. Uno studente poco preparato decide di rispondere a caso a tutti i quesiti. Si calcoli la probabilità che lo studente totalizzi un numero di risposte esatte:

1. pari ad 8.
2. almeno pari a 6, ossia raggiunga la sufficienza;
3. al massimo pari a 7.

### 33. Argomento: Distribuzione binomiale

Una scatola contiene due monete di cui una equilibrata ed una truccata in modo che, una volta lanciata dia testa con probabilità  $2/3$ . Le due monete sono indistinguibili. Si prende a caso nella scatola una delle due monete. Indichiamo con  $X_i$  il risultato all'i-esimo lancio pari a 1 per testa e 0 per croce. Determinare:

1. la distribuzione di probabilità di  $X_1$
2. il valor medio  $\mu$  e la varianza  $\sigma^2$  di  $X_1$  ?
3. il valore medio di Z se si lancia la moneta 4 volte e se  $Z = \sum X_i$ ,

#### 34. Argomento: Distribuzione binomiale

Un professore dà un questionario di 200 domande a risposta multipla ad uno studente. Ogni domanda ha quattro possibili risposte. Se lo studente tira a indovinare, qual è la probabilità che 100 o più risposte siano corrette?

#### 35. Argomento: Distribuzione binomiale

Un professore dà un questionario di 300 domande a risposta multipla ad uno studente. Supponendo che lo studente sia mediamente preparato ed in grado di rispondere correttamente con probabilità 0.6 alla singola domanda, qual è la probabilità che lo studente risponda correttamente a più di 150 risposte?

#### 36. Argomento: Distribuzione binomiale

Una scatola contiene due monete di cui una equilibrata ed una truccata in modo che, una volta lanciata dia testa con probabilità 3/4. Le due monete sono indistinguibili. Si prende a caso nella scatola una delle due monete. Dopo aver scelto una moneta si lancia la moneta per  $n = 100$  volte.

Determinare:

- la probabilità di ottenere testa un numero di volte superiore a 60 se la moneta lanciata è quella equilibrata?
- la probabilità di ottenere testa un numero di volte superiore a 60 se la moneta lanciata è quella truccata?
- la probabilità di ottenere testa un numero di volte superiore a 60 nell'esperimento su indicato

#### 37. Argomento: Distribuzione binomiale

Un professore dà un questionario di 250 domande a risposta multipla ad uno studente. Ogni domanda ha due possibili risposte delle quali solo una è corretta. Supponendo che lo studente sia mediamente preparato ed in grado di rispondere correttamente con probabilità 0.75 alla singola domanda, qual è la probabilità che lo studente risponda correttamente a più di 200 domande?

#### 38. Argomento: Distribuzione binomiale

Dato un campione di 1000 famiglie con 3 figli ciascuna, qual è la probabilità che meno di 300 di queste abbiano:

1. almeno un figlio maschio;
2. due figli maschi;
3. nessuna figlia femmina.

#### 39. Argomento: Distribuzione esponenziale

Sia  $X$  la variabile che rappresenta il tempo di vita di un frigorifero senza guasti e si supponga che tale variabile si distribuisca secondo una legge esponenziale negativa con  $\alpha = 10$  anni:

- $f(x) = 0$  per  $x < 0$
- $f(x) = (\alpha) \exp(-\alpha \cdot x)$  per  $x \geq 0$

Qual è la probabilità che il frigorifero funzioni per più di 6 anni senza guasti?

#### 40. Argomento: Distribuzione esponenziale

Sia  $X$  la variabile che rappresenta il tempo di vita di una lampadina e si supponga che tale variabile si distribuisca secondo una legge esponenziale negativa con  $\alpha = 4$  anni:

- $f(x) = 0$  per  $x < 0$
- $f(x) = (\alpha) \exp(-\alpha \cdot x)$  per  $x \geq 0$

Se in una stanza ci sono due lampadine, qual è la probabilità che la stanza rimanga senza illuminazione nei primi 3 anni (nell'ipotesi che non sia consentito cambiare lampadina)?

#### 41. Argomento: Distribuzione esponenziale

L'impianto d'illuminazione di una stanza è composto da 4 lampadine usate accese contemporaneamente. La durata media di ogni lampadina è di 10 anni.

Qual è la probabilità di restare al buio nella stanza nei primi 5 anni di uso dell'impianto se non è possibile cambiare le lampadine?

(Utilizzare la distribuzione esponenziale negativa per rappresentare il tempo di durata delle lampadine con  $\alpha = 10$  anni)

Esponenziale negativa:

- $f(x) = 0$  per  $x < 0$
- $f(x) = (\alpha) \exp(-\alpha \cdot x)$  per  $x \geq 0$

#### 42. Argomento: Funzione di ripartizione

Sia  $X$  una v.a. definita dalla seguente tabella:

$x_i$	$P_X(x_i)$
-1	1/2
0	1/4
1	1/8
2	1/8

1. tracciare la funzione di probabilità di  $X$ ;
2. tracciare la funzione di ripartizione di  $X$ ;
3. posto  $Y = X^2$ , tabellare la distribuzione di probabilità di  $Y$ ;
4. tracciare la funzione di ripartizione di  $Y$ .

#### 43. Argomento: Funzione di ripartizione

Sia  $X$  una v.a. definita dalla seguente tabella:

$x_i$	$P_X(x_i)$
-2	1/6
-1	1/3
1	1/3
-2	1/6

1. tracciare la funzione di probabilità di  $X$ ;
2. tracciare la funzione di ripartizione di  $X$ ;
3. posto  $Y = 2X^2$ , tabellare la distribuzione di probabilità di  $Y$ ;
4. tracciare la funzione di ripartizione di  $Y$ .