

1

Un'urna contiene 12 biglie 5 sono segnate con il numero 2, 4 con il numero 3 e 3 con il numero 4. Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X la somma dei numeri estratti e con Y il numero più grande estratto.

- Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
- Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
- Trovare la covarianza di X e Y.
- X e Y sono indipendenti?

2 Un professore dà un questionario di 300 domande a risposta multipla ad uno studente.

Ogni domanda ha quattro possibili risposte.

Per provare l'ipotesi H0 che lo studente stia tirando a indovinare, il professore adotta la seguente regola di decisione:

- se 150 o più risposte sono corrette, lo studente non ha tirato a indovinare;
- se meno di 150 risposte sono corrette, lo studente ha tirato a indovinare.
- Trovare la probabilità di rifiutare l'ipotesi H0 quando invece è corretta.

3 Si hanno due scatole:

La prima scatola contiene 4 monete di cui una equilibrata e 3 truccate.

La seconda scatola contiene tre monete di cui una equilibrata e due truccate.

Le monete truccate sono truccate in modo che, una volta lanciate diano testa con probabilità 2/3. Le monete sono indistinguibili. Si prende a caso una scatola e quindi una moneta. La si lancia tre volte ed il risultato è T-T-T (tre volte testa).

A) Qual è la probabilità che la moneta sia truccata?

4

Si abbia un processo markoviano a 3 stati regolato dalla seguente matrice di transizione:

	A	B	C
A	0	0.2	0.8
B	0.3	0	0.7
C	0.8	0.2	0

A) Determinare, se il processo va avanti all'infinito, quali saranno le probabilità che il sistema si trovi in ognuno dei tre stati.

1 L'urna A contiene 2 palline bianche e 1 nera, l'urna B contiene 1 pallina bianca e 5 nere. Una pallina è estratta dall'urna A e, senza guardarla, posta nell'urna B. Quindi una pallina è estratta dall'urna B ed è bianca.

a) Qual è la probabilità che la pallina trasferita sia stata bianca?

2 190 persone sono state classificate secondo il sesso, maschio(M) o femmina, (F) e secondo il colore dei capelli, biondo (B), castano (C) e nero (N). La tabella seguente descrive il numero delle 190 persone nelle varie categorie.

b) Estraendo a caso una persona che si rivela maschio, qual è la probabilità che egli sia biondo?

	B	C	N	Totale
M	30	40	60	130
F	20	30	10	60
Totale	50	70	70	190

3 Si ha un campione composto da 130 misure di velocità istantanee di autoveicoli. I valori misurati sono i seguenti:

velocità (km/h)	40	45	50	55	60	65
Numero di veicoli	12	18	32	40	20	8

Calcolare:

c) Lo scarto quadratico medio del campione  $S_x$  con la radice quadrata di:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

d) Assumendo che la distribuzione originaria delle velocità sia normale si stimi la media delle velocità impiegando un intervallo di confidenza al 99%.

4 Si abbia un processo markoviano a 4 stati regolato dalla seguente matrice di transizione P:

Matrice di transizione P:

	A	B	C	D
A	0.2	0.8	0	0
B	0.8	0.2	0	0
C	0	0	0.7	0.3
D	0	0	0.4	0.6

e) Qual è la probabilità, partendo dallo stato A, di trovarsi negli stati A,B,C e D dopo tre transizioni.

f) Qual è la probabilità, partendo dallo stato A, di trovarsi negli stati A,B,C e D dopo infinite transizioni.

4 L'urna A contiene 4 palline bianche e 1 nera, l'urna B contiene 1 pallina bianca e 5 nere. Una pallina è estratta dall'urna A e, senza guardarla, posta nell'urna B. Quindi una pallina è estratta dall'urna B ed è bianca.

g) Qual è la probabilità che la pallina trasferita sia stata bianca?

2 Si ha un campione composto da 173 misure di velocità istantanee di autoveicoli. I valori misurati sono i seguenti:

velocità (km/h)	40	45	50	55	60	65
numero di veicoli	20	36	36	39	32	10

Calcolare:

A) La velocità media

B) Lo scarto quadratico medio del campione  $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

C) Assumendo che la distribuzione delle velocità sia normale si stimi la media delle velocità impiegando un intervallo di confidenza al 95%.

3 Un'urna contiene 5 biglie 3 sono segnate con il numero 2, 1 con il numero 3 e una con il numero 4. Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X il numero più grande estratto e con Y il numero più piccolo.

- A) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
- B) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
- C) Trovare la covarianza di X e Y.
- D) X e Y sono indipendenti?

4 Si abbia un processo markoviano a 4 stati regolato dalla seguente matrice di transizione P:

Matrice di transizione P:

	A	B	C	D
A	0.2	0	0.8	0
B	0.8	0	0.2	0
C	0	0.7	0.3	0
D	0	0.4	0	0.6

- h) Qual è la probabilità, partendo dallo stato A, di trovarsi negli stati A,B,C e D dopo tre transizioni.
- i) Qual è la probabilità, partendo dallo stato A, di trovarsi negli stati A,B,C e D dopo infinite transizioni.

1

Si hanno tre scatole A,B e C che contengono rispettivamente :

- La scatola A contiene 4 lampadine di cui 2 difettose.
- La scatola B contiene 5 lampadine di cui 3 difettose.
- La scatola C contiene 6 lampadine di cui 4 difettose.

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali (1/3) e se ne estrae una lampadina.

- a) Qual è la probabilità che la lampadina sia difettosa?
- b) Se la lampadina è difettosa qual è la probabilità che sia stata estratta dalla scatola A?

2

Un'urna contiene 8 biglie numerate così:

3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5.

Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X il numero più piccolo estratto e con Y il numero più grande estratto.

- g) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
- h) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
- i) Trovare la covarianza di X e Y.
- j) X e Y sono indipendenti?

3 Un professore dà un questionario di 300 domande a risposta multipla ad uno studente.

Ogni domanda ha due possibili risposte.

Per provare l'ipotesi H0 che lo studente sia in grado di rispondere correttamente con probabilità 0.75 alla singola domanda, il professore adotta la seguente regola di decisione:

- se 260 o più risposte sono corrette, lo studente è in grado di rispondere correttamente come indicato;
- se meno di 260 risposte sono corrette, lo studente non è in grado di rispondere correttamente come indicato;
- h) Trovare la probabilità di rifiutare l'ipotesi H0 quando invece è corretta.

4

Si abbia un processo markoviano a 3 stati regolato dalla seguente matrice di transizione:

	A	B	C
A	0	0.3	0.7
B	0.5	0	0.5
C	0.5	0.5	0

A) Determinare, se il processo va avanti all'infinito, quali saranno le probabilità che il sistema si trovi in ognuno dei tre stati.

**1**

Si hanno due scatole:

La prima scatola contiene 3 monete di cui 2 equilibrate ed 1 truccata.

La seconda scatola contiene 4 monete di cui 2 equilibrate e 2 truccate.

Le monete truccate sono truccate in modo che, una volta lanciate diano testa con probabilità  $2/3$ . Le monete sono indistinguibili. Si prende a caso una scatola e quindi una moneta. La si lancia tre volte ed il risultato è T-T-T (tre volte testa).

B) Qual è la probabilità che la moneta sia truccata?

**2**

Si hanno due scatole A e B che contengono rispettivamente :

- La scatola A contiene 3 fogli numerati da 1 a 3

- La scatola B contiene 3 fogli numerati da 1 a 3

Si sceglie una scatola a caso con probabilità eguali ( $1/2$ ) e se ne estrae un foglio da ognuno.

Si indichi con X il numero più piccolo estratto e con Y il numero più grande estratto.

k) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y

l) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.

m) Trovare la covarianza di X e Y.

n) X e Y sono indipendenti?

**3**

La durata media di ognuno dei pneumatici di una determinata automobile è di 3 anni. La durata di ogni pneumatico segue una legge esponenziale negativa con parametro determinabile dalla durata media.

a) Qual è la probabilità di dover ricorrere alla ruota di scorta nei primi 5 anni di uso dell'automobile?

**4**

Si abbia un processo markoviano a 3 stati regolato dalla seguente matrice di transizione:

	A	B	C
A	0	0.8	0.2
B	0.6	0	0.4
C	0.4	0.6	0

A) Determinare, se il processo va avanti all'infinito, quali saranno le probabilità che il sistema si trovi in ognuno dei tre stati.

**Esercizio**

Un'urna contiene 12 biglie 5 sono segnate con il numero 2, 4 con il numero 3 e 3 con il numero 4. Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X la somma dei numeri estratti e con Y il prodotto.

o) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y

p) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.

q) Trovare la covarianza di X e Y.

r) X e Y sono indipendenti?

**Esercizio**

L'intervallo fra due guasti successivi al motore di un aereo in volo segue una legge esponenziale negativa. Il tempo medio che intercorre fra due guasti (ad un motore) è di 5 mesi di funzionamento. L'intervallo fra due guasti successivi in volo al sistema di controllo computerizzato dell'aereo segue anche una legge esponenziale negativa, il tempo medio che intercorre fra due guasti è di 6 mesi di funzionamento del sistema.

L'aereo è in grado di volare finché almeno un motore su 2 ed il sistema di controllo elettronico funzionano.

a) Qual è la probabilità per un aereo di trovarsi in una emergenza irreparabile in tre mesi di volo?

b) Qual è la probabilità per un aereo di trovarsi in una emergenza irreparabile in tre mesi di volo se dispone di un secondo sistema di controllo elettronico del volo (gemello del primo)?

**Esercizio**

Si abbia un processo markoviano a 4 stati regolato dalla seguente matrice di transizione P:

Matrice di transizione P:

	A	B	C	D
A	0	0.7	0.3	0
B	0.5	0	0.5	0
C	0.1	0.9	0	0
D	0	0.4	0	0.6

H) Qual è la probabilità, partendo dallo stato A, di trovarsi negli stati A,B,C e D dopo 3 transizioni.

I) Qual è la probabilità, partendo dallo stato A, di trovarsi negli stati A,B,C e D dopo infinite transizioni.

**Esercizio**

Un magazzino contiene un gran numero di lampadine provenienti da una partita difettosa per provare l'ipotesi  $H_0$  che la percentuale di lampadine difettose sia del 30 % contro l'ipotesi alternativa  $H_1$  che la percentuale delle lampadine difettose sia pari al 40 % si adotta la seguente regola di decisione estraendo a caso 100 lampadine:

- se 35 o più lampadine sono difettose si rifiuta  $H_0$ ;

- se 34 o meno lampadine sono difettose si accetta  $H_0$ ;

i) Trovare la probabilità di rifiutare l'ipotesi  $H_0$  quando invece è corretta.

j) Trovare la probabilità di accettare l'ipotesi  $H_0$  quando invece è corretta  $H_1$ .

(utilizzare l'approssimazione normale alla binomiale)

**Esercizio**

Si abbia un processo markoviano a 4 stati regolato dalla seguente matrice di transizione **P**:

Matrice di transizione **P**:

	A	B	C	D
A	0.3	0	0.7	0
B	0	0	0.4	.6
C	0.6	0	0.4	0
D	0	0.4	0	0.6

- H) Qual è la probabilità, partendo dallo stato A, di trovarsi negli stati A,B,C e D dopo 3 transizioni.  
 I) Qual è la probabilità, partendo dallo stato A, di trovarsi negli stati A,B,C e D dopo infinite transizioni.

**Esercizio**

Un'urna contiene 12 biglie 5 sono segnate con il numero 2, 4 con il numero 3 e 3 con il numero 4. Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X il numero più grande estratto e con Y la somma dei numeri estratti.

- s) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y  
 t) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.  
 u) Trovare la covarianza di X e Y.  
 v) X e Y sono indipendenti?

**Esercizio**

Si abbiano le seguenti triple di valori per x,y e z:

	1	2	3	4						
X	11.7	11.6	8.5	35.5						
Y	22.5	20.2	30.3	25.3						
Z	37.3	35.4	28.3	85.6						

- k) Trovare le rette di regressione per z come funzione di x e poi di y.  
 l) Determinare se z è più correlata con x o y.

**Esercizio**

Si vuole determinare se un ciarlatano è veramente in possesso di poteri magici attraverso un esperimento di trasmissione del pensiero così congegnato: si mostrano ad una persona nella stanza accanto delle carte estratte a caso, le carte sono numerate da uno a 5. Per ogni carta estratta la probabilità per il ciarlatano di indovinarne il numero in assenza di trucchi è pari ad 1/5.

Si vuole testare l'ipotesi  $H_0$  che il ciarlatano sia un impostore che tira a indovinare in questo modo: si estraggono  $N=100$  carte e si verifica qual è il numero di carte indovinate.

Se il numero di carte indovinate è superiore o uguale a 60 si rifiuta  $H_0$  (si conclude che il ciarlatano abbia messo in atto qualche trucco).

Se il numero di carte indovinate è inferiore a 60 si accetta  $H_0$  e si conclude che le carte indovinate sono state indovinate per caso.

- g) Qual è la probabilità di un errore del primo tipo?