CALCOLO COMBINATORIO

Temi considerati

1) Permutazioni:
- oggetti tutti distinti
- oggetti non tutti distinti

2) Disposizioni

3) Combinazioni:
- oggetti tutti distinti
- oggetti non tutti distinti

Elementi forniti

1) Definizione generale
2) Origine della formula
3) Esempi

4) Regole principali

PERMUTAZIONI
di oggetti tutti distinti

Definizione

Il numero delle *permutazioni di n oggetti distinti* è uguale al numero dei gruppi che si possono formare ordinando gli n oggetti in tutti i modi diversi possibili.

Ogni gruppo differirà da ogni altro gruppo per la *posizione* occupata da almeno uno degli *n* oggetti.

Il loro numero è dato dalla relazione:

$$P(n) = n!$$

PERMUTAZIONI
di oggetti tutti distinti

Origine della formula

Oggetti disponibili: k-1
Numero di permutazioni possibili con (k-1) oggetti:

P(k-1)

Si aggiunga l'oggetto k-esimo. Questo può essere aggiunto in k modi diversi, ponendolo per primo, tra il primo e il secondo, tra il secondo e il terzo e così via. Ne risulterà che le permutazioni

formate da k oggetti sono in tutto P(k)=k.P(k-1).

Facendo variare k tra 1 ed n, avremo:

P(1) = 1.P(0)
P(2) = 2.P(1)
P(3) = 3.P(2)
....
P(n-1) = (n-1).P(n-2)
P(n) = n.P(n-1)

Moltiplicando tra loro i termini si ha:

P(1).P(2).P(3).....P(n-1).P(n)
= 1.2.3....(n-1).n.P(1).P(2)...
...P(n-2).P(n-1)

e, semplificando:

P(n) = 1.2.3.....(n-1).n = n!

PERMUTAZIONI
di oggetti tutti distinti

Esempio

Oggetti: *a, b, c*
Permutazioni possibili: 3!=6

abc, acb, bac, bca, cab, cba

Oggetti: *a, b, c, d*
Nella permutazione *bca*, ad es., si può aggiungere *d* e avere

dbca, bdca, bcda, bcad

Poiché le permutazioni di 3 oggetti sono 6, aggiungendo il quarto oggetto in tutti i modi possibili si otterrà il numero di permutazioni di 4 oggetti, cioè

$$P(4) = 4.P(3) = 4x6 = 24.$$

PERMUTAZIONI di oggetti non tutti distinti

Definizione

Se degli *n* oggetti *a* sono uguali fra loro, *b* uguali fra loro, *c* uguali fra loro, ecc., l'insieme delle *permutazioni possibili con n oggetti non tutti distinti* fra loro sarà dato dalla relazione:

$$P(n;\ a,\ b,\ c,.....) = \frac{n!}{a!b!c!...}$$

PERMUTAZIONI di oggetti non tutti distinti

Esempio

Oggetti: *a, b, c, d*
Permutazioni possibili: 4!=24

abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb,
bacd, badc, cabd, cadb, dabc, dacb,
bcad, bdac, cbad, cdab, dbac, dcab,
bcda, bdca,cbda, cdba, dbca, dcba.

Se b=a e c=d, avremo:

aadd, aadd, adad, adda,adad, adda,
aadd, aadd, daad, dada, daad, dada,
adad, adad, daad, ddaa, daad, ddaa,
adda, adda, dada, ddaa, dada, ddaa.

cioè soltanto le 6 = 4!/(2!2!) permutazioni diverse:

aadd, adad, ada, daad, dada, ddaa

DISPOSIZIONI

Definizione

Dati *n* oggetti distinti ed un numero intero *k<n,* si dicono *disposizioni semplici* degli *n* oggetti a *k* a *k* (o di classe *k*) i gruppi che si possono formare con *k* oggetti distinti scelti fra gli *n* dati, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri o per l'*ordine* o per la *qualità degli oggetti*.

Il loro numero è dato dalla relazione:

$$D(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}=$$

$$=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$

DISPOSIZIONI

Origine della formula

Disposizioni di n oggetti a (k-1) a (k-1) = D(n,k-1)

In ognuna si aggiunga nello stesso posto uno dei rimanenti [n-(k-1)]=(n-k+1) oggetti. Così avremo le Disposizioni di n oggetti a ka a k, cioè:

$$D(n,k) = (n-k+1).D(n,k-1).$$

Variando k tra 1 ed n, avremo:

$$D(n, 1) = n$$
$$D(n, 2) = (n-1).D(n, 1)$$
$$D(n, 3) = (n-2).D(n, 2)$$

....

$$D(n, k-1) = (n-k+2).D(n, k-2)$$
$$D(n, k) = (n-k+1).D(n, k-1)$$

Moltiplicando tra loro i termini si avrà:

$$D(n,1).D(n,2)....D(n,k-1).D(n,k)=$$
$$=n.(n-1).(n-2).....(n-k+1).$$
$$.D(n,1).D(n,2)......D(n,k-1)$$

e, semplificando, sarà:

$$D(n, k) = n.(n-1).(n-2).....(n-k+1)$$

Moltiplicando e dividendo il secondo termine per (n-k)! si ha, infine,

$$D(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}=P(n;n-k)$$

Il numero delle disposizioni di n elementi a k a k è uguale al numero delle permutazioni di n elementi dei quali (n-k) uguali fra loro.

DISPOSIZIONI

Esempio

Se n=3 e k=2, le *disposizioni* possibili di tre oggetti *a, b, c,* presi due alla volta sono D(3,2)=6, ossia:

ab, ac, ba, bc, ca, cb

Invece, con n=4 oggetti *a, b, c, d* si possono formare le 12 seguenti *disposizioni* di k=2 oggetti ciascuna:

ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc

che differiscono tra loro o per *almeno un oggetto* o per la *posizione* degli oggetti.

COMBINAZIONI
di oggetti tutti distinti

Definizione

Dati *n* oggetti distinti e un numero intero *k*<*n*, si dicono *combinazioni semplici* degli *n* oggetti a *k* a *k* (o di classe *k*) i gruppi che si possono formare con *k* oggetti distinti scelti fra gli *n* dati, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri solo per la *qualità* degli oggetti e non per il loro ordine.

Il loro numero è dato dalla relazione:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

COMBINAZIONI
di oggetti tutti distinti

Origine della formula

Si è definito:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)........(n-k+1)}{1.2.3.......k} =$$

$$= \frac{D(n,k)}{P(k)}$$

Il numero di combinazioni di n oggetti a k a k è pari al rapporto tra il numero delle disposizioni di n oggetti a k a k

e quello delle permutazioni di k oggetti.

COMBINAZIONI
di oggetti tutti distinti

Esempio

Oggetti: *a, b, c*
Combinazioni a due a due:

ab, ac, bc

Disposizioni:

1. ***ab, ac, bc***
2. ***ba, ca, cb***

C(3,2) = 3, D(3,2) = 6;
C(3,2)=1/2.D(3,2)

Oggetti: *a, b, c, d*

Combinazioni a tre a tre:

abc, abd, acd, bcd

Disposizioni:

1. *abc, abd, acd, bcd,*
2. *acb, adb, adc, bdc,*
3. *bac, bad, cad, cbd,*
4. *bca, bda, cda, cdb,*
5. *cab, dab, dac, dbc,*
6. *cba, dba, dca, dcb.*

C(4,3) = 4 D(4,3) = 24;
C(4,3)=1/6.D(4,3)

Applicando la formula generale, dunque, il numero delle *combinazioni* possibili ad esempio con 7 oggetti presi 4 alla volta è pari a:

$$C(7,4) = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = 35$$

COMBINAZIONI
di oggetti non tutti distinti

<u>Definizione</u>

Se si ammette che ogni elemento possa entrare in ciascun gruppo anche più di una volta, il numero delle *combinazioni con ripetizione* di *n* elementi a *k* a *k* è pari a:

$$C(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n-k+1)!}{k!(n-1)!} =$$

$$= \frac{(n+k-1).(n+k-1).......(n-1).n}{1.2.3.........k}$$

COMBINAZIONI
di oggetti non tutti distinti

<u>Esempio</u>

Le combinazioni di 3 oggetti a 2 a 2 sono in tutto 3!2!1!=3. Se i tre oggetti sono *a*, *b*, *c* le *combinazioni a 2 a 2* possibili sono:

ab, ac, bc.

Ma, se si ammette che ogni elemento possa entrare in una combinazione anche più di una volta, le *combinazioni con ripetizione* diventano le seguenti:

aa, ab, ac, bb, bc, cc.

REGOLE PRINCIPALI

DEFINIZIONE 1:

Se n è un numero intero positivo, il prodotto 1.2.3...... ...(n-1).n è definito dal simbolo n! e si legge "n fattoriale".

DEFINIZIONE 2:

Se n=0 si ammette, per convenzione che il fattoriale di o sia pari all'unità e si scrive 0! = 1.

DEFINIZIONE 3:

Dati n oggetti distinti, il numero dei modi diversi in cui essi si possono raggruppare, facendo in maniera che i gruppi contengano gli stessi n oggetti ordinati in modo diverso, costituisce il numero delle permutazioni di n oggetti in tutti i modi possibili e viene indicato con il simbolo P(n).

Teorema 1:

$$P(n) = n!$$

DEFINIZIONE 4:

Il numero dei modi in cui si possono selezionare ed ordinare k oggetti scelti tra n oggetti distinti costituisce il numero delle disposizioni di n oggetti di classe k (o a k a k) ed è indicato con il simbolo D(n,k).

Teorema 2:

$$D(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

DEFINIZIONE 5:

Il numero complessivo delle possibili selezioni di k oggetti scelti tra n oggetti distinti costituisce il numero delle combinazioni di n oggetti presi k alla volta e viene indicato con il simbolo C(n,k).

Teorema 3:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Teorema 4:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} = C(n,n-k)$$

Teorema 5:

$$C(n,n) = C(n,0) = 1$$

DEFINIZIONE 6:

Se k<0 oppure se k>n è C(n,k)=0.

Teorema 6:

$$(a+b)^n = \sum_k C(n,k).a^k.b^{n-k} =$$

$$= C(n,n).a^n + C(n,n-1).a^{n-1}.b +$$

$$+C(n,n-2).a^{n-2}.b^2 + ... +$$

$$+C(n,2).a^2.b^{n-2} + C(n,1).a.b^{n-1} +$$

$$+C(n,0).b^n$$

Teorema 7:

$$\sum_k C(n,k) = 2^n.$$

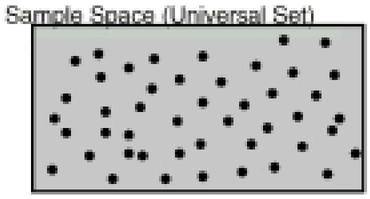
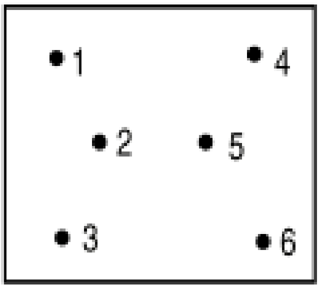
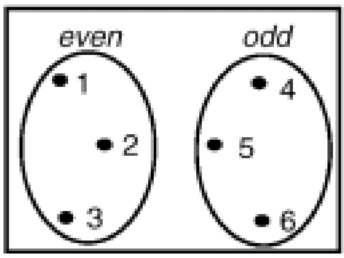


FIGURE 2.1 Venn diagram representation of a sample space.





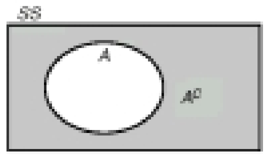
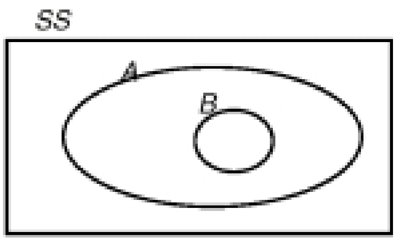


FIGURE 2.2 Representation of the complement of an event. The shaded region in the diagram represents the complement of event A (unshaded region), A^c.

A INCLUDE B

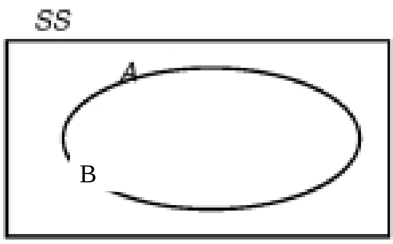
B⊂A



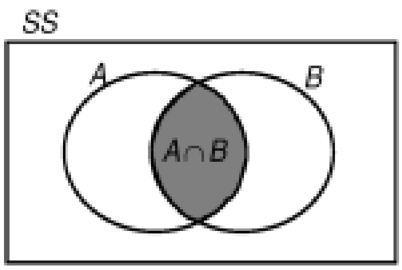
Representation of the relation of A include B.

A e B COINCIDONO

B=A

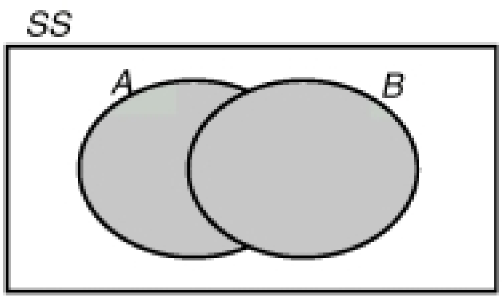


A∩B



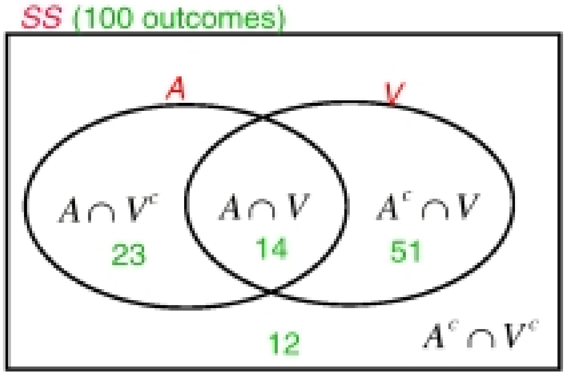
A Venn diagram representation of the intersection

A∪B



A Venn diagram representation of the union

1. $A \cup B = B \cup A$ Commutative Rule
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Associative Rule
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Distributive Rule
4. $(A^c)^c = A$ Complement of a Complement Rule
5. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ DeMorgan's Rule
6. $A \cap A^c = \varnothing$ where $\varnothing$ denotes the null set
7. $A \cap S = A$



CALCOLO
DELLE PROBABILITÀ

-Definizione di probabilità.

-Legge additiva (eventi disgiunti)

-Probabilità totale

-Eventi composti

-Eventi indipendenti

-Legge moltiplicativa

-Probabilità composte

-Probabilità condizionata

-Definizione di variabile aleatoria

Definizione di probabilità: esempi

1. La probabilità che una candela accesa si spenga è p = 1, perché è assolutamente certo che si esaurirà.

2. La probabilità che si spenga nella prossima mezzora è un numero p compreso nell'intervallo 0-1.

3. La probabilità che una candela accesa rimanga accesa per sempre è p=0.

4. La probabilità che lanciando un dado non truccato si ottenga uno qualunque dei numeri tra 1 e 6 è p=1, perché un dado ha solo sei faccie ciascuna delle quali mostra un numero compreso tra 1 e 6 e certamente il risultato dovrà essere uno di questi numeri.

Definizione di probabilità: esempi

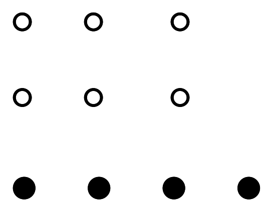
5. La probabilità di ottenere un numero maggiore di 2 lanciando un dado non truccato è p = 4/6 = 2/3, perché vi sono sei possibili modi in cui il dado può cadere e di questi, quattro sono favorevoli all'evento indicato.

1 2 ***3*** ***4*** ***5*** ***6***

6. In una lotteria che abbia distribuito 90 biglietti e che preveda di premiare 10 numeri e di non premiare gli altri 80 numeri, la probabilità che un individuo possessore di un biglietto ha di vincere un premio è p=10/90, perché 90 sono tutti i numeri possibili e solo 10 di questi sono associati ad un premio.

Definizione di probabilità: esempi

7. Da un'urna contenente 6 biglie bianche e 4 biglie nere, la probabilità di estrarre una biglia nera è p = 4/10



Legge additiva e probabilità totale

la probabilità che si presenti uno qualsiasi di n eventi che si escludono vicendevolmente è uguale alla somma delle probabilità che si verifichino n eventi separati **e cioè:**

$$P\begin{pmatrix} \text{probabilità che si presenti} \\ \text{uno qualunque tra n eventi} \\ \text{che si escludono a vicenda} \end{pmatrix} = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n$$

ESEMPIO

La probabilità che un dado mostri 1 oppure 6 é data dalla uguaglianza

p = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3 .

Legge additiva e probabilità totale: esempi

Supponiamo di avere 15 carte segnate con i primi 15 numeri. Quando una di queste carte viene estratta a caso, qual'è la probabilità di avere un numero multiplo di 2 o di 9?

Tra i primi quindici numeri non ve ne è nessuno che sia allo stesso tempo multiplo di 2 e di 9, per cui i due eventi si escludono a vicenda e la risposta è:

$$p_2 + p_9 = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$

Legge additiva e probabilità totale: esempi

Supponiamo di avere 15 carte segnate con i primi 15 numeri. Quando una di queste carte viene estratta a caso quale è la probabilità di ottenere un numero che sia multiplo di 2 o di 3, 6 e 12 sono multipli sia di 2 che di 3. Quindi i due eventi non si escludono a vicenda.

Per trovare la risposta giusta dobbiamo includere 6 e 12 in una sola delle due frequenze favorevoli e non in entrambe. La probabilità di avere un multiplo di 2 è 7/15 e quella di avere un multiplo di 3 è 5/15.

La risposta non è:

7/15 + 5/15 = 12/15 = 4/5,

bensì:

7/15 + 5/15 - 2/15 = 10/15 = 2/3.

Eventi composti e indipendenti

Quando due o più eventi si verificano in connessione l'uno con gli altri, il verificarsi congiunto è chiamato evento composto**.**

Parecchi eventi possono verificarsi simultaneamente o in successione. Ma essi possono essere sia indipendenti l'uno dall'altro, sia dipendenti tra loro.

Gli eventi si dicono indipendenti se il verificarsi dell'uno non influisce sul verificarsi degli altri.
In altre parole, due eventi si dicono mutualmente indipendenti quando la probabilità che si verifichi uno di essi è la stessa sia che l'altro si presenti sia che non si presenti.

Eventi composti e indipendenti: esempi

La probabilità d'ottenere due 1 nel lancio di una coppia di dadi non truccati è:

p=1/6 * 1/6 = 1/36

I due eventi sono *indipendenti*.
Infatti, il punteggio che mostra il primo dado non influisce sul risultato ottenuto dal secondo dado.

Il numero totale delle associazioni possibili è pari a 6*6=36.
Poiché vogliamo avere come risultato due 1, questo può verificarsi solo in un modo e quindi il numero dei modi favorevoli all'evento "uscita di due 1 con il lancio di due dadi non truccati" è pari ad 1. Quindi la probabilità ricercata è uguale a 1/36, che è uguale al prodotto delle probabilità di ottenere 1 separatamente da ogni dado, cioè:

p=1/6 * 1/6 = 1/36

Eventi composti e indipendenti: esempi

Se si estrae una biglia da un'urna che ne contiene 6 bianche e 8 rosse e si esegue poi una seconda estrazione, dopo aver rimesso nell'urna la biglia estratta la prima volta, qual'è la probabilità che la prima estrazione dia come risultato una biglie bianche e la seconda una biglia rossa?

Poiché la biglia estratta la prima volta è rimessa nell'urna prima di effettuare la seconda estrazione, il risultato della prima estrazione non avrà alcuna influenza su quello della seconda. Quindi i due eventi sono *indipendenti*.

Si ha :

p=3/7 * 4/7 = 12/7

LEGGE MOLTIPLICATIVA

Si abbiano due *eventi indipendenti*.
Con le caratteristiche seguenti:

	I EVENTO	**II EVENTO**
modi favorevoli al verificarsi dell' evento	f_1	f_2
Modi possibili di verificarsi (S)	N_1	N_2
Probabilità che si verifichi l'evento	P_1	P_2

Sappiamo che:

$$p_1 = \lim_{N_1 \to +\infty} \frac{f_1}{N_1};$$

$$p_2 = \lim_{N_2 \to +\infty} \frac{f_2}{N_2}.$$

Qual'è la probabilità dell'evento composto ($E1 \cap E2$) ?

Modi favorevoli al verificarsi di ambedue gli eventi E1 ed E2:

f1*f2

Modi possibili di presentarsi dell'evento composto (S):

N1*N2

Si ha:

$$p(E1 \cap E2) = \lim_{\substack{N_1 \to +\infty \\ N_2 \to +\infty}} \frac{f_1 \cdot f_2}{N_1 . N_2};$$

Per il teorema concernente il limite di un prodotto si può scrivere:

$$\lim_{\substack{N_1 \to +\infty \\ N_2 \to +\infty}} \frac{f_1 \cdot f_2}{N_1 . N_2} = \lim_{N_1 \to +\infty} \frac{f_1}{N_1} . \lim_{N_2 \to +\infty} \frac{f_2}{N_2} = p_1 . p_2$$

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ COMPOSTA

"La probabilità del verificarsi di un evento composto che consiste di due eventi indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità di verificarsi relative a ciascuno degli eventi singoli".

Questo teorema può essere generalizzato al caso in cui gli eventi indipendenti siano più di due, per il quale potremo scrivere:

$$p(E1 \cap E2 \cap E3 \cap .... \cap En) = p_1 . p_2 . p_3 .... p_n$$

Probabilità condizionata

Consideriamo due eventi x ed y *dipendenti* l'uno dall'altro, cioè la probabilità del verificarsi dell'evento y dipende dal verificarsi o meno dell'evento x. La probabilità che l'evento y si verifichi è detta probabilità condizionata ed è di solito indicata con la notazione:

p(y/x)

In questo caso la legge moltiplicativa della probabilità si scriverà come segue:

$$p(x, y) = p(x) . p(y / x),$$

L'espressione che fornisce la probabilità condizionata è:

$$p(y / x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}.$$

Probabilità condizionata

Esempio

Supponiamo di estrarre una carta da un mazzo di 52 carte. Senza rimettere la carta estratta nel mazzo, ripetiamo l'operazione con una seconda carta. Qal'è la probabilità che tutte e due le carte siano dello stesso colore?

Prima della prima estrazione, il mazzo contiene carte di due colori nello stesso numero, ma poiché la carta estratta per prima non viene riposta nel mazzo, la seconda estrazione dipenderà dal risultato della prima. Quindi i due eventi sono tra loro dipendenti. In questo caso possiamo usare la formula della probabilità condizionata.

Probabilità condizionata

Esempio

Indichiamo con p(x) la probabilità di estrarre una carta del colore desiderato nella prima estrazione. Allora p(y/x) rappresenterà la probabilità condizionata, cioè la probabilità di estrarre una carta dello stesso colore nella seconda estrazione:

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}; \quad p\ (y / x) = \frac{25}{51}$$

e quindi la probabilità cercata è pari a:

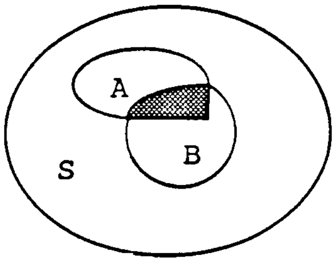
$$\mathrm{p}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{p}(\mathrm{x}) . \mathrm{p}_{\mathrm{x}}(\mathrm{y}) = \frac{1}{2} . \frac{25}{51} = \frac{25}{102}.$$

Speranza matematica

Se una persona ha la probabilità $p1$ di ottenere una somma $x1$ e $p2$ di ottenere la somma $x2$ e così via, la sua speranza matematica è data dalla formula:

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n \cdot p_n$$

Dati 2 eventi A e B, si definisce



Probabilità totale : $P(A \cup B)$

Probabilità composta $P(A \cap B)$

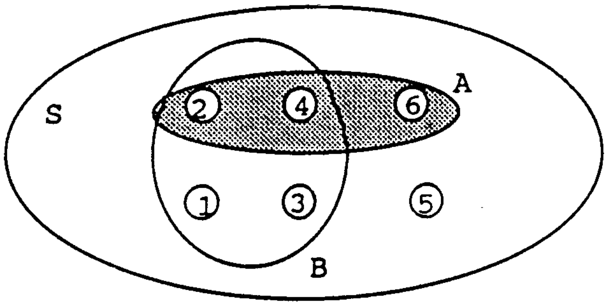
Probabilità condizionata:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{se } P(A) > 0$$

$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

Esempio:

LANCIO Di UN DADO



A: numero pari

B: numero <=4

$$P(E) = 1/6 \quad \forall E \subset S$$

$$P(A \cup B) = P(1,2,3,4,6) = \frac{5}{6} \qquad P(A \cap B) = P(2,4) = \frac{2}{6} \qquad P(B/A) = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Eventi statisticamente indipendenti

Definizione $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Risulta :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

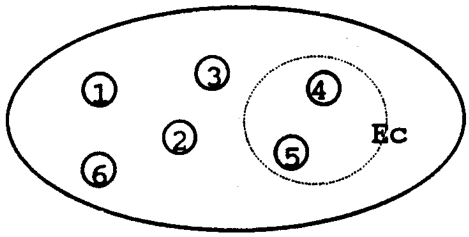
ESPERIMENTO: operazione di cui non si conosce "a priori" il risultato

EVENTO SEMPLICE: ciascun risultato (E) di un esperimento, il verificarsi di un evento Ei esclude il verificarsi di qualunque altro evento Ej.

SPAZIO DELLE PROVE: l'insieme (S) di tutti i possibili eventi semplici

S -= {E}

- finito
- infinito
- discreto
- continuo



EVENTO COMPOSTO (Ec): ciascun insieme di eventi semplici

PROBABILITA' DI UN EVENTO: La probabilità di un evento è un numero, associato ad ogni evento dell'insieme delle prove, soddisfacente le seguenti proprietà:

ASSIOMI DELLA TEORIA DELLE PROBABILITA'

1) $P(S) = 1$
2) $1 \quad P(E) \quad 0 \qquad \forall E \subset S$
3) $P(E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_m)$

   Se Ei Ej = Ø Vi j