FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

$$t_k = \frac{Z}{\sqrt{U / k}}$$

dove con **Z** si è indicata una variabile distribuita secondo una legge **normale N(0,1)** e con **U** una **chi-quadrato a k gradi di libertà** (Z ed U sono indipendenti)
Si ha che:

$$E[t] = 0$$

$$VAR(t) = \frac{k}{k-2}$$

La variabile **t di Student** ha importanza nell' analisi di alcune statistiche sulla distribuzione normale.

Proprietà della distribuzione t di Student

- All'aumentare dei gradi di libertà, la distribuzione t di Student si avvicina alla distribuzione normale standardizzata.

Uso della variabile t di Student

se $\quad X_i \approx N(\mu,\sigma) \qquad Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \approx \chi^2_{n-1}$$

quindi :

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{(n-1)}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

Funzione di distribuzione F di Fisher

$$F(m,n) = \frac{U / m}{V / n}$$

dove si è indicata con **U** una variabile distribuita secondo una legge chi-quadrato a **m** gradi di libertà e con **V** una chi-quadrato a **n** gradi di libertà
Si ha che:

$$E[F_{(m,n)}] = \frac{n}{n-2} \qquad \text{per n > 2}$$

$$VAR(F_{(m,n)}) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \qquad \text{per n > 4}$$

Proprietà della distribuzione F di Fisher

- Il quadrato di una t di Student con n gradi di libertà è uguale ad una distribuzione F di Fisher con gradi di libertà 1 ed n, cioè:

$$\mathbf{t^2_{(n)} = F_{(1,n)}}$$

oppure

$$\mathbf{t_{(n)} = \sqrt{F_{(1,n)}}}$$

- la variabile **F di Fisher** ha importanza nell' analisi di alcune statistiche sulla distribuzione normale

USO DELLA VARIABILE F DI FISHER

SE $X_i \approx N(\mu_x, \sigma_x)$ $$U_x = \frac{\sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_x^{\ 2}} \approx \chi^2_{m-1}$$

SE $Y_i \approx N(\mu_y, \sigma_y)$ $$U_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}{\sigma_y^{\ 2}} \approx \chi^2_{n-1}$$

quindi :

$$F = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_x^{\ 2}(m-1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}{\sigma_y^{\ 2}(n-1)}} = \frac{S_x^2 / \sigma_x^2}{S_y^2 / \sigma_y^2}$$