Metodi per la ricerca degli stimatori

- ♦ Metodo dei momenti
- ♦ Metodo della funzione di verosimiglianza
- ♦ Metodo dei minimi quadrati

Metodo dei momenti

Consiste nel porre i **momenti della popolazione** uguali ai corrispondenti **momenti campionari**, risolvendo poi tali equazioni per i parametri incogniti della distribuzione della popolazione.

Metodo dei momenti

Se i momenti campionari e della popolazione sono rispettivamente:

momenti campionari	momenti della popolazione
$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum Xi$	$\mu_1 = E\left[X\right]$
$\overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum Xi^2$	$\mu_2 = E\left[X^2\right]$
.	.
$\overline{X}^k = \frac{1}{n}\sum Xi^k$	$\mu_k = E\left[X^K\right]$

La stima del generico parametro μ_k è effettuata ponendo :

$$\hat{\mu}_k = \overline{X}^k$$

Esempio metodo dei momenti

Sia X1,X2…Xn un campione casuale da una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2.

(θ_1,θ_2)= (μ,σ) incogniti

Stimiamo i parametri μ e σ col metodo dei momenti. Ricordiamo che:

$$\sigma^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 \qquad \text{e} \qquad \mu = \mu_1'$$

Le equazioni del metodo dei momenti sono quindi:

$$M_1' = \mu_1' = \mu_1'(\mu, \sigma) = \mu$$

$$M_2' = \mu_2' = \mu_2'(\mu, \sigma) = \sigma^2 + \mu^2,$$

la soluzione è la seguente: lo stimatore ottenuto col **metodo dei momenti** di μ è :

$$M_1' = \overline{X}$$

e quello di σ è:

$$\sqrt{M_2' - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n}}$$

Metodo della funzione di verosimiglianza

si dice **funzione di verosimiglianza :**

L(θ,x1,x2,x3,..xn)

di n variabili casuali x1,x2,x3,..xn la densità di probabilità congiunta delle n variabili casuali considerata come funzione di θ:

$$\mathrm{L}(\theta, X1, X2, X3,..Xn) = f_{X1,X2,X3,..Xn}(X1, X2, X3,..Xn;\theta)$$

si ha per n variabili indipendenti:

$$\mathrm{L}(\theta, X1, X2, X3,..Xn) = f(X1,\theta)\, f(X2,\theta)....\, f(Xn,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(Xi,\theta)$$

Stimatore di massima verosimiglianza

Lo stimatore di **massima verosimiglianza** di θ e' quella funzione T di x1,x2,x3,..xn tale che il valore T(x1,x2,x3,..xn) al variare del campione (x1,x2,x3,..xn) coincide con il valore θ' che massimizza la funzione di verosimiglianza L(θ,x1,x2,x3,..xn).

Lo stimatore di massima verosimiglianza si ottiene massimizzando la funzione L(θ,x1,x2,x3,..xn) rispetto a θ quindi risolvendo l'equazione:

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$$

Esempio di stimatore di massima verosimiglianza

Un'urna contiene un numero non noto di biglie nere e bianche. Il rapporto fra i due numeri è 3/ 1, ma non si sa se le biglie più numerose sono le nere o le bianche.

La probabilità di estrarre una biglia nera è 1/4 oppure 3/4.

Se si estraggono dall'urna, con reimmissione n biglie, la distribuzione di X, numero delle biglie nere, è data dalla distribuzione binomiale :

$$f(x;p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

p=1/4 oppure p = 3/4 ?

Esempio di stimatore di massima verosimiglianza

Si estrae con reimmissione un campione di tre biglie per stimare il parametro incognito p della distribuzione.
Gli esiti possibili e le loro probabilità:

Esito: x	0	1	2	3
$f(x;\frac{3}{4})$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$
$f(x;\frac{1}{4})$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

Lo stimatore può essere definito come:

$$\hat{p} = \hat{p}(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{per } x = 0, 1 \\ 0.75 & \text{per } x = 2, 3. \end{cases}$$

Lo stimatore sceglie così il valore di p, per ogni possibile x, tale che:

$$f(x;\hat{p}) > f(x;p'),$$

dove p' è il valore alternativo di p.

Più in generale, se fossero possibili più valori alternativi di p, potremmo procedere nella stessa maniera.

Lo stimatore di massima verosimiglianza fornisce il parametro che massimizza la verosimiglianza del campione (probabilità di estrarre un dato campione per var. discrete, densità di prob. per var. continue).

Metodo dei minimi quadrati

Il metodo dei minimi quadrati proposto da Gauss si basa sull'ipotizzare che i **valori campionari** si trovino **il più vicino possibile ai loro valori attesi.**

In particolare si rende minima la somma dei quadrati delle distanze fra i valori attesi ed i valori campionari.

Esempio metodo dei minimi quadrati

Si vuole stimare la media μ di una variabile aleatoria x

Si e' estratto un campione (X1,X2,X3,..Xn) ogni osservazione xi può essere scritta nella forma:

$$Xi = \mu + e_i$$

i valori

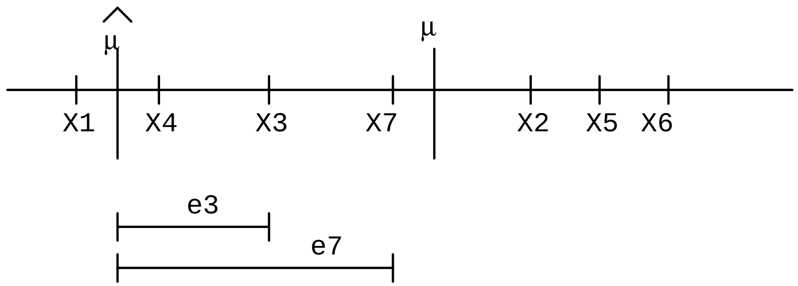
$$e_i = X_i - \mu$$

sono quindi le distanze delle osservazioni da μ

Esempio metodo dei minimi quadrati

come stimatore dei minimi quadrati si prende quella funzione del campione $\hat{\mu}(X1, X2, \ldots XN)$ che fornisce per ogni campione il valore $\hat{\mu}$ tale che la somma dei quadrati delle distanze sia la minima possibile.

$$e_i = X_i - \hat{\mu} \qquad S(\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2.$$



$$S(\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2.$$

Le condizioni di primo ordine per il minimo di $S(\hat{\mu})$ sono

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\mu}} = -2 \sum_i (X_i - \hat{\mu}) = 0,$$

da cui si ottiene:

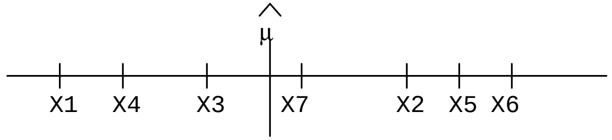
$$\sum_i (X_i - \hat{\mu}) = 0,$$

e quindi:

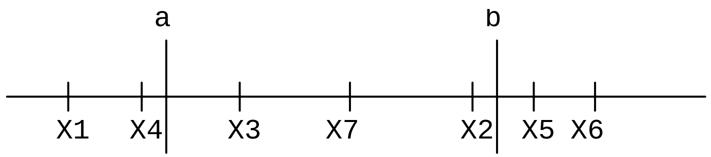
$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_i X_i = \bar{X}.$$

Stima per intervalli di confidenza

La stima per intervalli di confidenza si propone di trovare un intervallo che con probabilità nota contenga il parametro da stimare



STIMA PUNTUALE



STIMA PER INTERVALLI DI CONFIDENZA

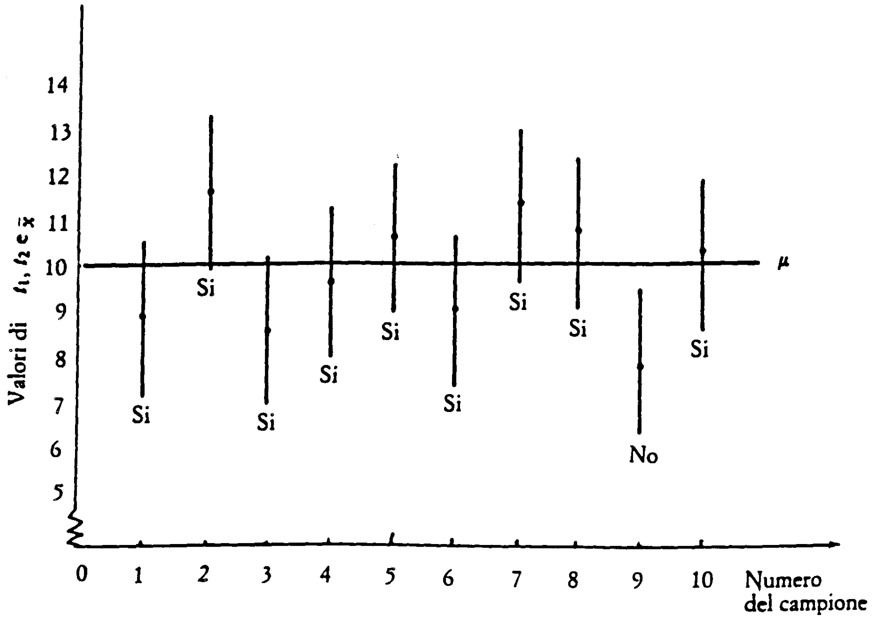
Esempio intervallo di confidenza per la media

Si supponga di aver estratto 10 campioni di 36 unità da una popolazione normale con media 10 e varianza 36.

Per ognuno di questi campioni si è calcolata la media campionaria $\bar{X}$ e l'intervallo di confidenza al 95%.
In questo caso gli estremi dell'intervallo saranno dati da:

$$\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Campione	$\bar{X}$	**Estremo inferiore a**	**Estremo Superiore b**
1	8,75	6,79	10,71
2	11,75	9,79	13,71
3	8,45	6,49	10,41
4	9,70	7,74	11,66
5	10,50	8,54	12,46
6	9,00	7,04	10,96
7	11,15	9,19	13,11
8	10,50	8,54	12,46
9	7,75	5,79	9,71
10	10,10	8,14	12,06



Intervallo di confidenza per la media di una distribuzione normale a varianza nota

Si considera un campione (x1,x2,x3,..xn) estratto da una distribuzione **N(μ,σ)** con μ incognito e σ noto.

Lo scopo e' quello di trovare un intervallo **a,b** tale che il parametro μ vi sia contenuto con probabilita' **p=1-α.**

Si utilizza lo stimatore $\overline{X}_n$ che e' distribuito secondo una legge normale **N(μ,σ²/n)** la sua distribuzione dipende pero' da μ incognito:

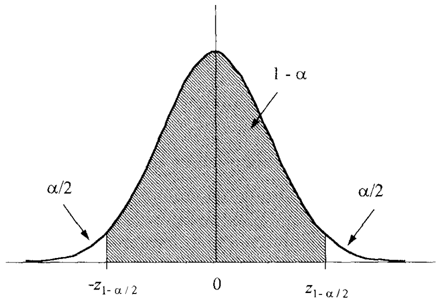
$$\overline{X}_n = \frac{\sum X_i}{n}$$

Si opera quindi una trasformazione:

$$Z = \left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right) \approx N(0,1).$$

Si sa per quale valore $z_{\alpha/2}$ e' vero (valore tabellato):

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \le z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$



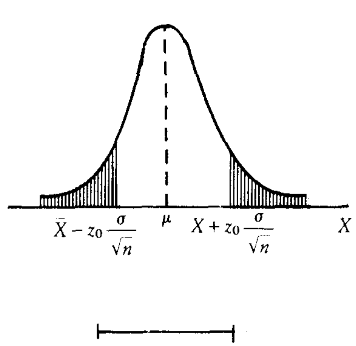
Rappresentazione di $\mathbb{P}[-z_{1-\alpha/2} < Z \le z_{1-\alpha/2}] = 1 - \alpha$.

da cui si ricava:

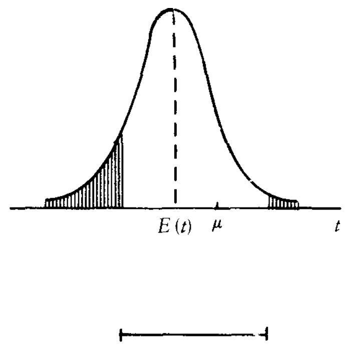
$$P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

Anche nella stima per intervalli ha rilevanza il fatto di considerare degli stimatori che godano di buone proprietà.

a) **Stimatore distorto**

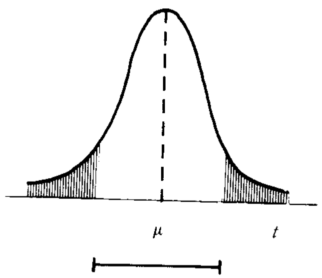


. Intervallo per μ con stimatore corretto.

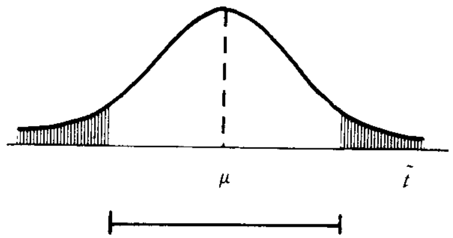


. Intervallo per μ con stimatore distorto $D(t) > 0$.

b) **Stimatore corretto ma inefficiente**.
L'intervallo di confidenza sarà piú ampio:
varianza piú elevata con stime meno precise.

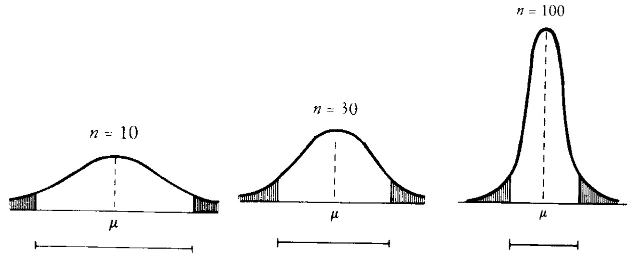


!.a. Intervallo per μ con stimatore piú efficiente di $\tilde{t}$.



!.b. Intervallo per μ con stimatore meno efficiente di t.

c)**Stimatore consistente.**
All'aumentare della numerosità del campione, gli intervalli di confidenza sono via via piú piccoli:
aumenta la precisione dell'intervallo di stima.
Al limite, quando il campione coincide con la popolazione (se la popolazione è finita) l'intervallo diventa degenere e coincide con il valore del parametro incognito della popolazione.



3.a. Intervallo per μ con $n = 10$.
.b. Intervallo per μ con $n = 30$.
.c. Intervallo per μ con $n = 100$.

Intervallo di confidenza per la media di una distribuzione normale a varianza non nota

Si considera un campione (x1,x2,x3,..xn) estratto da una distribuzione **N(μ,σ)** con μ incognito e **σ** incognito.

Lo scopo e' quello di trovare un intervallo **a,b** tale che il parametro μ vi sia contenuto con probabilita' **P=1-α.**

Si utilizza lo stimatore $\overline{X}_n$ che e' distribuito secondo una legge normale **N(μ,σ²/n)** la sua distribuzione dipende pero' da μ incognito e da **σ** incognito:

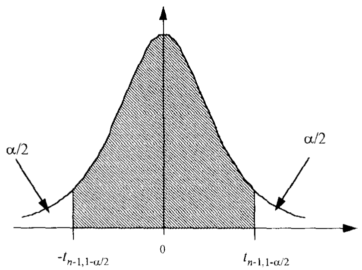
$$\overline{X}_n = \frac{\sum X_i}{n}$$

Si opera quindi una trasformazione:

$$t_{n-1} = \left(\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \right) \approx LEGGE \quad t \text{ di STUDENT}$$

Si sa per quale valore $t_{\alpha/2}$ e' vero (valore tabellato):

$$P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$



Rappresentazione di $\mathbb{P}[-t_{n-1,1-\alpha/2} < T \leq t_{n-1,1-\alpha/2}] = 1 - \alpha$.

da cui si ricava:

$$P\left(\overline{X} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

Intervallo di confidenza per la varianza di una distribuzione normale a media non nota

Si considera un campione (x1,x2,x3,..xn) estratto da una distribuzione **N(μ,σ)** con μ incognito e σ incognito

lo scopo e' quello di trovare un intervallo **a,b** tale che il parametro σ vi sia contenuto con probabilita' **P=1-α**

si utilizza lo stimatore **S** di cui non si conosce la distribuzione:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

operando la trasformazione:

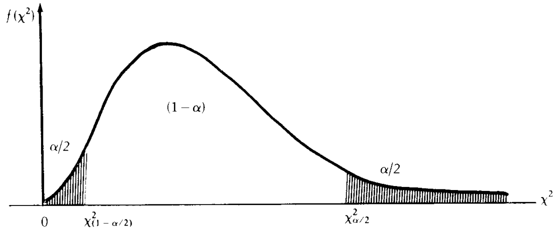
$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \approx \chi^2_{n-1}$$

si conosce la distribuzione di U e per quali valori U1 e U2 e' vero che (valore tabellato):

$$P\left(U1 \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le U2\right) = 1-\alpha$$

da cui:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{U2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{U1}\right) = 1-\alpha$$



. Distribuzione χ^2 con n gradi di libertà.

Regione di confidenza simultanea per la media e la varianza di una distribuzione normale

Si considera un campione (x1,x2,x3,..xn) estratto da una distribuzione **n(μ,σ²)** con μ incognito e σ² incognito

Lo scopo e' quello di trovare una regione del piano μ-σ² tale che il punto (μ,σ²) vi sia contenuto con probabilita' **p=1-α**

Si potrebbe procedere analogamente a quanto fatto per μ e σ² usando le due relazioni:

vedi mcgraw pg386