STIMA PUNTUALE

STIMATORI: $T(X1, X2, X3, ..., Xn)$

PROPRIETA' DEGLI STIMATORI

- ♦ CORRETTEZZA
- ♦ EFFICIENZA
- ♦ ERRORE QUADRATICO MEDIO
- ♦ CONSISTENZA

CORRETTEZZA DI UNO STIMATORE

LO STIMATORE T(X1,X2,X3,....,Xn) E' UNO STIMATORE CORRETTO DEL PARAMETRO θ SE:

$$E\left[T(X1, X2, X3, ..., Xn\right] = E\left[T\right] = \theta$$

EFFICIENZA DI UNO STIMATORE

LO STIMATORE T(X1,X2,X3,....,Xn) E' UNO STIMATORE EFFICIENTE DEL PARAMETRO θ SE:

1) $E\left[T(X1, X2, X3, ..., Xn\right] = E\left[T\right] = \theta$

2) VAR(T)<VAR(T1)

L' ERRORE QUADRATICO MEDIO DI UNO STIMATORE T(X1,X2,X3,....,Xn) E':

$$\begin{aligned}
\text{EQM(T)} &= E\left[(T-\theta)^2\right] = E\left[(T-E[T]+E[T]-\theta)^2\right] = \\
&= E\left[(T-E[T])^2\right] + E\left[(E[T]-\theta)^2\right] + 2E\left[(T-E[T])(E[T]-\theta)\right] = \\
&= E\left[(T-E[T])^2\right] + E\left[(E[T]-\theta)^2\right] + 2(E[T]-\theta)E\left[(T-E[T])\right] = \\
&= E\left[(T-E[T])^2\right] + E\left[(E[T]-\theta)^2\right] + 2(E[T]-\theta)(E[T]-E[E[T]]) = \\
&= VAR(T) + \left(E[T]-\theta\right)^2 = VAR(T) + D(T)^2
\end{aligned}$$

D(T) E' LA DISTORSIONE

LO STIMATORE T(X1,X2,X3,....,Xn) E' UNO STIMATORE **CONSISTENTE** DEL PARAMETRO θ SE:

1) $\lim_{n \to \infty} E\left[T_n\right] = \theta$

2) $\lim_{n \to \infty} Var(T_n) = 0$

CAMPIONAMENTO DA DISTRIBUZIONI NORMALI

MEDIA DEL CAMPIONE DI UNA DISTRIBUZIONE NORMALE

$$\overline{X}_n = \frac{\sum X_i}{n}$$

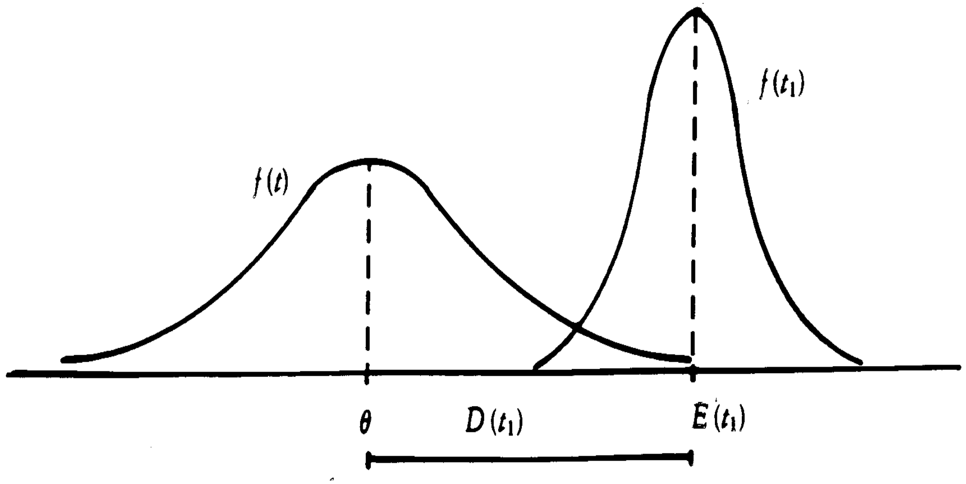
$\overline{X}_n$ è a sua volta una variabile aleatoria che essendo la somma di più variabili aleatorie normali è una variabile aleatoria normale

$$\mathrm{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{n}}\sum X_i\right] = \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{E}\left[\sum X_i\right] = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum \mathrm{E}[X_i] =$$

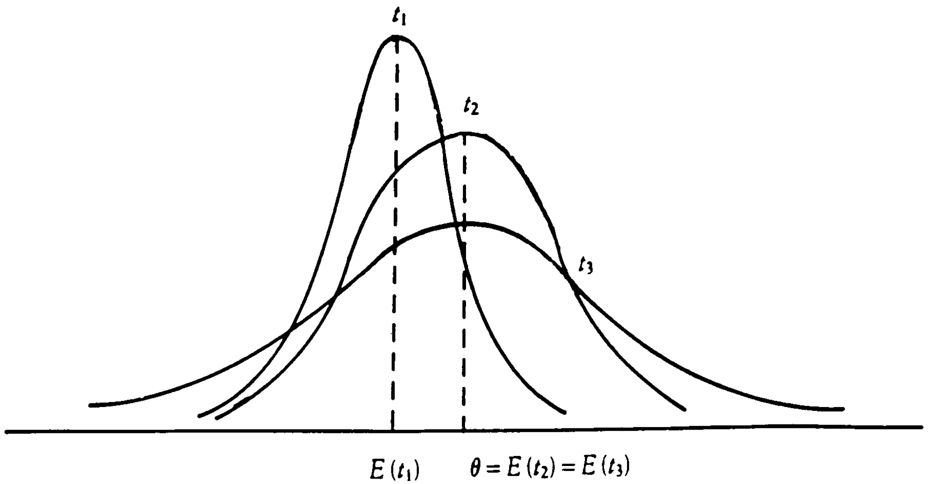
$$= \frac{1}{\mathrm{n}}\left(\mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] + \mathrm{E}[X_3] + .. + \mathrm{E}[X_n]\right) = \frac{1}{\mathrm{n}}(\mathrm{n}\mu) = \mu$$

$$\mathrm{VAR}\left(\overline{X}_n\right) = \mathrm{VAR}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\sum X_i\right) = \frac{1}{\mathrm{n}^2}\mathrm{VAR}\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{\mathrm{n}^2}\mathrm{VAR}\left[\sum X_i\right] =$$

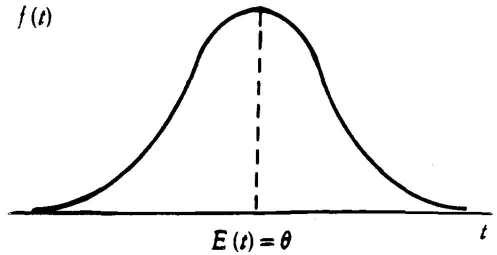
$$= \frac{1}{\mathrm{n}^2}\left(\mathrm{VAR}(X_1) + \mathrm{VAR}(X_2) + \mathrm{VAR}(X_3) + ... + \mathrm{VAR}(X_n)\right) = \frac{1}{\mathrm{n}^2}\mathrm{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\mathrm{n}}$$



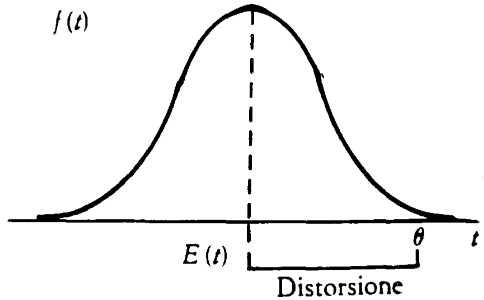
Rappresentazione di uno stimatore t1 distorto e a varianza minima che non può essere preferito a t.



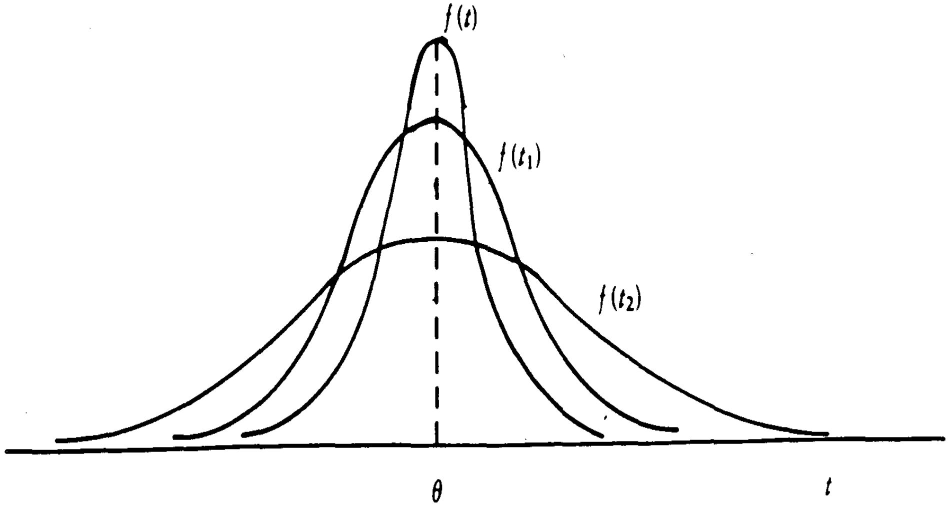
Rappresentazione di uno stimatore t1 con SQM minimo rispetto a t2 e t3



Rappresentazione di uno stimatore corretto di θ



Rappresentazione di uno stímatore distorto di θ



Rappresentazione dello stimatore t, efficiente rispetto a t1 e t2

Infatti si ha:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)]^2=$$

$$=\sum_i(X_i-\mu)^2+n(\bar{X}-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\sum_i(X_i-\mu)=$$

$$=\sum_i(X_i-\mu)^2+n(\bar{X}-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)(n\bar{X}-n\mu)=$$

$$=\sum_i(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2.$$

Quindi:

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right].$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right].$$

Moltiplicando entrambi i termini dell'equazione per la costante $\frac{n-1}{\sigma^2}$ *si ottiene:*

$$\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)s^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2-\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2.$$

Ne consegue, quindi, che il rapporto si distribuisce secondo la legge χ^2 con (n - 1) gradi di libertà:

$$\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)s^2\sim\chi^2_{(n-1)}.$$

Inoltre è semplice verificare che:

$$E\left(s^2\frac{n-1}{\sigma^2}\right)=\frac{n-1}{\sigma^2}E(s^2)=\frac{n-1}{\sigma^2}\sigma^2=n-1$$

$$\mathrm{Var}\left(s^2\frac{n-1}{\sigma^2}\right)=\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)^2\frac{2\sigma^4}{n-1}=2(n-1).$$