## Alcune importanti proprietà delle variabili indipendenti

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$Cov(X,Y) = 0$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = n\sigma^2$$

## Disuguaglianza di Cebysev e legge dei grandi numeri

L'idea intuitiva di probabilità si presenta nella forma della cosiddetta '1egge delle medie', per cui se un evento A si verifica con probabilità p, allora "il numero medio delle volte che A sì verifica" tende a p al crescere del numero delle prove (indipendenti). Questo concetto si basa sulla ben nota disuguaglianza di Cebysev:

**Teorema :** (Disuguaglianza di Cebysev): Sìa X una variabile casuale con valor medio μ e scarto quadratico medio σ. Allora per ogni $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

### *Dimostrazione disuguaglianza di Cebysev*

Dalla definizione di varianza:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

Elidiamo da detta serie tutti i termini per i quali $|x_i - \mu| < \varepsilon$.
Ciò non accresce il valore della serie, poiché tutti i suoi termini sono non negativi, ossia:

$$\sigma^2 \geq \sum_i^{*} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

dove l'asteríscо indica che la sommatoria è estesa a quei soli valori di i per i quali $|x_i - \mu| \geq \varepsilon$. Pertanto il valore di questa nuova sommatoria non aumenta se sostituiamo ciascun $|x_i - \mu|$ con $\varepsilon$ ossia:

$$\sigma^2 \geq \sum_i^{*} \varepsilon^2 f(x_i) = \varepsilon^2 \sum_i^{*} f(x_i)$$

$$\sigma^2 \geq \sum_i^{*} \varepsilon^2 f(x_i) = \varepsilon^2 \sum_i^{*} f(x_i)$$

Ma

$$\sum_i^{*} f(x_i)$$

è uguale alla probabilità che $|X - \mu| \geq \varepsilon$ quindi:

$$\sigma^2 \geq \varepsilon^2 P(|X - \mu| \geq \varepsilon)$$

Dividendo per $\varepsilon^2$ si ottiene la disuguaglianza cercata.

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

## Legge dei grandi numeri

Teorema: Sia X1, X2, ... una successione di variabili casuali indipendenti con la stessa funzione di probabilità con valor medio m e varianza $\sigma^2$.

Sia:

$$\overline{S}_n = (X_1 + X_2 + ...... + X_n)/n$$

Allora per ogni $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{S}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

o in altri termini:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\overline{S}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

## *Dimostrazione Legge dei grandi numeri*

Si ha:

$$E(\bar{S}_n) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Poiché Xi, . . ., X. sono indipendenti consegue che:

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = n\sigma^2$$

Pertanto:

$$\mathrm{Var}(\bar{S}_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Quindi per la disuguaglianza di Cebysev :

$$P(|\bar{S}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Il teorema è dimostrato per il fatto che il limite del membro destro è 0 per n tendemte a infinito.

## *Osservazioni Legge dei grandi numeri*

**Osservazione 1.** Abbiamo dimostrata la disuguaglianza di Cebysev soltanto con riferimento ad una variabile discreta. Nel caso di una variabile continua la dimostrazione è analoga e fa uso di integrali anziché di sommatorie.

**Osservazione 2.** Abbiamo dimostrata la legge dei grandi numeri con riferimento al solo caso in cui la varianza di $X_i$ esiste, e cioè non è divergente. Osserviamo che il teorema è valido in tutti i casi in cui $E(X_i)$ esiste.

**Osservazione 3.** La suddetta legge dei grandi numeri è anche detta ***legge debole*** dei grandi numeri, in quanto esiste un teorema simile, ma più forte, detto ***legge forte*** dei grandi numeri.